

## TEMA 4

# SÍNTESIS DE FILTROS PASIVOS

### 4.1 Introducción

Este capítulo se dedica al diseño de filtros pasivos. Dejando aparte la discusión semi-filosófica sobre lo que es un circuito pasivo o un circuito activo, diremos aquí que filtros pasivos (lineales e invariantes en el tiempo) son aquellos constituidos por agrupaciones de resistencias, condensadores, bobinas<sup>1</sup>, y quizás algún transformador. Por este motivo, se les suele llamar también filtros RLC.

Estos filtros son, cronológicamente, los primeros que se desarrollaron, ya que a principios del siglo XX no existían elementos activos, o estos eran muy caros y voluminosos. Por este motivo, gran parte de la teoría clásica de filtros está desarrollada apuntando directa o indirectamente a la realización RLC.

La utilización de más de un tipo de elementos (R, L, C) es necesaria para obtener funciones de transferencia V-V ó I-I que tengan comportamiento dinámico. La utilización sólo de resistencias y condensadores (o sólo resistencias y bobinas) no permite la obtención de funciones de transferencia con polos complejos. Los polos complejos (factores de calidad altos) son necesarios para obtener buenas características de filtrado (rápidas transiciones de magnitud). La utilización de sólo bobinas y condensadores no permite obtener polos fuera del eje imaginario, por lo que sería imposible realizar

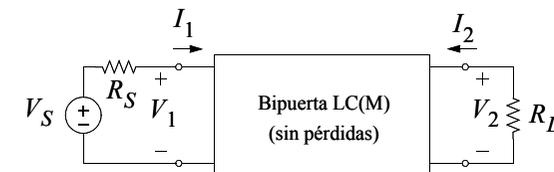
1. Todos ellos con valores positivos. Esto suele estar asumido, pero por si acaso.

funciones de transferencia asintóticamente estables. Por estos motivos, los filtros pasivos deben emplear (salvo casos particulares muy simples) simultáneamente elementos R, L y C.

La utilización de “resistencias” viene además impuesta en cierta manera por la impedancia resistiva (o parcialmente resistiva) que presentan la mayoría de las “fuentes de señal” o generadores (por ejemplo un micrófono, una antena, o una línea de transmisión) y de las impedancias de entrada de algunos elementos de carga o “actuadores” (por ejemplo un altavoz, una antena o una línea de transmisión). Estos elementos (fuente de excitación con su impedancia de salida, y elemento de carga con su impedancia de entrada<sup>2</sup>) son parte del circuito en todos los casos, y por tanto, existirán componentes resistivas en el mismo.

Durante el desarrollo de las técnicas de implementación es frecuente también, por motivos que comentaremos a continuación, limitar la “utilización” de elementos resistivos a estos puntos: resistencias de salida del generador, y resistencia de carga, de manera que el filtro RLC está constituido, como se muestra en la Fig. 4.1, por un generador con resistencia de salida, una **bipuerta LC** (que contiene únicamente bobinas y condensadores, y quizás algún transformador) y una resistencia de carga.

La razón por la que se consideran las resistencias de fuente y de carga, ya se ha dicho: porque normalmente “están ahí” en los casos reales.



**Figura 4.1: Filtro pasivo RLC basado en una bipuerta LC(M) doblemente terminada.**

2. En esta asignatura nos limitaremos al estudio de filtros LC doblemente terminados: es decir, con resistencia de fuente y de carga.

Las razones por las que (idealmente) la bipuerta contiene únicamente elementos reactivos son varias. En primer lugar, la ausencia de elementos resistivos (aparte de los inevitables parásitos) hace que no se disipe ninguna potencia dentro de la bipuerta. Esto es extremadamente importante en filtros pasivos, en los que no hay amplificación (desde el punto de vista energético), y en los que frecuentemente se trabaja con señales de muy poca potencia (p.e. recepción de radiotransmisiones). Además, los elementos reactivos no introducen ruido electrónico (las resistencias y los elementos activos sí), aunque este factor es poco significativo en general. Estos dos factores (la conservación de la energía de las señales, y el no añadir energía a la “señal” de ruido, ambas circunstancias circunscritas al interior de la bipuerta) favorecen la consecución de mayores relaciones de potencia señal-ruido, algo deseable siempre.

Una segunda razón, quizás más importante que la anterior, es que, al no haber disipación de potencia dentro de la bipuerta, bajo ciertas circunstancias en las que se produzca una transmisión de potencia máxima (cero de reflexión: reflexión de potencia nula en la puerta de entrada), se tiene la certeza de que la magnitud de la función de transferencia tiene un máximo con respecto a cualquier parámetro del filtro (sencillamente porque es imposible que se produzca mayor paso de potencia), lo que significa que la sensibilidad (uniparamétrica de primer orden) será nula con respecto al valor de cualquiera de los elementos de la bipuerta o de las resistencias terminales. Aunque, como es obvio, esto no signifique realmente que la sensibilidad sea nula con respecto a los valores de los elementos (la sensibilidad real es multiparamétrica y de orden superior ya que la magnitud dependerá normalmente de todos los elementos y de forma no lineal), sí significa en general que la sensibilidad es muy baja entorno a los ceros de reflexión, situados en la banda pasante, en la que el rizado suele ser pequeño, y donde más importante suelen ser las variaciones. De todo esto resulta que los filtros RLC diseñados

siguiendo los procedimientos adecuados tienen unas magníficas características de sensibilidad.

Aunque la abrumadora mayoría de los filtros empleados actualmente no son filtros pasivos<sup>3</sup>, el estudio de éstos es esencial por los siguientes motivos.

En primer lugar porque estos filtros siguen siendo utilizados en algunos contextos en los que la utilización de filtros activos es inviable o muy difícil. En general estos contextos están relacionados con señales de alta frecuencia y/o baja potencia, situaciones en las que las limitaciones frecuenciales de los elementos activos comunes y/o la menor relación señal-ruido derivada de la utilización de los mismos resultaría en peores prestaciones y/o mayor coste.

En segundo lugar, porque una elevadísima proporción de los filtros activos empleados actualmente, sobre todo aquellos de un orden relativamente alto (digamos que de orden 6 o superior), se realizan siguiendo técnicas de emulación activa de **escaleras** pasivas RLC, de manera que se aprovechen de alguna manera las excelentes características de sensibilidad de estos filtros pasivos. Aunque las emulaciones activas no tendrán necesariamente un máximo de magnitud en los ceros de reflexión, sí tendrán en general sensibilidad de primer orden nula.

Por tanto, el diseño de filtros (tanto activos como pasivos) **requiere** un buen conocimiento de las técnicas de diseño de filtros pasivos RLC.

Una razón adicional, si se quiere de poco peso desde el punto de vista de aplicación pero de gran calado desde un punto de vista pedagógico y práctico es que el asentamiento de conceptos que resulta del estudio de los filtros pasivos facilita enormemente el aprendizaje de las técnicas de diseño de filtros activos.

Antes de entrar en materia, conviene hacer algunas aclaraciones sobre los términos o expresiones empleados habitualmente para referirse a los fil-

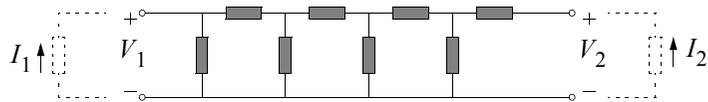
3. Las razones por las que los filtros activos han sustituido gradualmente a los filtros pasivos en la mayoría de los contextos las dejaremos para un tema posterior.

tros pasivos, las suposiciones que normalmente estén inherentes, y sus significados.

Ya hemos dicho que por filtros pasivos (LTI) suele entenderse un filtro que emplea elementos RLC (todos<sup>4</sup> ellos, no un subconjunto) y quizás algún transformador. Que además las resistencias se emplean sólo como elementos terminales (resistencia de fuente y de carga) de una bipuerta LC que por tanto contiene sólo bobinas y condensadores (y quizás algún transformador) como refleja la Fig. 4.1.

Habitualmente, según el contexto, y sobre todo cuando se está pensando en filtros orientados a satisfacer especificaciones de magnitud<sup>5</sup> (porque la respuesta de fase no es importante o porque se deja para un ajuste posterior mediante ecualizadores de fase), es habitual también asumir que la estructura interna de la bipuerta LC es la de una “escalera”, como muestra la Fig. 4.2. En estos contextos es frecuente por tanto utilizar como sinónimos “filtro pasivo”, “filtro RLC”, “filtro LC doblemente terminado”, y también, y esta es la novedad, “filtro escalera LC (doblemente terminado)”<sup>6</sup>.

Se ha querido remarcar esto porque el que la bipuerta LC tenga o no estructura de escalera tiene implicaciones importantes. En particular, si la estructura es de escalera, como se verá, los ceros de transmisión no pueden



**Figura 4.2: Estructura general de una bipuerta (LC) en escalera.**

4. Dejemos a un lado el caso simple de un filtro de primer orden, o los casos poco habituales de filtros con todos sus polos reales.
5. Sería más exacto decir especificaciones de magnitud con todos sus ceros de transmisión en el eje imaginario, pero esto también suele estar “asumido” al menos en el contexto de utilización de aproximaciones clásicas de magnitud.
6. El hecho de que las aproximaciones clásicas tengan todos sus ceros de transmisión y de reflexión en el eje imaginario, y la propia ecuación de Feldtkeller y la introducción de la función característica, tienen una relación directa con la “pretensión implícita” de utilizar circuitos escalera LC para realizar las funciones.

estar en otro sitio que en el eje imaginario. Esto no es un problema para las aproximaciones (clásicas) de magnitud, pero sí impide la realización de cualquier otro tipo de filtro con ceros de transmisión con parte real, entre ellos la de cualquier función pasa-todo (ecualizadores de fase). Puede por tanto interpretarse (si se asume que la estructura interna de la bipuerta siempre es de escalera) que los filtros pasivos no pueden utilizarse para realizar funciones pasa-todo. Como se verá en la última pregunta del tema, la utilización de bipuertas LC (con estructura diferente a la de escalera) permite realizar cualquier función pasa-todo, y por tanto cualquier ecualizador de fase, y además con unas características de impedancia de entrada que permiten concatenarlas directamente con los filtros escalera empleados para “moldear” la magnitud de las señales.

Ahora, entrando ya en materia, y teniendo ya en mente el objetivo de desarrollar técnicas que permitan dar el paso desde una función de transferencia a un circuito LC doblemente terminado que presente dicha función de transferencia, diremos que será necesario realizar, entre otros, los siguientes pasos fundamentales:

a) obtener, a partir de la función de transferencia, y tras elegir unos valores de resistencias terminales<sup>7</sup>, una descripción funcional de la bipuerta LC que necesitamos, normalmente en forma de parámetros de impedancia y/o admitancia.

b) a partir de la descripción funcional de la bipuerta, y tras comprobar que dichas especificaciones son realizables, obtener la descripción a nivel eléctrico de la misma: su topología y los valores de los elementos.

La realización del segundo paso es un proceso relativamente complejo, que se fundamenta en las técnicas de realización de inmitancias<sup>8</sup> LC. Por

7. Éstos pueden venir impuestos por el contexto de aplicación del filtro. Si se pretende no usar transformadores, también puede haber ciertas restricciones a los valores de las resistencias terminales (en particular a la relación entre ambas) dependiendo de la función de transferencia (de la aproximación matemática y del orden).

este motivo, comenzaremos por lo fácil, dedicándonos a las condiciones de realizabilidad y técnicas de realización de inmitancias.

## 4.2 Monopuertas

Independientemente de que la inmitancia esté siendo medida “en un circuito más complejo”, normalmente en nuestro caso “una bipuerta”, desde el punto de vista de la medición de la inmitancia el circuito es siempre una monopuerta<sup>9</sup>. Naturalmente habrá que especificar los terminales del circuito entre los que se “realiza la medición”, y también (y esto es frecuente olvidarlo) las condiciones en las que ésta se realiza en lo referente a las condiciones de carga de “las otras puertas”<sup>10</sup>.

### 4.2.1 Caracterización de monopuertas

Las monopuertas se caracterizan por su inmitancia, es decir, por su impedancia o su admitancia, normalmente expresadas (en nuestro contexto) como una función racional de la variable compleja, o como un conjunto de ceros y polos de la misma (incluyendo en estos conjuntos los eventuales ceros y polos en infinito) y alguna información que permita establecer la constante multiplicativa de la función racional.

Nótese que la caracterización de una monopuerta por su impedancia o por su admitancia es equivalente, pues son funciones inversas. Cualquier monopuerta que sea realizable (y por tanto cualquiera que exista físicamente) presentará simultáneamente impedancia y admitancia, lo que quiere decir que la realizabilidad de una y otra están necesariamente unidas. Si

8. Inmitancia: función de punto, es decir, impedancia ó admitancia de una monopuerta.
9. Los circuitos no “son” monopuertas, bipuertas, etc, sino que “son interpretados” por “el observador” como una cosa u otra según las circunstancias.
10. Si cambiamos las condiciones de carga de alguna puerta, estamos cambiando “el circuito”, y por tanto cambia en general la inmitancia medida.

cierta impedancia es realizable, la admitancia asociada también lo será, y viceversa. Por tanto, (en monopuertas) las condiciones que puedan establecerse para los polos y para los ceros de las funciones de inmitancias deben ser indistinguibles, ya que los polos de una son los ceros de la otra y viceversa.

### 4.2.2 Realizabilidad

Por “realizabilidad” entendemos la “posibilidad de realizar”. Evidentemente, esto se aplica a la consideración de si es o no posible realizar circuitos que cumplan ciertas especificaciones. En nuestro caso, si es o no posible realizar circuitos con una cierta inmitancia. Naturalmente, y esto es algo que podría pasarse por alto, la realizabilidad o no de cierta función de inmitancia dependerá de los elementos con los que contemos para realizar el circuito. Por consiguiente, el concepto de realizabilidad debe ir siempre asociado, de forma explícita o asumida, a un conjunto de primitivas eléctricas (tipos de elementos).

En nuestro contexto de circuitos lineales invariantes en el tiempo de parámetros concentrados, y a partir de la forma especial del Teorema de Tellegen (que no es más que el planteamiento matemático del principio de conservación de la energía en el circuito eléctrico), pueden establecerse las siguientes condiciones de realizabilidad. (ver apéndice A.4.1)

#### 4.2.2.1 Realizabilidad RLC<sup>11</sup>

Una función de inmitancia  $F(s)$  es realizable RLC si y sólo si  $F(s)$  es una **función racional-real real-positiva**.<sup>12</sup>

Esto no aporta mucho si no definimos lo que es una función racional real real-positiva.

Una función  $F(s)$  es una función racional real real-positiva si y sólo si:  
a) es una **función racional real**, y además

11. La inclusión o no de transformadores en el conjunto de primitivas eléctricas no altera las condiciones de realizabilidad de monopuertas, por lo que esta sección también podría titularse “Realizabilidad RLCM”.

b) es una **función real positiva**.

Ahora nos vemos obligados a definir lo que es una función racional real y lo que es una función real positiva.

a) Una función  $F(s)$  es una **función racional real** si y sólo si es una función racional con coeficientes reales. Es decir, si y sólo si

$$F(s) = \frac{\sum_{j=0}^m a_j s^j}{\sum_{i=0}^n b_i s^i} \quad \text{con} \quad \begin{cases} a_j \in \mathfrak{R}, \forall j = 0, \dots, m \\ b_i \in \mathfrak{R}, \forall i = 0, \dots, n \end{cases} \quad (4.1)$$

Claramente, esto tiene como consecuencia que para cualquier valor real de la variable, la función es real.

b) Una función  $F(s)$  es una **función real positiva** si y sólo si para cualquier valor de la variable compleja con parte real no-negativa, el valor de la función (evaluada en ese valor de la variable) también tiene parte real no-negativa. Es decir, si y sólo si,

$$\forall s / \operatorname{Re}(s) \geq 0, \operatorname{Re}(F(s)) \geq 0 \quad (4.2)$$

Existe un conjunto alternativo de condiciones necesarias y suficientes para que una función sea real positiva. Es decir, una definición alternativa de función real positiva, que es la siguiente.

b) Una función  $F(s)$  es una **función real positiva** si y sólo si se cumplen las dos condiciones siguientes,

b.1) La evaluación de la función en el eje imaginario resulta en un conjunto de valores contenido en el semiplano derecho cerrado. Es decir,

$$\operatorname{Re}[F(j\omega)] \geq 0 \quad \forall \omega \in \mathfrak{R} \quad (4.3)$$

12. No debe olvidarse el contexto: circuitos LTI de parámetros concentrados, con valores de elementos R, L, y C positivos (circuito pasivo). En el caso de transformadores, el signo de la inductancia mutua M es sólo una cuestión de criterio en la elección de la polaridad de las puertas, por lo que no es importante. Recuérdese también que la inmitancia será siempre una impedancia o una admitancia, y que la realizabilidad de una y otra irán siempre unidas.

b.2) Todos los polos de  $F(s)$  están en el semiplano izquierdo cerrado, y los polos que haya en el eje imaginario son simples y sus residuos asociados son reales y positivos.

Es importante hacer notar que los valores  $s = 0$  y  $s \rightarrow \infty$  también se encuentran en el eje  $j\omega$ , y por tanto también deben cumplir la condición establecida en (4.2), o las establecidas en (4.3) y **b.2**.

Como se ha anticipado en base a razonamientos sobre la “simultaneidad de la impedancia y la admitancia” de cualquier monopuerta realizable, puede demostrarse que si una función  $F(s)$  es una función racional real, real-positiva, y por tanto es realizable-RLC, su inversa  $G(s) = 1/F(s)$  también lo es.

#### 4.2.2.2 Realizabilidad LC<sup>13</sup>

Este es un caso particular de realizabilidad RLC, es decir, las inmitancias realizables-LC son un subconjunto de las inmitancias realizables-RLC. Es de esperar por tanto que las condiciones de realizabilidad LC sean algo más restrictivas que las de realizabilidad RLC. Las siguientes condiciones se derivan también del teorema de Tellegen en su forma especial, utilizando el resultado obtenido para la realizabilidad RLC y considerando que no existe ninguna resistencia. (ver apéndice A.4.1 y apéndice A.4.2)

Una función de inmitancia  $F(s)$  es realizable LC si y sólo si se dan las siguientes condiciones,

a)  $F(s)$  es una **función racional real**, y además

b.1) La evaluación de la función en el eje imaginario resulta en un conjunto de valores contenido en el eje imaginario. Es decir,

$$\operatorname{Re}[F(j\omega)] = 0 \quad \forall \omega \in \mathfrak{R} \quad (4.4)$$

b.2) Todos los polos de  $F(s)$  están en el eje imaginario, son simples y sus residuos asociados son reales y positivos.

13. La inclusión o no de transformadores en el conjunto de primitivas eléctricas no altera las condiciones de realizabilidad de monopuertas, por lo que esta sección también podría titularse “Realizabilidad LCM”.

Como en el caso anterior, es importante hacer notar que los valores  $s = 0$  y  $s \rightarrow \infty$  también se encuentran en el eje  $j\omega$ , y por tanto también deben cumplir las condiciones establecidas<sup>14</sup> en (4.4) y en **b.2**.

Como se ha anticipado en base a razonamientos sobre la “simultaneidad de la impedancia y la admitancia” de cualquier monopuerta realizable, puede demostrarse que si una función  $F(s)$  cumple las condiciones de realizabilidad LC, su inversa  $G(s) = 1/F(s)$  también las cumple.

### 4.2.3 Propiedades de las inmitancias LC

Es fácil demostrar que las inmitancias realizables<sup>15</sup> LC tienen las siguientes propiedades. (ver apéndice A.4.2)

- Los polos y ceros son imaginarios puros y simples. Esto incluye a los polos y ceros en  $s = 0$  y  $s \rightarrow \infty$ .
- Los residuos de los polos son reales y positivos. Esto incluye a los residuos de los polos y ceros en  $s = 0$  y  $s \rightarrow \infty$ .
- Los polos y ceros aparecen por pares complejos conjugados, salvo los polos ó ceros en  $s = 0$  ó  $s \rightarrow \infty$ .
- La inmitancia  $F(s)$  es impar, es decir,  $F(s) = -F(-s)$ .

De las propiedades anteriores pueden derivarse las siguientes.

- La expansión en fracciones simples puede escribirse siempre de la forma siguiente,

$$F(s) = k_{\infty}s + \frac{k_0}{s} + \frac{K_1s}{s^2 + \omega_1^2} + \frac{K_2s}{s^2 + \omega_2^2} + \dots + \frac{K_ns}{s^2 + \omega_n^2} \quad (4.5)$$

donde los coeficientes  $k_{\infty}$ ,  $k_0$ , y  $K_i$  son todos reales y positivos.

- La diferencia de grado entre numerador y denominador es 1 ó -1.
14. Utilizaremos los mismo “nombres” (a, b.1, b.2) para las condiciones de realizabilidad RLC y realizabilidad LC, aunque estas condiciones sean distintas. Por el contexto deberá estar claro a cual nos referimos en cada caso. Por ejemplo, en este caso nos referimos lógicamente a la condición b.2 de realizabilidad LC.
15. Y por tanto, cualquier inmitancia de cualquier monopuerta LC.

- Los polos y los ceros de las inmitancias LC están **entrelazados** en el eje  $j\omega$ .
- Tanto el numerador  $N(s)$  como el denominador  $D(s)$  tienen la forma general:

$$P(s) = s(s^2 + \omega_1^2)(s^2 + \omega_2^2)\dots \quad (4.6)$$

donde el factor  $s$ , que representa una raíz en  $s = 0$ , puede (o no) estar presente. Esto quiere decir que tanto  $N(s)$  como  $D(s)$  serán ó par ó impar (dependiendo de si el factor  $s$  está o no presente).

- Al ser  $F(s)$  impar, o el denominador es par y el denominador impar, o viceversa. Por tanto, las dos opciones son o

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{s(s^2 + \omega_{z_1}^2)(s^2 + \omega_{z_2}^2)\dots}{(s^2 + \omega_{p_1}^2)(s^2 + \omega_{p_2}^2)\dots} \quad (4.7)$$

o bien

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{(s^2 + \omega_{z_1}^2)(s^2 + \omega_{z_2}^2)\dots}{s(s^2 + \omega_{p_1}^2)(s^2 + \omega_{p_2}^2)\dots} \quad (4.8)$$

- Tanto en  $s = 0$  como en  $s \rightarrow \infty$  habrá siempre ó un polo ó un cero.

### 4.2.4 Realizaciones canónicas de inmitancias LC

Las técnicas de realización de inmitancias LC se fundamentan en la asociación de bobinas y condensadores, en serie o en paralelo, de manera que la inmitancia resultante sea la que se persigue. Desde nuestro punto de vista, debemos ver el problema al revés, es decir, cómo descomponer la función de inmitancia para que cada sumando se corresponda fácilmente con una bobina, un condensador, o una asociación simple de bobinas y condensadores.

Para ello, se hace conveniente recordar que en asociaciones en paralelo, la admitancia resultante es la suma de las admitancias, y que en asociaciones

en serie, la impedancia resultante es la suma de las impedancias. Por tanto, una suma de admitancias la podremos realizar como una asociación en paralelo, mientras que una suma de impedancias las podremos implementar como una asociación en serie.

Como es lógico, deberemos intentar realizar la función de inmitancia al menor coste posible, y este coste está directamente relacionado con el número de elementos empleados en la realización. Por tanto, deberemos realizar la inmitancia con el mínimo número de elementos posibles.

Como se verá muy pronto, resulta imposible implementar cualquier inmitancia LC con un número de elementos inferior al orden de la función de inmitancia (es decir, al número de polos contando con los que pudiera haber en infinito). También veremos que resulta posible, y fácil, realizar las inmitancias con un número de elementos igual al número de polos. Por tanto, el mínimo número de elementos necesarios es igual al número de polos. Cualquier realización de una función de inmitancia que emplee este número mínimo de elementos se denomina una realización canónica. Las realizaciones canónicas son por tanto realizaciones de coste mínimo.

Como también se verá pronto, existen circunstancias que nos llevarán en ocasiones a implementar las inmitancias LC empleando un número mayor de elementos del que sería necesario si estas restricciones no existieran. Estas realizaciones de coste no mínimo se denominan realizaciones no canónicas. El incremento de coste suele proporcionar cierta flexibilidad adicional, que suele aprovecharse para satisfacer restricciones impuestas por otras consideraciones ajenas al objetivo de realización de la inmitancia.

En cualquier caso, tanto para abordar las realizaciones canónicas como las no canónicas, es conveniente comenzar analizando las funciones de inmitancias que podemos obtener a partir de bobinas y condensadores y sus asociaciones más simples.

#### 4.2.4.1 Realizaciones elementales

La Fig. 4.3 describe las inmitancias de las asociaciones más simples de elementos L y C, así como las relaciones existentes entre los valores de los elementos por una parte y los residuos y frecuencias de resonancia (en caso de polos internos<sup>16</sup>) por otra.

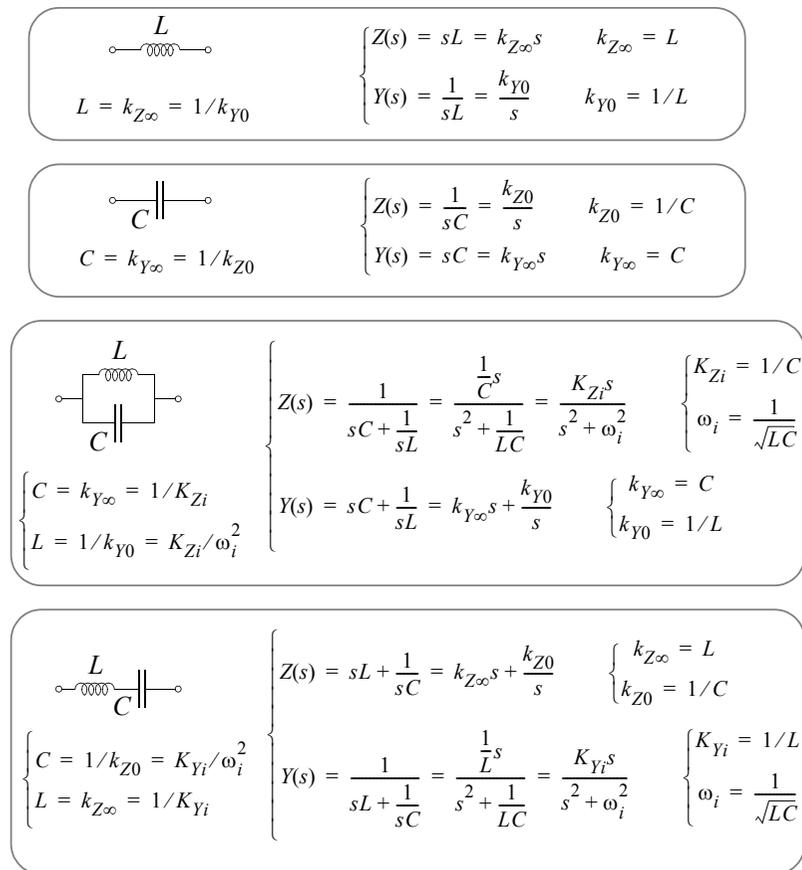
Nótese que una bobina tiene un polo de impedancia en  $s \rightarrow \infty$ , y un polo de admitancia en  $s = 0$ , mientras que un condensador tiene un polo de impedancia en  $s = 0$  y un polo de admitancia en  $s \rightarrow \infty$ . En estos casos simples, los valores de los residuos del polo en  $s \rightarrow \infty$  coinciden con el valor del elemento, mientras el valor del residuo en  $s = 0$  es igual a la inversa del valor del elemento.

En cuanto a las asociaciones serie y paralelo de bobina y condensador, las inmitancias obtenidas como suma de las inmitancias individuales de cada elemento tendrá polos en  $s = 0$  y en  $s \rightarrow \infty$ . Este es el caso de la admitancia equivalente de la asociación en paralelo, y de la impedancia equivalente de la asociación en serie. Las relaciones entre residuos y valores de elementos son las mismas que en el caso de elementos aislados (directa para polos en  $s \rightarrow \infty$ , e inversa para polos en  $s = 0$ ). En cuanto a las inmitancias obtenidas como la inversa de la suma de las inmitancias individuales, resultan tener “un polo<sup>17</sup>” interno a una frecuencia de resonancia  $\omega_i = 1/\sqrt{LC}$  con un “residuo<sup>18</sup>” relacionado con la inversa de uno de los elementos de la asociación. En el caso de la asociación LC en paralelo, la admitancia equivalente es infinita (y la impedancia nula, es decir, se comporta como un corto-circuito) tanto en  $s = 0$  como en  $s \rightarrow \infty$ , mientras que la impedancia es infinita (y la admitancia nula, es decir, se comporta como un circuito abierto) a cierta frecuencia finita  $\omega_i$ . En el caso de la asociación LC en serie, la impedancia equivalente es infinita (y la admitancia nula, es decir, se comporta como un

16. La expresión “polo interno” se usa a veces para referirse a un polo finito y no nulo, en realidad a una pareja de polos imaginarios puros y conjugados.

17. En realidad una pareja de polos imaginarios puros complejos conjugados.

18. Este “residuo”, denotado por una  $K_i$  mayúscula, es en realidad el doble del residuo de cada uno de los polos imaginarios puros.



**Figura 4.3: Impedancias, admitancias, y relaciones entre valores de elementos, “residuos” y frecuencias de resonancia en estructuras LC elementales.**

circuito abierto) tanto en  $s = 0$  como en  $s \rightarrow \infty$ , mientras que la admitancia es infinita (y la impedancia nula, es decir, se comporta como un corto-circuito) a cierta frecuencia finita  $\omega_i$ .

De este análisis resultan de forma directa las técnicas de síntesis de funciones simples de inmitancia cuya forma funcional se corresponda con las mostradas en la Fig. 4.3, es decir, de impedancias o admitancias con “un úni-

co” polo interno, y de impedancias o admitancias con polos en  $s = 0$  y/o en  $s \rightarrow \infty$ , con cualquier valor de residuo (real positivo).

La utilización de las reglas de asociación (suma de impedancias para asociación en serie, suma de admitancias para asociación en paralelo) permitirá realizar funciones de inmitancia con tantos polos como se quiera (es decir, arbitrarias).

La familiarización con las expresiones y estructuras básicas de la Fig. 4.3 es esencial para la comprensión del resto del capítulo, por lo que se recomienda dedicarle el tiempo que sea necesario.

#### 4.2.4.2 Síntesis de Foster

Las técnicas de síntesis de monopuertas LC conocidas como “síntesis de Foster” resultan de forma directa de lo expuesto arriba y de la forma funcional de expansión en “fracciones simples<sup>19</sup>” dada en (4.5), que repetimos aquí por conveniencia,

$$F(s) = k_{\infty}s + \frac{k_0}{s} + \frac{K_1s}{s^2 + \omega_1^2} + \frac{K_2s}{s^2 + \omega_2^2} + \dots + \frac{K_ns}{s^2 + \omega_n^2} \quad (4.9)$$

Conocemos ya la forma de realizar cada una de estas “fracciones simples”, tanto si  $F(s)$  es una impedancia como si es una admitancia<sup>20</sup>. En el primer caso (expansión en fracciones simples de impedancia) se procederá a la asociación en serie de las estructuras necesarias para la realización de cada fracción simple, y en el segundo (expansión en fracciones simples de admitancia), a la asociación en paralelo.

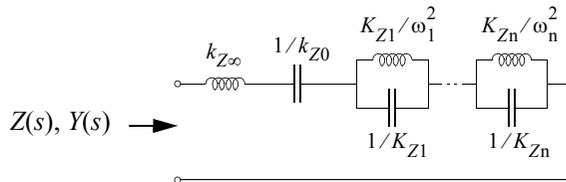
Es frecuente utilizar la expresión “eliminación (completa) de un polo” para referirse a la implementación de cada una de las fracciones simples.

19. Los términos de segundo orden correspondientes a polos internos son en realidad la asociación de las dos fracciones simples asociadas a los dos polos complejos conjugados imaginarios puros.
20. Los valores de los residuos son reales y positivos por las condiciones de realizabilidad. En caso contrario “aparecerían” elementos con valores negativos de  $L$  ó  $C$ .

Esto se fundamenta en que, al ser los polos necesariamente simples, tras la realización de cada fracción simple con la correspondiente estructura de circuito, la “inmitancia restante<sup>21</sup>” ya no tiene ese polo<sup>22</sup>.

La realización basada en la expansión en fracciones simples de impedancia se denomina “Foster-1”, mientras que la que resulta de la expansión en fracciones simples de admitancia se denomina “Foster-2”. Ambas realizaciones son canónicas, como es fácil de comprobar<sup>23</sup>.

La Fig. 4.4 y la Fig. 4.5 muestran las estructuras típicas de las realizaciones Foster-1 y Foster-2, respectivamente. Nótese que, independientemente de cual sea la función de inmitancia “de partida” (la impedancia o la admitancia), en realidad siempre disponemos de ambas funciones mediante una simple inversión, por lo que cualquier inmitancia puede ser realizada mediante cualquiera de las dos alternativas.



**Figura 4.4: Estructura típica y valores de elementos de la realización Foster-1 de una inmitancia LC. Los residuos y frecuencias de polo son de impedancia.**

21. La que falta por implementar, es decir la correspondiente a la suma de las fracciones simples que aún no han sido realizadas.
22. Esto se debe a que la eliminación del polo ha sido *completa*, es decir, se ha utilizado *todo* el residuo del polo. Más adelante veremos que también es posible realizar eliminaciones *parciales*, aunque éstas llevan a realizaciones no canónicas.
23. Es fácil demostrar que en la expansión parcial en fracciones de  $F(s)$ , el término correspondiente al polo en  $s \rightarrow \infty$  disminuye el orden de la inmitancia restante en 1, y se necesita un único elemento para implementar ese término. Lo mismo ocurre con el término correspondiente al polo en  $s=0$ . Para cada uno de los términos restantes, correspondientes a pares de polos en el eje imaginario, se necesitan dos elementos para implementarlos, y el orden de la inmitancia restante se ve reducido en 2.

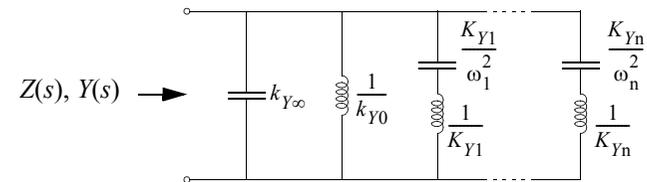
#### 4.2.4.3 Síntesis de Cauer

Como se ha visto, las síntesis de foster resultan de la eliminación consecutiva de polos de la inmitancia a sintetizar, siempre “del mismo tipo”, es decir, eliminación consecutiva de polos de impedancia (todos de impedancia, Foster-1) o de admitancia (todos de admitancia, Foster-2).

En realidad, nada obliga a mantener invariante el “tipo” de polo de inmitancia que se elimina en pasos consecutivos. Es decir, tras la eliminación de un polo de inmitancia, la inmitancia restante puede (o no) ser invertida antes de realizar la siguiente eliminación.

En cualquier caso, siempre será necesario mantener la coherencia entre el “tipo de polo” eliminado y el “tipo de rama” empleado: la eliminación de un polo de admitancia se corresponderá siempre con una “rama paralelo” (pues la rama que implementa el polo debe estar en paralelo con la admitancia restante), y la de un polo de impedancia se corresponderá siempre con una “rama serie” (pues la rama que implementa el polo debe estar en serie con la impedancia restante)<sup>24</sup>.

Por tanto, existe un gran número de alternativas (cuando el orden es moderado o alto) de realización canónica, pues en cada paso de eliminación



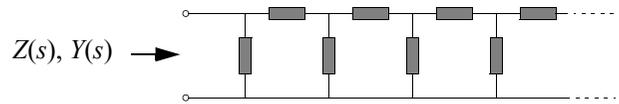
**Figura 4.5: Estructura típica y valores de elementos de la realización Foster-2 de una inmitancia LC. Los residuos y frecuencias de polo son de admitancia.**

24. Es frecuente que surja confusión entorno a estos conceptos debido a que, cuando se trata de polos internos, las “ramas paralelo” están constituidas por una asociación LC en serie, y las “ramas serie” por una asociación LC en paralelo. Debe tenerse claro que los calificativos paralelo o serie, aplicados a las ramas, se refieren a la forma en que las ramas están conectadas con la inmitancia restante, y no a la estructura interna de las ramas.

se presenta una elección entre varias posibilidades<sup>25</sup>. Las realizaciones de Foster son dos casos particulares en las que siempre nos decantamos por el mismo tipo de polo.

Existe también un subconjunto de casos particulares en el que se elige sistemáticamente, en cada eliminación, un tipo de polo “contrario” al eliminado previamente. Es decir, se alterna la eliminación de polos de impedancia y admitancia. La Fig. 4.6 muestra la estructura resultante, en la que alternan ramas serie y ramas paralelo. Estas realizaciones se conocen, por motivos evidentes, como realizaciones *en escalera*. Nótese que en general existirán varias realizaciones en escalera diferentes para cada inmitancia<sup>26</sup>. Las realizaciones en escalera serán canónicas o no en la misma medida que cualquier otra alternativa<sup>27</sup>.

Nótese también que las inmitancias LC tienen siempre un polo o un cero tanto en  $s = 0$  como en  $s \rightarrow \infty$ . Esto quiere decir que, considerando la posibilidad de comenzar la realización por un polo de impedancia o por uno de admitancia, “cualquier inmitancia LC” (en realidad ella o su inversa) tiene siempre un polo en  $s = 0$  y también en  $s \rightarrow \infty$ . Nótese también que, una



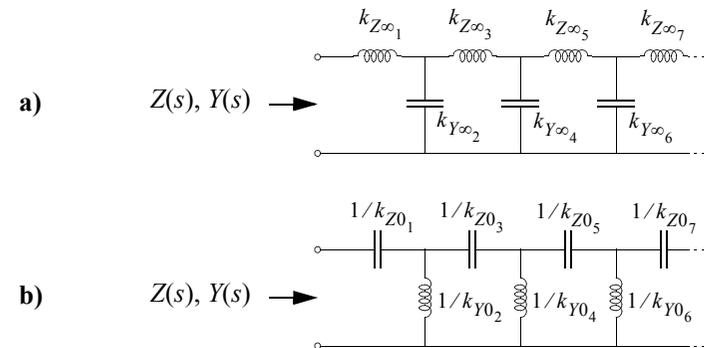
**Figura 4.6: Estructura general de una realización en escalera de una inmitancia LC. Cada rama tendrá la forma de alguno de los bloques elementales de la Fig. 4.3.**

- 25. Hay que elegir entre polo de impedancia o de admitancia, y entre los polos de impedancia o admitancia disponibles.
- 26. Aunque se haya establecido que se van a alternar los polos de impedancia y admitancia, no se ha establecido si empezamos con uno u otro tipo, ni tampoco cual de entre los polos disponibles se elimina en cada paso.
- 27. Es decir, serán canónicas si todas las eliminaciones de polos son eliminaciones “totales”, y por consiguiente reducen el orden de la inmitancia restante (con respecto a la previa) en un número igual al número de elementos empleados en la eliminación del polo.

vez eliminado uno de estos polos (en  $s = 0$  ó en  $s \rightarrow \infty$ ), la inmitancia restante no tendrá ya ese polo<sup>28</sup>, y por lo tanto sí tendrá un cero en esa “frecuencia” (ya que debe tener una de las dos cosas por condiciones de realizabilidad), lo que quiere decir que si invertimos la inmitancia restante (siguiendo el procedimiento de síntesis en escalera), la nueva inmitancia volverá a tener un polo a la misma frecuencia.

Las síntesis de Cauer son dos casos particulares de síntesis en escalera consistentes en la eliminación (completa) consecutivamente de polos siempre en  $s \rightarrow \infty$  (síntesis Cauer-1) ó siempre en  $s = 0$  (síntesis Cauer-2). Los circuitos resultantes son canónicos, y tienen la estructura mostrada en la Fig. 4.7. Cualquiera de las dos alternativas es siempre posible, según se desprende de la discusión hecha en el párrafo anterior. El primer elemento será un “elemento serie” o un “elemento paralelo” dependiendo de que la inmitancia de partida tenga o no un polo en  $s = 0$  ó en  $s \rightarrow \infty$ , según el caso.

Para órdenes pequeños ( $n \leq 3$ ), los circuitos resultantes de las síntesis de Foster y Cauer coinciden<sup>29</sup>.



**Figura 4.7: Realizaciones de Cauer de una inmitancia LC: a) Cauer-1, b) Cauer-2.**

- 28. Se asumen eliminaciones completas en estos los casos.
- 29. No necesariamente Foster-1 con Cauer-1 y Foster-2 con Cauer-2.

### 4.2.5 Realizaciones no canónicas: eliminaciones parciales

En los apartados anteriores se ha utilizado varias veces la expresión “eliminación (completa) de un polo”. La palabra “completa”, que suele asumirse salvo que se indique lo contrario, responde a que en la estructura de circuito empleada para realizar la fracción simple correspondiente al polo eliminado, el cálculo de los elementos se realiza utilizando el valor (completo) del residuo, lo que resulta, lógicamente, en que la inmitancia restante ya no tendrá polo<sup>30</sup> en esa “frecuencia”. Esto es fácil de comprobar a partir de la expansión en fracciones simples de la inmitancia, dada en (4.9).

Independientemente de cual sea el polo eliminado, y de si éste es eliminado *total* o *parcialmente*, la inmitancia restante se obtiene de restar la inmitancia del circuito que realiza la fracción simple a la inmitancia previa a la eliminación. Es fácil observar que si el circuito empleado para la eliminación del polo ha sido calculado<sup>31</sup> utilizando el valor “completo” del residuo, la fracción simple ya no aparecerá en la inmitancia restante.

En realidad, esta eliminación “completa” es un caso particular, un caso extremo, de lo que podemos hacer en general. Es decir, nada impide realizar la eliminación calculando los valores de los elementos con un valor de “residuo” menor que el residuo real de la inmitancia en ese polo. De esta manera, aparecerá una estructura de circuito con una topología idéntica a la resultante de la eliminación total, con la misma frecuencia de resonancia, pero con valores de elementos distintos. También, la inmitancia restante tendrá todavía un polo en esa frecuencia, con un residuo igual a la diferencia entre el valor inicial del residuo en la inmitancia previa, y el valor empleado en el cálculo del circuito empleado para la “eliminación (parcial)”. Estas eliminaciones se conocen como “parciales” porque en realidad sólo elimi-

30. Es decir, el residuo de la inmitancia restante en esa frecuencia es nulo. Tener residuo nulo es equivalente a no tener polo en la “frecuencia” considerada.

31. Esto quiere decir que “el(los) valor(es) de los elemento(s) han sido calculado(s)”, ya que la topología en sí del circuito empleado en la eliminación no depende de en que medida se realice la eliminación.

nan parte (del valor del residuo) del polo. Las eliminaciones completas pueden considerarse como un caso extremo del caso general de eliminación parcial.

Lógicamente, las eliminaciones parciales suponen un incremento de coste, ya que se emplean algunos elementos (uno si el polo es en  $s = 0$  ó en  $s \rightarrow \infty$ , dos si “el polo” es interno) sin conseguir reducir el orden de la inmitancia restante (ya que ésta sigue teniendo un polo en la frecuencia en cuestión). Por consiguiente, cualquier realización en la que se emplee alguna eliminación parcial, será no canónica.

El valor de “residuo” empleado en el cálculo del circuito que realiza la eliminación parcial puede tomar cualquier valor dentro de un determinado rango. Por una parte, no podremos usar un valor negativo, ya que esto resultaría en valores de elementos L y/ó C negativos. Por tanto, el límite inferior es cero. Por otra parte, debe recordarse que el valor del residuo de la inmitancia restante en esa frecuencia de polo vendrá dado por la diferencia del valor inicial del residuo (en la inmitancia previa a la eliminación) y el valor empleado en la eliminación parcial. Esto quiere decir que, si en la eliminación parcial empleamos un valor de residuo superior al de la inmitancia previa, la inmitancia restante tendrá un valor de residuo negativo, y por tanto no podrá ser realizada (no será realizable). Es lo que se conoce como “pasarse de residuo” en la eliminación parcial, y evidentemente es algo que debe evitarse. Por tanto, el límite superior del valor de “residuo” empleado en la eliminación parcial es el valor del residuo en la inmitancia previa. Los valores extremos corresponden a “no realizar eliminación” (valor cero), o a realizarla completamente (valor igual al residuo completo). Cualquier caso intermedio es una eliminación parcial.

Es evidente que, salvo que existan imposiciones adicionales a la simple realización de la inmitancia, las eliminaciones parciales deben ser evitadas por lo que representan de incremento de coste.

Cuando existen restricciones adicionales<sup>32</sup> (a la realización de la inmitancia), la realización de eliminaciones parciales resulta en grados de flexibilidad adicional que pueden ser aprovechados convenientemente.

Las “restricciones adicionales” suelen estar dadas en la forma de exigir una posición concreta para un cero o un polo de la inmitancia restante o de alguna inmitancia restante en el proceso posterior de síntesis. Por este motivo, es conveniente dedicar alguna atención a los efectos que las eliminaciones (parciales o totales) tienen en la posición de los ceros y polos de la inmitancia restante. La mejor forma de ver esto es mediante el uso de los llamados “diagramas polo-cero”.

#### 4.2.6 Diagramas polo-cero: efecto de las eliminaciones

La mejor forma de explicar los efectos que la eliminación parcial o total de polos tiene en la posición de polos y ceros es mediante un ejemplo. Supongamos por tanto una inmitancia  $F(s)$  con un cero en  $s = 0$ , un polo en  $s \rightarrow \infty$ , y dos polos internos en  $s = \pm j\omega_1$  y  $s = \pm j\omega_3$ . Naturalmente, deberán existir también ceros en otras “frecuencias”  $s = \pm j\omega_2$  y  $s = \pm j\omega_4$ , intercaladas con las frecuencias de los polos para que se cumplan las condiciones de realizabilidad.

Como para cualquier inmitancia LC,  $F(j\omega)$  será imaginaria pura,

$$F(j\omega) = j \cdot f(\omega) \quad (4.10)$$

A  $f(\omega)$  se le llama reactancia (si  $F(s)$  es una impedancia) o susceptancia (si  $F(s)$  es una admitancia). En cualquier caso,  $f(\omega)$  es una función racional de  $\omega$ , que describe unívocamente<sup>33</sup> a  $F(s)$ . En el asunto que nos ocupa, y en general en los diagramas polo-cero, es más sencillo trabajar con  $f(\omega)$  que con  $F(s)$ , y no supone ninguna pérdida de generalidad.

32. Esto será muy frecuente en la síntesis de bipuertas LC, por lo que es conveniente dedicarle a este asunto el tiempo que sea necesario para comprenderlo en profundidad.

33. En general no hay una descripción unívoca. En el caso de inmitancias LC(M) sí es así por estar todos los polos y ceros en el eje imaginario.

Las Fig. 4.8a, Fig. 4.8b, y Fig. 4.8c muestran los efectos de la eliminación parcial o total de polos de  $f(\omega)$  en  $\omega \rightarrow \infty$ , en  $\omega = 0$ , y en  $\omega = \pm\omega_i$  respectivamente. Esto es equivalente a la eliminación total o parcial de polos de  $F(s)$  en  $s \rightarrow \infty$ , en  $s = 0$ , y en  $s = \pm j\omega_i$ .

Puesto que  $F(s)$  tiene un polo en  $s \rightarrow \infty$ , tendremos,

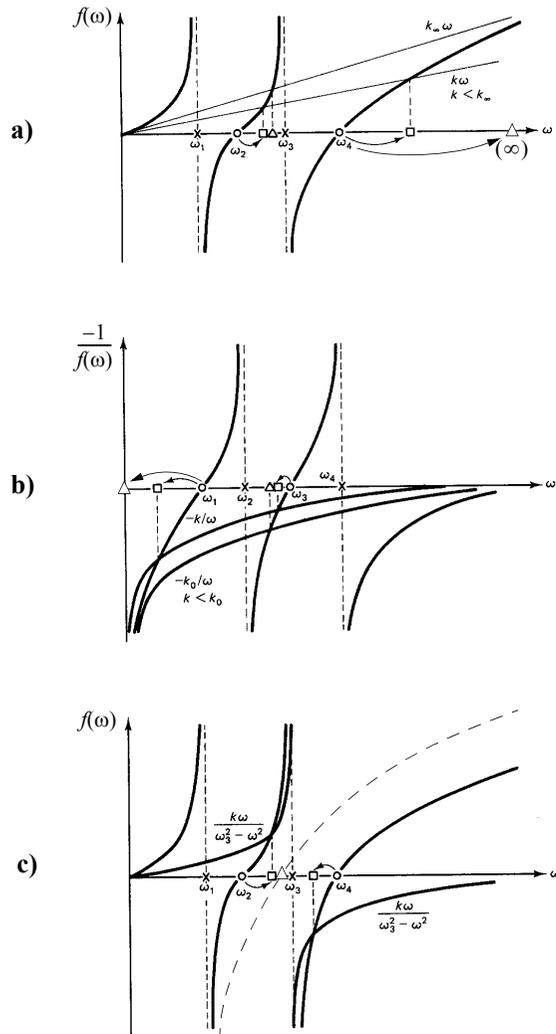
$$\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = sk_\infty \quad (4.11)$$

es decir, que el residuo  $k_\infty$  es la pendiente de la asíntota, como se muestra en la Fig. 4.8a. Si se elimina total o parcialmente el polo en infinito, tendremos una nueva inmitancia dada por

$$F_1(s) = F(s) - ks \quad \text{ó} \quad f_1(\omega) = f(\omega) - k\omega \quad (4.12)$$

donde  $k \leq k_\infty$  es el residuo del polo en infinito del circuito utilizado para la eliminación. La nueva inmitancia es el resultado de restar la recta de pendiente  $k$  a la inmitancia previa. La Fig. 4.8a muestra los desplazamientos que ocurren en las posiciones de los ceros (marcadas con un círculo en su valor inicial) en dos casos concretos, uno con  $k < k_\infty$  (nuevas posiciones de los ceros marcadas con un cuadrado) y otro en el que  $k = k_\infty$  (nuevas posiciones de los ceros marcadas con un triángulo). Nótese que los ceros se desplazan hacia infinito (la posición del polo parcial o totalmente eliminado), y que el desplazamiento de cada cero es mayor cuanto mayor es el valor de  $k$ , es decir, cuanto “más residuo eliminemos”. Nótese también que en general se desplazarán más los ceros más cercanos a infinito (al polo eliminado), y que ningún cero llega a cruzarse con un polo en su desplazamiento. En el caso extremo de eliminación total, el desplazamiento de cada cero es máximo, y el cero más cercano al polo eliminado ( $\omega_4$ ) se sitúa en infinito<sup>34</sup> (es decir, en la posición del polo que ha sido eliminado totalmente). Esto no

34. Lo que ocurre en la realidad es que los dos ceros simétricos en  $\omega_4$  y  $-\omega_4$  se desplazan hacia  $\infty$  y  $-\infty$  respectivamente. En  $\infty$  hay un sólo polo, por lo que la superposición (en la eliminación total) de los dos ceros con un sólo polo resulta en la cancelación de un cero con el polo y en la permanencia del otro cero en la posición del polo eliminado totalmente.



**Figura 4.8:** Funciones de reactancia/susceptancia para ilustrar la eliminación parcial y total de polos en: (a) infinito, (b) cero, (c) interno.

se muestra en el diagrama por razones obvias. Es evidente que tras la eliminación total del polo en  $\omega \rightarrow \infty$ , la inmitancia restante ya no tiene polo en esa frecuencia (de hecho tiene un cero, como hemos visto).

Nótese también que, independientemente de cuanto residuo eliminemos, ni los polos ni el cero en  $\omega = 0$  se desplazan.

Con objeto de observar ahora los efectos que produce la eliminación parcial o total de un polo en  $\omega = 0$ , consideremos ahora la inmitancia inversa  $G(s) = 1/F(s)$ . Evidentemente, también será una inmitancia realizable, con ceros donde  $F(s)$  tenía polos y polos donde  $F(s)$  tenía ceros. Además, su reactancia o susceptancia se relacionará con  $f(\omega)$  de la siguiente manera,

$$G(j\omega) = \frac{1}{F(j\omega)} = \frac{1}{j \cdot f(\omega)} = j \cdot \frac{-1}{f(\omega)} = j \cdot g(\omega) \quad (4.13)$$

es decir,

$$g(\omega) = \frac{-1}{f(\omega)} \quad (4.14)$$

que es lo mostrado en la Fig. 4.8b. Como era de esperar, existen polos en  $\omega = 0$ ,  $\omega = \pm\omega_2$  y  $\omega = \pm\omega_4$ , y ceros en  $\omega = \pm\omega_1$ ,  $\omega = \pm\omega_3$  y  $\omega \rightarrow \infty$ .

Puesto que  $G(s)$  tiene un polo en  $s = 0$ , tendremos,

$$\lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \frac{k_0}{s} \quad (4.15)$$

es decir, que el residuo  $k_0$  es la constante de la hipérbola, como se muestra en la Fig. 4.8b. Si se elimina total o parcialmente el polo en cero, tendremos una nueva inmitancia dada por

$$G_1(s) = G(s) - \frac{k}{s} \quad \text{ó} \quad g_1(\omega) = g(\omega) - \left(-\frac{k}{\omega}\right) \quad (4.16)$$

donde  $k \leq k_0$  es el residuo del polo en cero del circuito utilizado para la eliminación. La nueva inmitancia es el resultado de restar la hipérbola de constante  $k$  a la inmitancia previa. La Fig. 4.8b muestra los desplazamientos que

ocurren en las posiciones de los ceros (marcadas con un círculo en su valor inicial) en dos casos concretos, uno con  $k < k_0$  (nuevas posiciones de los ceros marcadas con un cuadrado) y otro en el que  $k = k_0$  (nuevas posiciones de los ceros marcadas con un triángulo). Nótese que los ceros se desplazan hacia cero (la posición del polo parcial o totalmente eliminado), y que el desplazamiento de cada cero es mayor cuanto mayor es el valor de  $k$ , es decir, cuanto “más residuo eliminemos”. Nótese también que en general se desplazarán más los ceros más cercanos a cero (al polo eliminado), y que ningún cero llega a cruzarse con un polo en su desplazamiento. En el caso extremo de eliminación total, el desplazamiento de cada cero es máximo, y el cero más cercano al polo eliminado ( $\omega_1$ ) se sitúa en cero<sup>35</sup> (es decir, en la posición del polo que ha sido eliminado totalmente). Es evidente que tras la eliminación total del polo en  $\omega = 0$ , la inmitancia restante ya no tiene polo en esa frecuencia (de hecho tiene un cero, como hemos visto).

Nótese también que, independientemente de cuanto residuo eliminemos, ni los polos ni el cero en  $\omega \rightarrow \infty$  se desplazan.

Para observar el efecto de la eliminación total o parcial de un polo interno ( $s = \pm j\omega_i$ ), vamos a recurrir de nuevo a  $F(s)$ . En concreto<sup>36</sup> vamos a fijarnos en el polo en  $\omega = \pm\omega_3$ . Tendremos,

$$\lim_{\substack{s^2 \rightarrow -\omega_3^2 \\ (s \rightarrow \pm j\omega_3)}} F(s) = \frac{K_3 s}{s^2 + \omega_3^2} \quad (4.17)$$

es decir, que el residuo  $K_3$  es la constante de la fracción simple correspondiente al polo interno<sup>37</sup>, como se muestra en la Fig. 4.8c. Si se elimina total o parcialmente este polo, tendremos una nueva inmitancia dada por

35. Lo que ocurre en la realidad es que los dos ceros simétricos en  $\omega_1$  y  $-\omega_1$  se desplazan hacia 0 por la derecha y por la izquierda, respectivamente. En 0 hay un sólo polo, por lo que la superposición (en la eliminación total) de los dos ceros con un sólo polo resulta en la cancelación de un cero con el polo y en la permanencia del otro cero en la posición del polo eliminado totalmente.
36. La discusión sería idéntica para cualquier otro polo interno de  $F(s)$  ó  $G(s)$ .

$$F_1(s) = F(s) - \frac{Ks}{s^2 + \omega_3^2} \quad \text{ó} \quad f_1(\omega) = f(\omega) - \frac{K\omega}{\omega_3^2 - \omega^2} \quad (4.18)$$

donde  $K \leq K_3$  es el residuo del polo en  $s = \pm j\omega_3$  del circuito utilizado para la eliminación. La nueva inmitancia es el resultado de restar la fracción simple con constante  $K$  a la inmitancia previa. La Fig. 4.8c muestra los desplazamientos que ocurren en las posiciones de los ceros (marcadas con un círculo en su valor inicial) en dos casos concretos, uno con  $K < K_3$  (nuevas posiciones de los ceros marcadas con un cuadrado) y otro en el que  $K = K_3$  (nuevas posiciones de los ceros marcadas con un triángulo). Nótese que los ceros se desplazan hacia  $\omega_3$  (la posición del polo parcial o totalmente eliminado), y que el desplazamiento de cada cero es mayor cuanto mayor es el valor de  $K$ , es decir, cuanto “más residuo eliminemos”. Nótese también que en general se desplazarán más los ceros más cercanos al polo eliminado, y que ningún cero llega a cruzarse con un polo en su desplazamiento. En el caso extremo de eliminación total, el desplazamiento de cada cero es máximo, y uno de los dos ceros más cercanos al polo eliminado “desaparece”, quedando el otro “en las cercanías” del polo eliminado totalmente<sup>38</sup>. Es evidente que tras la eliminación total del polo en  $\omega = \omega_3$ , la inmitancia restante ya no tiene polo en esa frecuencia. Tampoco tendrá un cero (en general).

Nótese también que, independientemente de cuanto residuo eliminemos, ni los polos ni el cero en  $\omega = 0$  se desplazan. Tampoco se desplazaría un cero que hubiese en  $\omega \rightarrow \infty$ .

En resumen, el efecto de la eliminación parcial o total de un polo es el siguiente:

37. Es frecuente abreviar en el uso del lenguaje en estos términos, pero debe tenerse claro que en realidad no estamos hablando de un polo, sino de una pareja de polos en  $s = \pm j\omega_3$ , que  $K_3$  no es un residuo, sino el doble del residuo de  $F(s)$  en  $s = \pm j\omega_3$ , y que la función  $K_3 s / (s^2 + \omega_3^2)$  no es una fracción simple sino el resultado de agrupar las fracciones correspondientes a los dos polos conjugados.

- Los ceros **internos** de inmitancia se mueven hacia la localización del polo eliminado total o parcialmente.
- Ningún polo ni los ceros en cero o en infinito se desplazan.
- Los ceros internos, en su desplazamiento, nunca cruzan un polo adyacente<sup>39</sup>.
- El desplazamiento de cada cero es mayor cuanto más residuo eliminemos.
- Por regla general, y sin que las distancias tengan un sentido estricto, cuanto más cerca está un cero al polo eliminado total o parcialmente, mayor es su desplazamiento.
- En el caso de eliminación total de un polo en cero o en infinito, el polo eliminado totalmente desaparece y el cero interno más cercano queda situado en la posición del polo eliminado.
- En el caso de eliminación total de un polo interno, el polo eliminado totalmente desaparece junto con uno de sus ceros adyacentes, quedando el otro cero adyacente en las cercanías (pero en general no en la posición<sup>40</sup>) del polo eliminado

Aun que sea sólo de forma cualitativa, el conocimiento de estos efectos permite hacerse una idea bastante útil de lo que ocurre con la inmitancia “previa” y con la inmitancia “restante” en cada paso<sup>41</sup> de la realización de

38. Lo que ocurre en la realidad es que los dos ceros situados a ambos lados del polo eliminado (adyacentes) se desplazan hacia él por la derecha y por la izquierda. Uno de los ceros (el más “cercano”, sin entender esto en sentido estricto) alcanza el polo antes que el otro, y se cancela con él, mientras el otro cero quedará situado en algún valor “cercano” al polo eliminado. Lógicamente, en el lado izquierdo del eje de frecuencias ocurre el fenómeno simétrico. La novedad aquí, en contraste con lo que ocurre en el caso de polos en cero o en infinito, es que la eliminación completa del polo no resulta (necesariamente) en un cero en la posición del polo, sino sólo en “las cercanías”. Si uno de los ceros adyacentes está en cero o en infinito y el otro cero adyacente es finito, el cero cancelado es el finito (y el otro no se mueve). Si los dos ceros adyacentes están en cero y en infinito, se cancelan ambos con el polo finito eliminado. Si sólo queda un polo en cero y un cero en infinito, o viceversa, el polo y el cero se cancelan mutuamente, y se termina la realización.
39. Si ocurriese esto, la inmitancia restante no sería realizable porque no tendría sus polos y ceros intercalados. Esto sólo ocurrirá si “nos pasamos de residuo”.

una inmitancia LC, y en muchos casos, cuando hay restricciones adicionales al simple objetivo de implementación, pueden ahorrar una gran cantidad de cálculos numéricos al permitir descartar procedimientos de realización que no llevarían a una solución correcta. Para ello se recurre a **diagramas polo-cero**, que consisten simplemente en la representación en el eje de frecuencia<sup>42</sup>  $\omega$  de las posiciones de polos y ceros de cada una de las inmitancias (y/o sus inversas) que van surgiendo en el proceso de realización.

### 4.3 Bipuertas

El objeto de este capítulo es el estudio de las técnicas de realización de filtros pasivos LC doblemente terminados. Ya hemos realizado una introducción al asunto, y tratado en cierta profundidad el problema de realización de inmitancias LC como paso previo al problema de realización de bipuertas LC, necesarias como bloque fundamental de los filtros LC doblemente terminados (ver Fig. 4.1).

En definitiva, nuestro objetivo es encontrar la manera de realizar las bipuertas que sean necesarias para realizar los filtros pasivos que podamos necesitar. En esta sección abordaremos el problema de realización de filtros orientados a satisfacer especificaciones de magnitud. Esto se consigue utilizando bipuertas LC con estructura en escalera<sup>43</sup>.

Dividiremos el problema en los siguientes pasos:

40. No debe excluirse esta posibilidad. De hecho, ésta se da con cierta frecuencia en filtros obtenidos mediante transformaciones de frecuencia a partir de prototipos paso de baja.
41. Cada paso del proceso de realización es una eliminación total o parcial de algún polo (no hay otra forma de ir “reduciendo la inmitancia que falta por implementar”).
42. La representación suele hacerse sólo en la parte positiva del eje  $\omega$ , ya que todo lo que ocurre en “la parte izquierda” es simétrico respecto al origen. Además, por simplicidad en cuanto a los valores numéricos de polos y ceros internos (que aparecen al cuadrado en las inmitancias) es frecuente realizar el diagrama en el eje de frecuencias al cuadrado  $\omega^2$ .

- Veremos cómo se describen (especifican) las bipuertas LTI de parámetros concentrados. Esto se hará en la sección 4.3.1: “Caracterización de bipuertas: parámetros de inmitancia”
  - Veremos qué bipuertas (qué parámetros de inmitancia) pueden ser realizados. Esto se hará en la sección 4.3.2: “Realizabilidad”. De estas condiciones se derivarán algunas propiedades de las bipuertas LCM (sección 4.3.3: “Propiedades de los parámetros de inmitancia de bipuertas LCM”).
  - A continuación se hace una clasificación de los “tipos” de polos de los parámetros de inmitancia atendiendo a criterios de importancia en lo referente al filtro doblemente terminado implementado con la bipuerta (sección 4.3.4: “Clasificación de los polos de los parámetros de inmitancia de bipuertas LCM”).
  - Veremos como se describen (especifican) los filtros pasivos cuya realización perseguimos. Esto se hará en la sección 4.3.5: “Caracterización de filtros pasivos LC doblemente terminados: parámetros de transducción”.
  - Veremos las relaciones existentes entre los parámetros de transducción de un filtro y los parámetros de inmitancia de la bipuerta, y a la inversa<sup>44</sup>. Esto nos permitirá, dados unos parámetros de transducción (la especificación de un filtro) y unos valores de resistencias terminales, obtener los parámetros de inmitancia (la especificación) de la bipuerta que necesitamos realizar para conseguir el filtro doblemente terminado. Visto a la inversa, esto nos permitirá saber qué parámetros
43. En una sección posterior se abordará el tema de realización de filtros orientados a satisfacer las especificaciones de fase dejando invariante la magnitud (eualizadores de fase, filtros pasa-todo LC, sección 4.4: “Realización de filtros pasa-todo LC doblemente terminados”)
44. En realidad las relaciones implican también a las resistencias terminales que se vayan a emplear. Esto quiere decir que, dados unos parámetros de transducción, la bipuerta necesaria dependerá de los valores de resistencias terminales elegidos. Visto a la inversa: dada una bipuerta, los parámetros de transducción resultantes dependerán de las resistencias terminales empleadas.

de transducción podemos esperar de la utilización de una bipuerta (unos parámetros de inmitancia) y unas resistencias terminales conocidas. Todo esto se verá en la sección 4.3.6: “Relaciones entre parámetros de transducción y de inmitancia”.

- Veremos como podemos realizar bipuertas LC a partir de sus parámetros de inmitancia. Esto se hará en la sección 4.3.7: “Realización de bipuertas LC en escalera”. Con esto, se termina de abordar el núcleo fundamental del problema de realización de filtros pasivos<sup>45</sup>. Pero aún quedan un par de aspectos interesantes.
- Veremos cómo podemos “aplicar las transformaciones de frecuencia” directamente sobre filtros LC ya realizados. Esto significa que podremos abordar la realización LC de filtros paso de alta, paso de banda y rechazo de banda mediante la realización LC del prototipo paso de baja y la aplicación de unas reglas de transformación muy simples directamente sobre el circuito. Esto se verá en la sección 4.3.9: “Transformaciones en frecuencia de filtros LC doblemente terminados”.
- Finalmente, recapitaremos sobre las limitaciones que presenta el procedimiento de realización descrito, y mencionaremos algunas alternativas de mejora en casos particulares. Esto se hará en la sección 4.3.8: “Limitaciones de realización de filtros LC doblemente terminados.”

### 4.3.1 Caracterización de bipuertas: parámetros de inmitancia

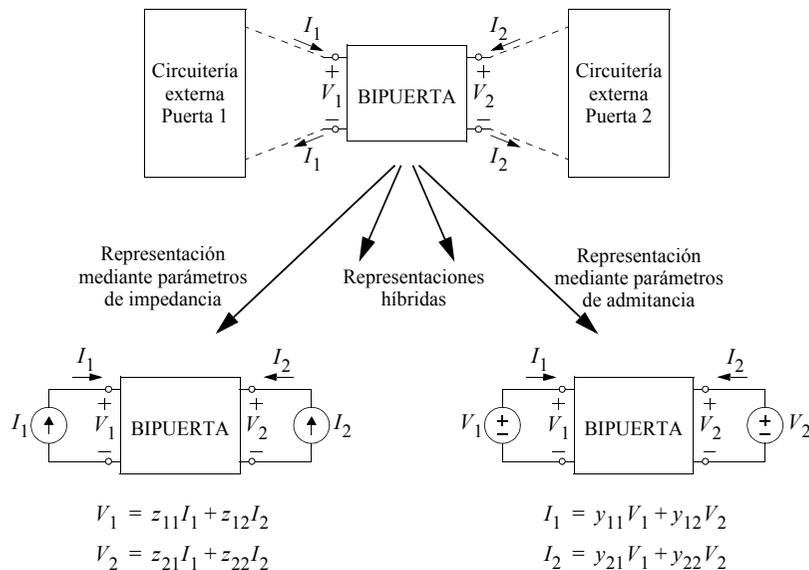
Una bipuerta es un circuito en el que definimos dos “puertas”. Cada puerta es un conjunto de dos nudos del circuito, con una polaridad asignada. Las bipuertas se caracterizan asumiendo que se conectará un elemento de

45. En realidad se termina el problema de realización de filtros pasivos orientados a la satisfacción de especificaciones de magnitud con todos los ceros de reflexión y de transmisión en el eje imaginario.

dos terminales en cada puerta<sup>46</sup>. Esto lleva a que, en cada puerta, la intensidad que entra por uno de los terminales es igual a la que sale por el otro terminal (e igual a la que circula por el elemento de dos terminales externo a la bipuerta). La parte superior de la Fig. 4.9 muestra el concepto de bipuerta.

En nuestro contexto, nos restringiremos a bipuertas realizadas únicamente con elementos lineales invariantes en el tiempo de parámetros concentrados. Además, serán pasivas y realizadas únicamente con elementos L y C y quizás algún transformador.

Puesto que la bipuerta es lineal, en su interior no puede haber fuentes independientes. Por tanto, las respuestas medidas en las puertas (en forma de tensión o de intensidad) solo podrán ser originadas por excitaciones externas a la bipuerta<sup>47</sup>.



**Figura 4.9: Representación de alternativas de caracterización de bipuertas.**

46. Estos elementos son externos a la bipuerta. Una vez conectados, dan lugar a un nuevo circuito constituido por la bipuerta y los elementos externos de dos terminales.

Por el teorema de sustitución, la excitación en cada puerta puede sustituirse por una fuente de excitación equivalente, de manera que si la tensión/intensidad de las fuentes conectadas a cada puerta es la misma que antes de la sustitución, también lo serán las otras variables eléctricas (intensidad/tensión) de cada puerta.<sup>48</sup>

Por el principio de superposición, podemos descomponer la respuesta de la bipuerta en la suma de las respuestas a las excitaciones en cada puerta.

Ahora, dependiendo de la forma en que produzcamos la excitación en cada puerta, obtendremos una matriz diferente de parámetros de inmitancia. Todas estas matrices son equivalentes, en el sentido de que definen totalmente a la bipuerta, salvo casos excepcionales.

Si las dos excitaciones son en intensidad, las respuestas las mediremos en tensión, y estarán dadas por:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \tag{4.19}$$

o, en forma matricial,

$$V = Z \cdot I \tag{4.20}$$

Los parámetros  $z_{ij}$  se denominan parámetros de impedancia<sup>49</sup> en circuito abierto<sup>50</sup>. La matriz  $Z$  se denomina matriz de impedancia en circuito abier-

47. Se está pensando aquí en respuesta en régimen sinusoidal estacionario. También podría extenderse la discusión a la respuesta a estado cero. Sin embargo, la discusión no sería válida en régimen transitorio en el que hubiera respuesta al estado (la bipuerta no sería lineal desde el punto de vista externo).

48. Es decir, si se establece una de las variable eléctricas (tensión o intensidad) de cada puerta, las variables eléctricas dejadas libres en cada puerta (intensidad o tensión) tendrán valores que no dependen de la forma en que se han establecido las condiciones en cada puerta.

49. Nótese que  $z_{11}$  y  $z_{22}$  son realmente impedancias, pero que  $z_{12}$  y  $z_{21}$  no son realmente impedancias, sino transimpedancias.

50. La razón para esto es que, si queremos medir uno de ellos, debemos anular una de las dos excitaciones, es decir hacer la intensidad nula o, lo que es lo mismo, dejar la puerta en circuito abierto.

to. La Fig. 4.9 muestra esta forma de caracterización en su parte inferior izquierda. Los parámetros de impedancia pueden definirse o “medirse” individualmente como,

$$\begin{bmatrix} z_{11} = \frac{V_1}{I_1} \Big|_{I_2=0} & z_{12} = \frac{V_1}{I_2} \Big|_{I_1=0} \\ z_{21} = \frac{V_2}{I_1} \Big|_{I_2=0} & z_{22} = \frac{V_2}{I_2} \Big|_{I_1=0} \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

Si las dos excitaciones son en tensión, las respuestas en cada puerta serán las intensidades, y estarán dadas por

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

o, en forma matricial,

$$\mathbf{I} = \mathbf{Y} \cdot \mathbf{V} \quad (4.23)$$

Los parámetros  $y_{ij}$  se denominan parámetros de admitancia<sup>51</sup> en corto circuito<sup>52</sup>. La matriz  $\mathbf{Y}$  se denomina matriz de admitancia en corto circuito. La Fig. 4.9 muestra esta forma de caracterización en su parte inferior derecha. Los parámetros de admitancia pueden definirse o “medirse” individualmente como,

51. Nótese que  $y_{11}$  e  $y_{22}$  son realmente admitancias, pero que  $y_{12}$  e  $y_{21}$  no son realmente admitancias, sino transadmitancias.
52. La razón para esto es que, si queremos medir uno de ellos, debemos anular una de las dos excitaciones, es decir hacer la tensión nula, o lo que es lo mismo, cortocircuitar la puerta.

$$\begin{bmatrix} y_{11} = \frac{I_1}{V_1} \Big|_{V_2=0} & y_{12} = \frac{I_1}{V_2} \Big|_{V_1=0} \\ y_{21} = \frac{I_2}{V_1} \Big|_{V_2=0} & y_{22} = \frac{I_2}{V_2} \Big|_{V_1=0} \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

Por el teorema de reciprocidad, las bipuertas lineales de parámetros concentrados, finitas e invariantes en el tiempo, sin fuentes controladas<sup>53</sup> (es decir, pasivas), son recíprocas. Esto quiere decir que en todos los casos de interés para nosotros en este tema se cumplirá que

$$\begin{aligned} z_{12} &= z_{21} \\ y_{12} &= y_{21} \end{aligned} \quad (4.25)$$

y por tanto sólo habrá tres parámetros de inmitancia diferentes.

Existen también caracterizaciones híbridas de la bipuerta, en las que una de las puertas es excitada en tensión y la otra en intensidad.

En general, salvo casos particulares, cualquiera de las cuatro representaciones puede obtenerse a partir de cualquier otra. En particular, las matrices de parámetros de impedancia y de admitancia podrán obtenerse una de otra invirtiendo la matriz correspondiente, cuando esto sea posible. Nótese que esta es la única relación válida entre parámetros de impedancia y de admitancia. Es frecuente suponer que pueden obtenerse unos de otro individualmente. Esto no es cierto, ni siquiera en los casos en que los parámetros son inmitancias reales (elementos de la diagonal de las matrices) porque son inmitancias medidas en condiciones de carga diferentes en la otra puerta.

Para una explicación más detallada véase apéndice A.4.3

53. Tampoco tendrán fuentes independientes, porque entonces no serían lineales. Esto está asumido de antemano, pero por si acaso.

### 4.3.2 Realizabilidad

Como en el caso de las monopuertas, la realizabilidad de una bipuerta es independiente de que la forma en que ésta esté caracterizada. Esto quiere decir que la realizabilidad de una matriz de parámetros de impedancia implica la realizabilidad de la matriz de parámetros de admitancia correspondiente, y viceversa<sup>54</sup>. Por tanto, las condiciones suficientes y/o necesarias que resulten para una de las representaciones serán aplicables también a la otra representación.

Por tanto, en esta sección utilizaremos una notación única para los parámetros de impedancia en circuito abierto y para los parámetros de admitancia en corto circuito. Es decir,

$$\mathbf{F}(s) = \begin{bmatrix} f_{11}(s) & f_{12}(s) \\ f_{21}(s) & f_{22}(s) \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

representará indistintamente a  $\mathbf{Z}(s)$  y a  $\mathbf{Y}(s)$ .

#### 4.3.2.1 Realizabilidad RLCM de bipuertas

Las condiciones suficientes y necesarias de realizabilidad RLCM de una bipuerta<sup>55</sup>, caracterizada por sus parámetros de inmitancia  $\mathbf{F}(s)$ , pueden obtenerse a partir del Teorema de Tellegen y resultan ser las siguientes (ver apéndice A.4.4),

a) Todos los elementos  $f_{ij}(s)$  de  $\mathbf{F}(s)$  deben ser funciones racionales reales de  $s$ . Además, la bipuerta debe ser recíproca<sup>56</sup>, es decir, debe cumplirse que  $f_{12}(s) = f_{21}(s)$ .

54. Esto es evidente si tenemos en cuenta que en realidad debemos hablar de realizabilidad de bipuertas, y no de “realizabilidad de matrices” que caractericen a la bipuerta en alguna forma concreta.

55. Se asume que la bipuerta es de parámetros concentrados, finita (en el número de elementos, o lo que es lo mismo, en el orden de los parámetros de inmitancia), invariante en el tiempo, y que los elementos son positivos (en caso contrario sería una bipuerta activa).

56. En lo sucesivo, por tanto, trataremos sólo con tres parámetros de inmitancia.

b) La expresión<sup>57</sup>

$$F(s) = a_1^2 f_{11}(s) + 2a_1 a_2 f_{12}(s) + a_2^2 f_{22}(s) \quad (4.27)$$

debe ser una función racional real positiva para todo  $a_1$  y  $a_2$  reales, es decir que debe cumplirse que

$$\operatorname{Re}[F(j\omega)] \geq 0 \quad \forall (a_1, a_2) \in \mathfrak{R}^2 \quad \forall \omega \in \mathfrak{R} \quad (4.28)$$

y que además, todos los polos de  $F(s)$  estén en el semiplano izquierdo cerrado, y que los polos que estén en el eje imaginario sean simples y tengan residuos reales y positivos<sup>58</sup>.

Puesto que la condición b) debe cumplirse para cualquier valor de  $a_1$  y  $a_2$ , podemos hacer elecciones particulares para obtener algunas conclusiones. Por ejemplo, haciendo  $a_1 = 0$  ó  $a_2 = 0$  se deduce que  $f_{11}(s)$  y  $f_{22}(s)$  deben ser funciones racionales reales positivas, y por tanto deben cumplir las mismas condiciones que  $F(s)$ . Esto era de esperar ya que ambas son funciones de inmitancia medidas en una puerta (con la otra puerta en circuito abierto o cortocircuitada, según sean parámetros de impedancia o admitancia, respectivamente).

Nótese que no podemos asegurar lo mismo acerca de  $f_{12}(s)$ . Esto podía esperarse, ya que  $f_{12}(s)$  no es en realidad una inmitancia, sino una transinmitancia. Sin embargo, si podemos hacer algunas averiguaciones. Para ello, podemos escribir (4.27) de la siguiente manera,

$$f_{12}(s) = \frac{1}{2a_1 a_2} F(s) - \frac{a_1}{2a_2} f_{11}(s) - \frac{a_2}{2a_1} f_{22}(s) \quad (4.29)$$

Está claro que  $f_{12}(s)$  sí será una función racional real, pues lo son  $F(s)$ ,  $f_{11}(s)$  y  $f_{22}(s)$ , y  $a_1$  y  $a_2$  son reales, pero en general  $f_{12}(s)$  no será una función real positiva<sup>59</sup>.

57. Utilizamos letra “negrita” para la matriz de inmitancia, y normal para esta expresión. No debe haber confusión.

58. De nuevo, debe recordarse que a estos efectos  $s = 0$  y  $s \rightarrow \infty$  son puntos del eje imaginario.

Sin embargo,  $f_{12}(s)$  sí tiene algunas de las características de las funciones reales positivas, en particular en lo referente a la posición y multiplicidad de sus polos (pero no en cuanto al signo de los residuos).

Por ejemplo, los polos de  $f_{12}(s)$  estarán todos en el semiplano izquierdo cerrado. Esto debe ser así porque, a la vista de (4.29), los polos de  $f_{12}(s)$  deben ser polos de alguna(s) de las funciones que aparecen en el término de la derecha, es decir, de  $F(s)$ ,  $f_{11}(s)$  ó  $f_{22}(s)$ , y éstas son todas funciones reales positivas. Por el mismo motivo, los polos que  $f_{12}(s)$  tenga en el eje imaginario, serán simples y sus residuos serán reales. Sin embargo, no tendrán porqué ser positivos.

En cambio, a partir de las condiciones de realizabilidad, puede derivarse (ver apéndice A.4.4) una condición necesaria relacionada con los signos de los residuos de los polos de  $f_{11}(s)$ ,  $f_{12}(s)$  y  $f_{22}(s)$  en el eje imaginario, que como hemos visto serán todos reales.

Si denotamos por

$$\{p_i\} \quad i = 1, \dots, m \quad (4.30)$$

al conjunto de todos los polos **en el eje imaginario** de alguno de los parámetros de inmitancia<sup>60</sup>, y por

$$\begin{aligned} \{k_{11,i}\} & \quad i = 1, \dots, m \\ \{k_{12,i}\} & \quad i = 1, \dots, m \\ \{k_{22,i}\} & \quad i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (4.31)$$

a los conjuntos de los valores de los residuos de cada uno de los parámetros de inmitancia en cada uno de los polos<sup>61</sup> del conjunto  $\{p_i\}$ , deberán verificarse las siguientes condiciones

59. No es cierto que las combinaciones lineales de funciones reales positivas sean siempre reales positivas. Sí será cierto si los coeficientes de la combinación lineal son todos positivos.
60. Nótese que no se asume que todos los parámetros de inmitancia tengan que tener los mismos polos en el eje imaginario. El conjunto definido contiene a todos los valores de la variable compleja que son polo de alguno (no necesariamente de todos) de los parámetros de inmitancia.

$$k_{11,i} \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, m \quad (4.32)$$

$$k_{22,i} \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, m \quad (4.33)$$

$$k_{11,i}k_{22,i} - k_{12,i}^2 \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, m \quad (4.34)$$

Nótese que las dos primeras condiciones eran ya conocidas, porque en realidad son una consecuencia de que  $f_{11}(s)$  y  $f_{22}(s)$  son funciones reales positivas (a su vez una consecuencia de que son inmitancias reales).

La novedad está en la tercera condición, dada por (4.34), que se conoce como **condición de los residuos**.

De la condición de los residuos, es fácil deducir que todos los polos de  $f_{12}(s)$  en el eje imaginario<sup>62</sup> serán necesariamente polos de  $f_{11}(s)$  y de  $f_{22}(s)$ . Lo contrario no tiene porqué ser cierto.

Los polos internos en el eje imaginario aparecerán siempre por pares conjugados, y en estos casos se ha visto que resulta más cómodo agrupar las parejas de fracciones simples correspondientes a parejas de polos conjugadas en una única “fracción simple de segundo orden” con constante multiplicativa  $K$  igual al doble del residuo en cada polo. Este factor 2 no afecta a ninguna de las condiciones dadas en (4.32), (4.33) y (4.34), por lo que es frecuente plantearse estas condiciones de una forma equivalente: extendiéndolas al conjunto de frecuencias  $\omega$  no negativas que hacen que  $s = j\omega$  sea polo de alguno de los parámetros de inmitancia, y utilizando en las expresiones (4.32), (4.33) y (4.34) los valores de las constantes de las “fracciones simples” correspondientes ( $k$  para los polos en  $s = 0$  y en  $s \rightarrow \infty$ ,  $K$  para las parejas de polos internos en  $s = \pm j\omega$ ).

61. Si un elemento del conjunto de polos no es polo de algún parámetro de inmitancia, el residuo en cuestión será nulo, como se deduce fácilmente de la propia definición del valor del residuo (de la expresión para calcularlo como paso al límite).
62. Debe recordarse que condición de los residuos sólo es aplicable a los polos que estén en el eje imaginario.

### 4.3.2.2 Realizabilidad LCM de bipuertas

Las bipuertas realizables LCM serán un subconjunto de las bipuertas realizables RLCM. Por tanto, es de esperar que las condiciones de realizabilidad LCM sean más restrictivas que las condiciones de realizabilidad RLCM.

De nuevo a partir del Teorema de Tellegen, las condiciones suficientes y necesarias de realizabilidad LCM de una bipuerta<sup>63</sup>, caracterizada por sus parámetros de inmitancia  $F(s)$ , son las siguientes (ver apéndice A.4.4).

a) Todos los elementos  $f_{ij}(s)$  de  $F(s)$  deben ser funciones racionales reales de  $s$ . Además, la bipuerta debe ser recíproca, es decir, debe cumplirse que  $f_{12}(s) = f_{21}(s)$ .

b) La expresión

$$F(s) = a_1^2 f_{11}(s) + 2a_1 a_2 f_{12}(s) + a_2^2 f_{22}(s) \quad (4.35)$$

debe ser una función racional real positiva para todo  $a_1$  y  $a_2$  reales, y además con las mismas restricciones adicionales que las necesarias para que una inmitancia sea realizable LCM, es decir<sup>64</sup>, que debe cumplirse que

$$\operatorname{Re}[F(j\omega)] = 0 \quad \forall (a_1, a_2) \in \mathfrak{R}^2 \quad \forall \omega \in \mathfrak{R} \quad (4.36)$$

y que además, todos los polos de  $F(s)$  estén en el eje imaginario, sean simples y tengan residuos reales y positivos<sup>65</sup>.

Haciendo  $a_1 = 0$  ó  $a_2 = 0$  se deduce que  $f_{11}(s)$  y  $f_{22}(s)$  deben cumplir las mismas condiciones que  $F(s)$ . Esto era de esperar ya que ambas son funciones de inmitancia medidas en una puerta de una bipuerta LCM con la

63. Se asume que la bipuerta es de parámetros concentrados, finita (en el número de elementos, o lo que es lo mismo, en el orden de los parámetros de inmitancia), invariante en el tiempo, y que los elementos son positivos (en caso contrario sería una bipuerta activa).

64. Para imponer la restricción adicional de no usar resistencias, se restringe la condición (4.3) al caso de la **igualdad**, y se exige que **todos** los polos estén en el eje imaginario (de nuevo restricción a la frontera).

65. De nuevo, debe recordarse que a estos efectos  $s = 0$  y  $s \rightarrow \infty$  son puntos del eje imaginario.

otra puerta en circuito abierto o cortocircuitada, y por tanto son inmitancias LCM.

Nótese que no podemos asegurar lo mismo acerca de  $f_{12}(s)$ . Esto podía esperarse, ya que  $f_{12}(s)$  no es en realidad una inmitancia LCM, sino una transinmitancia. Sin embargo, podemos hacer algunas averiguaciones escribiendo (4.35) de la siguiente manera,

$$f_{12}(s) = \frac{1}{2a_1 a_2} F(s) - \frac{a_1}{2a_2} f_{11}(s) - \frac{a_2}{2a_1} f_{22}(s) \quad (4.37)$$

Está claro que  $f_{12}(s)$  sí será una función racional real, pues lo son  $F(s)$ ,  $f_{11}(s)$  y  $f_{22}(s)$ , y  $a_1$  y  $a_2$  son reales, pero en general  $f_{12}(s)$  no tiene porqué tener todas las propiedades de las inmitancias LCM.

Sin embargo,  $f_{12}(s)$  sí tendrá algunas de las características de las inmitancias LCM, en particular en lo referente a la posición y multiplicidad de sus polos (pero no en cuanto al signo de los residuos).

Por ejemplo, los polos de  $f_{12}(s)$  estarán todos en el eje imaginario, ya que los polos de  $f_{12}(s)$  deben ser polos de alguna(s) de las funciones que aparecen en el término de la derecha de (4.37), es decir, de  $F(s)$ ,  $f_{11}(s)$  ó  $f_{22}(s)$ , y éstas son todas funciones con las propiedades<sup>66</sup> de las inmitancias LC. Por el mismo motivo, los polos de  $f_{12}(s)$  serán simples y sus residuos serán reales. Sin embargo, no tendrán porqué ser positivos. Puesto que  $F(s)$ ,  $f_{11}(s)$  y  $f_{22}(s)$  son todas impares,  $f_{12}(s)$  también será impar.

**La condición de los residuos deberá cumplirse ahora en todos los polos** de los parámetros de inmitancia (puesto que todos están en el eje imaginario).

De la condición de los residuos, es fácil deducir que **todos** los polos de  $f_{12}(s)$  serán necesariamente polos de  $f_{11}(s)$  y de  $f_{22}(s)$ . Lo contrario no tiene porqué ser cierto.

66.  $F(s)$  no es una inmitancia LC, pero tiene las mismas propiedades.

### 4.3.3 Propiedades de los parámetros de inmitancia de bipuertas LCM

Las propiedades de los parámetros de inmitancia de bipuertas LC, en cuanto a  $f_{11}(s)$  y  $f_{22}(s)$ , serán las de todas las propiedades de las inmitancias LC, dadas en una sección anterior. En cuanto a  $f_{12}(s)$ , como hemos visto, sólo cumplirá algunas.

Antes de enumerar estas propiedades, siguiendo el orden establecido para las propiedades de inmitancias LC y haciendo las distinciones necesarias en lo referente a  $f_{12}(s)$ , debemos recordar que existe una propiedad “colectiva” de estos parámetros, la **condición de los residuos**, dada en (4.34), que debe cumplirse para todos los polos de cualquiera de los parámetros de inmitancia de bipuertas LC (pues todos están en el eje imaginario).

De esta condición se deduce además, como se ha visto, que **todos** los polos de  $f_{12}(s)$  serán necesariamente polos de  $f_{11}(s)$  y de  $f_{22}(s)$ , mientras que lo contrario no tiene porqué ser cierto. Esta es por tanto una propiedad de las bipuertas LCM.

A continuación se enumeran las propiedades individuales de los parámetros de inmitancia de bipuertas LC<sup>67</sup>.

- Los polos y ceros de  $f_{11}(s)$  y  $f_{22}(s)$ , y los polos de  $f_{12}(s)$ , son imaginarios puros y simples. Los ceros de  $f_{12}(s)$  pueden tener parte real no nula, y pueden ser múltiples<sup>68</sup>.
- Los residuos de los polos de  $f_{11}(s)$  y  $f_{22}(s)$  son reales y positivos. Los residuos de los polos de  $f_{12}(s)$  son reales, pero pueden ser negativos.

67. De nuevo, debe recordarse que  $s = 0$  y  $s \rightarrow \infty$  son puntos del eje imaginario.

68. En el caso de que la bipuerta se haya realizado en forma de escalera, aparecerán algunas restricciones adicionales a la posición de los ceros de  $f_{12}(s)$ .

- Los polos y ceros de  $f_{11}(s)$ ,  $f_{22}(s)$  y  $f_{12}(s)$  aparecen por pares complejos conjugados<sup>69</sup> (todos imaginarios puros:  $s = \pm j\omega_i$  excepto quizás los ceros de  $f_{12}(s)$ ), salvo los polos ó ceros en  $s = 0$  ó  $s \rightarrow \infty$ .
- Las funciones  $f_{11}(s)$ ,  $f_{22}(s)$  y  $f_{12}(s)$  son todas impares, es decir,  $f_{ij}(s) = -f_{ij}(-s) \quad \forall i, j = 1, 2$ .

De las propiedades anteriores pueden derivarse las siguientes.

- La expansión en fracciones simples puede escribirse siempre de la forma siguiente,

$$f_{ij}(s) = k_{ij, \infty} s + \frac{k_{ij, 0}}{s} + \frac{K_{ij, 1} s}{s^2 + \omega_{ij, 1}^2} + \dots + \frac{K_{ij, n} s}{s^2 + \omega_{ij, n}^2} \quad (4.38)$$

donde los coeficientes (los residuos<sup>70</sup>), como ya se ha dicho, son todos reales y, en el caso de  $f_{11}(s)$  y  $f_{22}(s)$  positivos (en el caso de  $f_{12}(s)$  pueden ser negativos).

- En el caso de  $f_{11}(s)$  y  $f_{22}(s)$ , la diferencia de grado entre numerador y denominador es 1 ó -1. En el caso de  $f_{12}(s)$ , no tiene porqué ser así.
- Los polos y los ceros de  $f_{11}(s)$  y  $f_{22}(s)$  están entrelazados en el eje  $j\omega$ . Los de  $f_{12}(s)$  no tienen porqué estarlo.
- Tanto el numerador  $N_{ij}(s)$  de  $f_{11}(s)$  y  $f_{22}(s)$  como el denominador  $D_{ij}(s)$  de  $f_{11}(s)$ ,  $f_{22}(s)$  y  $f_{12}(s)$  (pero no necesariamente el numerador de  $f_{12}(s)$ ) tienen la forma general:

$$P(s) = s(s^2 + \omega_1^2)(s^2 + \omega_2^2)\dots \quad (4.39)$$

donde el factor  $s$ , que representa una raíz en  $s = 0$ , puede (o no) estar presente. Esto quiere decir que estos polinomios serán ó par ó impar (dependiendo de si el factor  $s$  está o no presente).

69. Esto es cierto para cualquier función racional de coeficientes reales (función racional real).

70. El hecho de que los coeficientes denotados con  $K$  mayúscula sean en realidad el doble del residuo no afecta a la discusión.

- Al ser impares los tres parámetros de inmitancia, o el denominador es par y el denominador impar, o viceversa. Por tanto, para  $f_{11}(s)$  y  $f_{22}(s)$  (cuyos ceros si están en el eje imaginario) las dos opciones son o

$$f_{ij}(s) = \frac{N_{ij}(s)}{D_{ij}(s)} = \frac{s(s^2 + \omega_{z_1}^2)(s^2 + \omega_{z_2}^2)\dots}{(s^2 + \omega_{p_1}^2)(s^2 + \omega_{p_2}^2)\dots} \quad (4.40)$$

o bien

$$f_{ij}(s) = \frac{N_{ij}(s)}{D_{ij}(s)} = \frac{(s^2 + \omega_{z_1}^2)(s^2 + \omega_{z_2}^2)\dots}{s(s^2 + \omega_{p_1}^2)(s^2 + \omega_{p_2}^2)\dots} \quad (4.41)$$

Para  $f_{12}(s)$  las alternativas son similares salvo que los ceros no tienen porqué estar en el eje imaginario ni ser simples (pero sí tener “paridad contraria” a la del denominador). Tanto  $f_{11}(s)$  y  $f_{22}(s)$  como  $f_{12}(s)$  tendrán siempre<sup>71</sup> o un polo o un cero en  $s = 0$  y en  $s \rightarrow \infty$ .

#### 4.3.4 Clasificación de los polos de los parámetros de inmitancia de bipuertas LCM

Se ha visto en la sección anterior que, de la condición de los residuos se deriva que en las bipuertas LCM todos los polos de  $f_{12}(s)$  serán necesariamente polos de  $f_{11}(s)$  y de  $f_{22}(s)$ , mientras que lo contrario no tiene porqué ser cierto. Por supuesto, la condición de los residuos se verificará en cualquier polo de los parámetros de inmitancia.

En base a esto, puede introducirse la siguiente clasificación en el conjunto de los polos de los parámetros de inmitancia.

71. Esto está claro en el caso de  $f_{11}(s)$  y  $f_{22}(s)$ , como en el de cualquier otra inmitancia LC. En el caso de  $f_{12}(s)$ , como el la diferencia de orden entre numerador y denominador no puede ser nula (porque no sería impar), habrá polo o cero(s) en infinito. Por otra parte, al ser de paridad contraria el numerador y el denominador, uno de ellos tiene raíz en cero, y por tanto, habrá también polo o cero(s) en cero.

Si un cierto elemento del conjunto de polos de los parámetros de inmitancia (ver (4.30)) es polo de los tres parámetros de inmitancia<sup>72</sup>, es decir, si los residuos de los tres parámetros de inmitancia en ese “polo” son los tres no nulos, el polo se denomina **polo compartido**. En caso contrario, el polo se denomina **polo privado de  $f_{ij}(s)$** , siendo  $f_{ij}(s)$  el parámetro de inmitancia (o alguno de los parámetros de inmitancia) del que sí es polo. Nótese que no pueden existir polos privados de  $f_{12}(s)$ , ya que se ha visto que todos los polos de  $f_{12}(s)$  son también polos de  $f_{11}(s)$  y de  $f_{22}(s)$ . Por consiguiente, un polo privado podrá ser polo privado de  $f_{11}(s)$  y/o de  $f_{22}(s)$ . Cuando un cierto elemento del conjunto de polos es polo privado tanto de  $f_{11}(s)$  como de  $f_{22}(s)$  es preferible<sup>73</sup> considerarlo como “dos polos privados coincidentes”, uno de  $f_{11}(s)$  y otro de  $f_{22}(s)$ .

Por otra parte, cualquier polo del conjunto de polos de los parámetros de inmitancia para el cual la condición de los residuos (ver (4.34)) se verifique con una igualdad, se denomina **polo compacto**, mientras que en caso contrario, el polo se denomina **polo no compacto**.

Nótese que los polos compartidos pueden ser compactos o no compactos en general, pero los polos privados serán compactos salvo que sean privados de  $f_{11}(s)$  y de  $f_{22}(s)$  simultáneamente, en cuyo caso serán no compactos. Es frecuente limitar la consideración de compacto o no compacto a los polos compartidos.

La Fig. 4.10 resume esta clasificación. Nótese que  $k_{12, i} \neq 0$  es garantía de que el polo es compartido, porque esto garantiza que también serán distintos de cero (y positivos) los residuos de los otros dos parámetros de inmitancia. Por tanto, una definición alternativa de polo compartido o no compartido es decir que los polos compartidos son los de  $f_{12}(s)$ , mientras que los

72. Es decir, de los cuatro, ya que la bipuerta es recíproca.

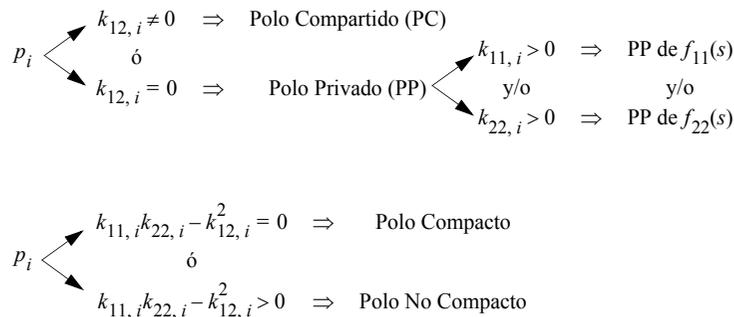
73. La razón para esto se verá más adelante. Está relacionada con el efecto de los polos privados (creación de un cero de transmisión). Cuando un polo es privado de ambos parámetros de inmitancia, se crean dos ceros de transmisión, y en este sentido, son dos polos privados, uno de cada parámetro de inmitancia.

demás (los polos que sean polos de  $f_{11}(s)$  o/y  $f_{22}(s)$  pero no lo sean de  $f_{12}(s)$ ) serán privados.

### 4.3.5 Caracterización de filtros pasivos LC doblemente terminados: parámetros de transducción

Se ha comentado previamente que una de las razones esenciales de la importancia de los filtros pasivos basados en bipuertas LCM doblemente terminadas (por dos resistencias) era el hecho de que pudiéramos garantizar, por consideraciones de conservación de la energía y en base a los resultados del teorema de máxima transferencia de potencia, que la magnitud de la función de transferencia tendrá sensibilidad (uniparamétrica de primer orden) nula en los ceros de reflexión, entendiendo como tales las frecuencias a las que la transferencia de potencia desde el generador a la bipuerta es máxima.

En definitiva, se hace conveniente una definición de la función de transferencia en base a consideraciones de transferencia de potencia, y no en base a un simple cociente entre las tensiones a la salida y de entrada del filtro, como es habitual en el caso de filtros activos. Esto también parece razonable si tenemos en cuenta que otra de las razones de utilidad de los filtros pasivos era su mejor relación señal ruido en general, que llevaba a que uno de sus



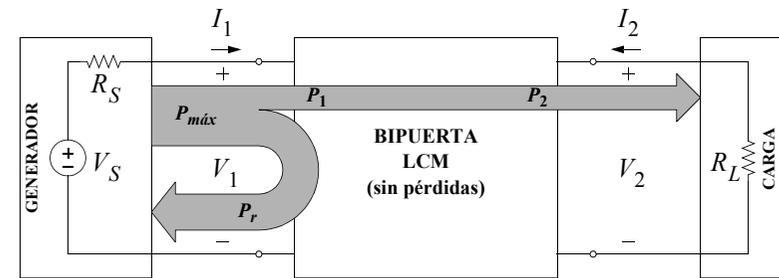
**Figura 4.10: Clasificación de polos de parámetros de inmitancia de bipuertas LCM.**

campos de aplicación más importante sea el filtrado de señales de baja potencia. En cualquier caso, veremos que ambas definiciones de función de transferencia resultan ser muy similares (pero no idénticas).

La Fig. 4.11 muestra los conceptos de potencia que se emplearán en la discusión. El generador puede suministrar una potencia máxima  $P_{max}$ , pero en general sólo una fracción  $P_1$  de ella entra en la bipuerta, mientras que el resto  $P_r$  de la potencia disponible es reflejada y devuelta al generador<sup>74</sup>. La potencia  $P_1$  transferida a la bipuerta no puede disiparse en ella<sup>75</sup>, pues la bipuerta está constituida únicamente por elementos reactivos (no tiene pérdidas). En régimen estacionario<sup>76</sup> no puede existir una acumulación de energía en la bipuerta, y por tanto, la potencia que entra en la bipuerta por la puerta 1 (es decir,  $P_1$ ) debe ser igual a la potencia que sale de la bipuerta por la puerta 2 (es decir,  $P_2$ ). De esta discusión tenemos por tanto las siguientes relaciones,

$$P_{max} = P_1 + P_r \tag{4.42}$$

y también,



**Figura 4.11: Flujo de potencia en una bipuerta LCM doblemente terminada.**

- 74. Esto es un modelo. En realidad, la potencia reflejada no llega a salir del generador.
- 75. En un circuito real siempre habrá algo de disipación debido a los inevitables parásitos resistivos. En particular, este efecto suele ser apreciable en los inductores y en los transformadores, y normalmente es despreciable en los condensadores.
- 76. Debe remarcarse esto, porque en régimen transitorio si puede haber diferencias entre  $P_1$  y  $P_2$ .

$$P_1 = P_2 \quad (4.43)$$

Es evidente también que la potencia que entra en la bipuerta por la puerta 1 es realmente la única potencia que sale del generador, y que la potencia que sale de la bipuerta 2 es igual a la potencia transferida (que entra) a la carga. La potencia<sup>77</sup> transferida a la carga es fácil de calcular,

$$P_2 = \operatorname{Re}[V_2(-I_2)^*] = \operatorname{Re}\left[V_2 \frac{V_2^*}{Z_L^*}\right] = \frac{|V_2(j\omega)|^2}{R_L} \quad (4.44)$$

Por otra parte, según el teorema de máxima transferencia de potencia, un generador, caracterizado por ejemplo<sup>78</sup> mediante su equivalente Thévenin (fuente de tensión con impedancia de salida), transfiere a su carga la máxima potencia de la que es capaz cuando su impedancia de carga es la conjugada de su impedancia de salida (ver apéndice A.4.5). En nuestro caso, en que la impedancia de salida del generador es puramente resistiva ( $R_S$ ), la impedancia a la entrada<sup>79</sup> de la bipuerta ( $Z_{in}$ ) deberá ser igual a  $R_S$  para alcanzar el máximo de potencia transferida. En este caso, es fácil comprobar que

$$\begin{aligned} P_{max} &= P_1 \Big|_{Z_{in} = R_S} = \operatorname{Re}\left[V_1 I_1^* \Big|_{Z_{in} = R_S}\right] = \\ &= \operatorname{Re}\left[\frac{V_S}{2} \frac{V_S^*}{2R_S}\right] = \frac{|V_S|^2}{4R_S} \end{aligned} \quad (4.45)$$

Obviamente, cuando la potencia transferida a la bipuerta ( $P_1$ ) es máxima,

77. Estamos considerando en todos los casos la potencia “real” en régimen sinusoidal estacionario. La parte imaginaria (potencia reactiva) no nos interesa en este caso.
78. Por el teorema de sustitución, esta elección no supone una pérdida de generalidad (dentro del contexto de circuitos LTI, de parámetros concentrados). También puede utilizarse el equivalente Norton. El resultado es idéntico.
79. La impedancia de carga del generador es la impedancia vista en la puerta 1 de la bipuerta cuando en su puerta 2 hay una impedancia de carga (del filtro) constituida por la resistencia  $R_L$ .

la potencia reflejada ( $P_r$ ) es nula. Es decir, un máximo de transferencia de potencia es equivalente a un **cero de reflexión**. De la misma manera, cuando la potencia reflejada ( $P_r$ ) es máxima, la potencia transferida a la bipuerta ( $P_1$ ) es nula. Es decir, un máximo de reflexión de potencia es equivalente a un **cero de transmisión**.

Si queremos que la magnitud<sup>80</sup> en régimen sinusoidal estacionario<sup>81</sup> de nuestra **función de transferencia** sea máxima cuando la transferencia de potencia sea máxima, y que este máximo sea igual a la unidad<sup>82</sup>, definiremos (la magnitud al cuadrado<sup>83</sup> de) la función de transferencia (el cuadrado de su magnitud en régimen sinusoidal estacionario) como el cociente entre la potencia transferida y la potencia máxima transferible en régimen sinusoidal estacionario, es decir,

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{P_1}{P_{max}} = \frac{P_2}{P_{max}} = \frac{4R_S}{R_L} \left| \frac{V_2(j\omega)}{V_S(j\omega)} \right|^2 \quad (4.46)$$

Nótese que la forma en que se ha definido esta función de transferencia es diferente a la utilizada habitualmente. En concreto, si definimos

$$|H'(j\omega)| = \left| \frac{V_2(j\omega)}{V_S(j\omega)} \right| \quad (4.47)$$

tendremos

80. Aquí queda de nuevo patente que estamos buscando la realización de filtros cuyas especificaciones más relevantes son las de magnitud, entendiéndose que las especificaciones de fase no son importantes (p.e. aplicaciones de audio) o que si lo fueran se atenderían posteriormente utilizando, si fuera necesario, ecualizadores de fase (filtros pasa-todo) en cascada con los filtros encargados de satisfacer las especificaciones de magnitud.
81. Estas relaciones deben entenderse en el dominio de la frecuencia en régimen sinusoidal estacionario, o en el dominio del tiempo en valores eficaces (r.m.s) ó de amplitud (son proporcionales, y por tanto no afectará a las relaciones). En general, la relación de transferencia de potencias instantáneas no será invariante en el tiempo, ni en régimen transitorio, ni en régimen sinusoidal estacionario (habría variaciones periódicas). Por otra parte, las especificaciones en magnitud y en fase de la función de transferencia se dan siempre en régimen sinusoidal estacionario ( $s = j\omega$ ).

$$|H(j\omega)| = \left| \frac{V_2(j\omega)}{V_S(j\omega)} \right| = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R_L}{R_S}} |H(j\omega)| \quad (4.48)$$

por lo que los máximos de  $|H(j\omega)|$  no serán iguales a la unidad en general, sino a  $0.5 \sqrt{R_L/R_S}$ . Esto no tiene demasiada importancia en general, sobre todo si el filtro pasivo se diseña como prototipo para una emulación activa posterior.

Aún puede considerarse una tercera definición de función de transferencia,

$$|H''(j\omega)| = \left| \frac{V_2(j\omega)}{V_1(j\omega)} \right| \quad (4.49)$$

es decir, como la relación de tensiones a la entrada (puerta 1) y a la salida (puerta 2) de la bipuerta. Esta definición, que será útil en una sección posterior<sup>84</sup>, es diferente (en general) a las dos anteriores en algo más que un factor de proporcionalidad independiente de la frecuencia. Sólo en circunstancias específicas (cuando la impedancia de entrada de la bipuerta es resistiva, haciendo que  $|V_S(j\omega)|$  y  $|V_1(j\omega)|$  sean proporcionales) habrá una relación de proporcionalidad independiente de la frecuencia.

Por otra parte, teniendo en cuenta que la potencia transferida a la bipuerta será la diferencia entre la potencia máxima y la reflejada (ver (4.42)), podremos escribir también (4.46) como

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{P_1}{P_{max}} = \frac{P_{max} - P_r}{P_{max}} = 1 - \frac{P_r}{P_{max}} \quad (4.50)$$

82. Este aspecto es en realidad irrelevante. El asignarle un valor unidad es un convenio de normalización. Lo que sí es importante es que el máximo de la magnitud de la f.d.t. se corresponda con un cero de reflexión (por los beneficios en cuanto a sensibilidad), y que la magnitud de la f.d.t. sea proporcional a la relación de magnitudes entre la tensión de salida y la de entrada.

Esto da pie a la introducción del concepto de **coeficiente de reflexión**<sup>85</sup> (en realidad el cuadrado de su magnitud en régimen sinusoidal estacionario) como

$$|\rho(j\omega)|^2 = \frac{P_r}{P_{max}} \quad (4.51)$$

lo que permite escribir (4.50) como

$$|H(j\omega)|^2 = 1 - |\rho(j\omega)|^2 \quad (4.52)$$

Esta ecuación es una forma alternativa de la ecuación de Feldtkeller en la que se emplea el coeficiente de reflexión en lugar de la función característica.

Utilizando la forma convencional de la ecuación de Feldtkeller en base a la **función característica** (en realidad al cuadrado de su magnitud en régimen sinusoidal estacionario),

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + |K(j\omega)|^2} \quad (4.53)$$

podemos obtener

83. El hecho de que sea el cuadrado de la magnitud (y no la magnitud a secas) no tiene demasiada relevancia. En escala logarítmica esto significa solamente un escalado por un factor 2. Haciéndolo así se consigue que la relación entre las tensiones de salida  $|V_2(j\omega)|$  y entrada  $|V_S(j\omega)|$  sea proporcional a la f.d.t. definida en base a la (raíz cuadrada de la) relación de transferencia de potencias promedio en r.s.e. La constante de proporcionalidad, independiente de la frecuencia (compleja ó real), será distinta de cero y distinta de infinito si el filtro es realmente “doblemente terminado”, es decir, si tanto la resistencia de carga como la de fuente son distintas de cero y de infinito. La relación de transferencia de potencia no tiene sentido en bipuertas sin terminaciones resistivas o terminación simple, ya que o bien el generador es una fuente de tensión o intensidad ideal sin limitación de potencia, o la carga es un abierto o un corto, por lo que no se necesita potencia para mantener una tensión o intensidad distinta de cero (no se le puede transferir ninguna potencia).

84. En la sección 4.4: “Realización de filtros pasa-todo LC doblemente terminados”

$$|K(j\omega)|^2 = \frac{1}{|H(j\omega)|^2} - 1 = \frac{P_{max}}{P_1} - 1 = \frac{P_{max} - P_1}{P_1} = \frac{P_r}{P_1} \quad (4.54)$$

es decir, que la función característica (el cuadrado de su magnitud en régimen sinusoidal estacionario) es igual a la relación entre potencia reflejada y potencia transmitida.

Combinando las dos formas alternativas de la ecuación de Feldtkeller, (4.52) y (4.53), podemos obtener fácilmente las siguientes relaciones,

$$\begin{aligned} |H(j\omega)|^2 &= \frac{1}{1 + |K(j\omega)|^2} = 1 - |\rho(j\omega)|^2 \\ |\rho(j\omega)|^2 &= \frac{|K(j\omega)|^2}{1 + |K(j\omega)|^2} = 1 - |H(j\omega)|^2 \\ |K(j\omega)|^2 &= \frac{|\rho(j\omega)|^2}{1 - |\rho(j\omega)|^2} = \frac{1}{|H(j\omega)|^2} - 1 \end{aligned} \quad (4.55)$$

y también,

$$|K(j\omega)|^2 = \frac{|\rho(j\omega)|^2}{|H(j\omega)|^2} \quad (4.56)$$

Estas ecuaciones, en particular la (4.55), demuestran que en lo referente a la magnitud sólo una de las tres funciones (de magnitud) es independiente: conocida una de ellas, son conocidas las otras dos.

El hecho de haber basado nuestras definiciones de función de transferencia (en magnitud en r.s.e.) y coeficiente de reflexión en base a la transferencia o reflexión de potencia en relación a la potencia máxima transferible (o “reflejable”) hace prever que las magnitudes de estas funciones estarán acotadas entre cero y uno en cualquier caso real de filtro LC doblemente terminado. Esto es coherente con la utilización de la ecuación de Feldtkeller, en cualquiera de sus dos formas, y con el hecho de que el cuadrado de la 85. El “coeficiente” de reflexión es en realidad una función de la variable compleja, igual que la función de transferencia y la función característica.

magnitud de las funciones de transferencia no puede ser negativo. Este último hecho hace fácil deducir, a partir de (4.55), que en efecto las magnitudes de la función de transferencia y del coeficiente de reflexión están acotadas entre 0 y 1, pero que la de la función característica puede tomar valores entre 0 y infinito. La magnitud de la función de transferencia será nula en los ceros de transmisión, y máxima (uno) en los ceros de reflexión. La magnitud del coeficiente de reflexión será nula en los ceros de reflexión y máxima (uno) en los ceros de transmisión. La magnitud de la función característica será nula en los ceros de reflexión, e infinita en los ceros de transmisión.

Podemos encontrar otras expresiones para las magnitudes de la función de transferencia, coeficiente de reflexión y función característica en base a la impedancia vista a la entrada (puerta 1) de la bipuerta cuando en su salida (puerta 2) hay una carga resistiva  $R_L$ ,

$$Z_{in}(j\omega) = \left. \frac{V_1(j\omega)}{I_1(j\omega)} \right|_{\substack{V_2 \\ I_2} = -R_L} \quad (4.57)$$

Esta impedancia (evaluada en r.s.e.) será compleja en general. La potencia que entra a la bipuerta por su puerta de entrada puede evaluarse como

$$\begin{aligned} P_1 &= \text{Re}[V_1 I_1^*] = \text{Re}[I_1 I_1^* Z_{in}] = \text{Re}[|I_1(j\omega)|^2 Z_{in}(j\omega)] = \\ &= \text{Re} \left[ \frac{|V_S|^2 Z_{in}(j\omega)}{|R_S + Z_{in}(j\omega)|^2} \right] = \frac{|V_S|^2 \text{Re}[Z_{in}(j\omega)]}{|R_S + Z_{in}(j\omega)|^2} \end{aligned} \quad (4.58)$$

De donde podemos obtener, utilizando (4.45),

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{P_1}{P_{max}} = \frac{4R_S \text{Re}[Z_{in}(j\omega)]}{|R_S + Z_{in}(j\omega)|^2} \quad (4.59)$$

Esta expresión puede escribirse también como

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{4R_S \operatorname{Re}[Z_{in}(j\omega)]}{|R_S + Z_{in}(j\omega)|^2} = 1 - \frac{|R_S - Z_{in}(j\omega)|^2}{|R_S + Z_{in}(j\omega)|^2} \quad (4.60)$$

que, recordando (4.52), nos lleva a,

$$|\rho(j\omega)|^2 = \frac{P_r}{P_{max}} = \frac{|R_S - Z_{in}(j\omega)|^2}{|R_S + Z_{in}(j\omega)|^2} \quad (4.61)$$

que también podría obtenerse partir de las expresiones de cada una de las potencias, en forma similar a como se ha obtenido (4.59). De manera similar, es fácil obtener para la función característica,

$$|K(j\omega)|^2 = \frac{P_r}{P_1} = \frac{|R_S - Z_{in}(j\omega)|^2}{4R_S \operatorname{Re}[Z_{in}(j\omega)]} \quad (4.62)$$

Por otra parte, las relaciones (4.55) y (4.56) permiten escribir

$$\begin{aligned} |H(j\omega)|^2 &= \frac{|N(j\omega)|^2}{|D(j\omega)|^2} \\ |\rho(j\omega)|^2 &= \frac{|\hat{F}(j\omega)|^2}{|D(j\omega)|^2} \\ |K(j\omega)|^2 &= \frac{|\hat{F}(j\omega)|^2}{|N(j\omega)|^2} \end{aligned} \quad (4.63)$$

donde

$$|\hat{F}(j\omega)|^2 = |D(j\omega)|^2 - |N(j\omega)|^2 \quad (4.64)$$

Hasta ahora no hemos hecho ninguna restricción a la posición de los ceros de reflexión ni de los ceros de transmisión en el plano complejo.

Sí deberemos hacer, en cualquier caso, una restricción a la posición de los polos del filtro, ya que por ser el sistema pasivo, será estable, y por tanto sus polos tendrán que estar en el semiplano izquierdo.

Suponiendo que los ceros de transmisión y los de reflexión **estén todos en el eje imaginario**, las expresiones (4.63) pueden extenderse a todo el plano complejo, por continuación analítica, dando como resultado,<sup>86</sup>

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{N(s)}{D(s)} \\ \rho(s) &= \frac{\hat{F}(s)}{D(s)} \\ K(s) &= \frac{\hat{F}(s)}{N(s)} \end{aligned} \quad (4.65)$$

y por tanto,

$$K(s) = \frac{\rho(s)}{H(s)} \quad (4.66)$$

que es la versión correspondiente a (4.56) en el plano complejo. También, a partir de (4.46) tendremos,

$$H(s) = \sqrt{\frac{4R_S V_2(s)}{R_L V_S(s)}} \quad (4.67)$$

y a partir de (4.61),

$$\rho(s) = \pm \frac{R_S - Z_{in}(s)}{R_S + Z_{in}(s)} \quad (4.68)$$

86. Este paso puede hacerse de un única manera si se exige que todos los ceros de transmisión y de reflexión estén en el eje imaginario, y por supuesto exigiendo que la función de transferencia resultante sea estable (nuestro sistema será estable necesariamente porque es pasivo). Estas condiciones permiten obtener de forma unívoca, y respectivamente,  $N(s)$ ,  $\hat{F}(s)$  y  $D(s)$  a partir de  $|N(j\omega)|^2$ ,  $|\hat{F}(j\omega)|^2$  y  $|D(j\omega)|^2$ . Sin embargo, existirán múltiples soluciones para  $N(s)$  (o para  $\hat{F}(s)$ ) si los ceros de transmisión (o los de reflexión) no estuvieran todos en el eje imaginario. También existirían múltiples soluciones para  $D(s)$  si admitiéramos la posibilidad de inestabilidad, pero esto no tiene utilidad en nuestro contexto. En régimen sinusoidal estacionario (si lo hubiera), las diferentes opciones diferirían sólo en la fase, y no en la magnitud. En cualquier caso, la elección de raíces debe agrupar siempre a las raíces complejas conjugadas para que los polinomios resultantes tengan coeficientes reales.

### 4.3.6 Relaciones entre parámetros de transducción y de inmitancia

Las relaciones existentes entre los parámetros de inmitancia de la bipuerta y los parámetros de transducción del filtro constituido por la bipuerta, el generador y la carga, pueden derivarse fácilmente a partir del análisis del circuito y de las definiciones hechas en la sección anterior (ver apéndice A.4.6). Los resultados son los siguientes,

$$H(s) = \frac{2\sqrt{R_S R_L} z_{12}}{(R_S + z_{11})(R_L + z_{22}) - z_{12}^2} = \frac{-2\sqrt{G_S G_L} y_{12}}{(G_S + y_{11})(G_L + y_{22}) - y_{12}^2} \quad (4.69)$$

$$\rho(s) = \frac{(R_S - z_{11})(R_L + z_{22}) + z_{12}^2}{(R_S + z_{11})(R_L + z_{22}) - z_{12}^2} = -\frac{(G_S - y_{11})(G_L + y_{22}) + y_{12}^2}{(G_S + y_{11})(G_L + y_{22}) - y_{12}^2} \quad (4.70)$$

$$K(s) = \frac{(R_S - z_{11})(R_L + z_{22}) + z_{12}^2}{2\sqrt{R_S R_L} z_{12}} = \frac{(G_S - y_{11})(G_L + y_{22}) + y_{12}^2}{2\sqrt{G_S G_L} y_{12}} \quad (4.71)$$

Otros resultados del análisis directo del circuito (ver Fig. 4.11), son los siguiente,

$$Z_{in}(s) = z_{11} - \frac{z_{12}^2}{z_{22} + R_L} \quad (4.72)$$

$$H'(s) = \frac{V_2(s)}{V_S(s)} = \frac{R_L z_{12}}{(R_S + z_{11})(R_L + z_{22}) - z_{12}^2} \quad (4.73)$$

$$H''(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{R_L z_{12}}{z_{11}(z_{22} + R_L) - z_{12}^2} \quad (4.74)$$

Observando (4.69), (4.70) y (4.71), es fácil ver que sólo dos de los parámetros de transducción son independientes, como por otra parte era de esperar a la vista de (4.66). Esto significa que en general no podremos invertirlas directamente para obtener los tres parámetros de inmitancia en función de los tres parámetros de transducción. Sin embargo, aprovechando el conocimiento que tenemos de la bipuerta que estamos buscando (bipuerta LCM) y en particular, sabiendo que los tres parámetros de inmitancia deberán ser funciones impares de  $s$ , podemos hacer una descomposición de las ecuaciones anteriores en su parte par e impar. En particular, eligiendo las relaciones para  $K(s)$  y  $H(s)$  como las dos independientes, y separando la función característica  $K(s)$  y la atenuación<sup>87</sup>

$$A(s) = \frac{1}{H(s)} = \frac{D(s)}{N(s)} \quad (4.75)$$

en sus partes par e impar tendremos cuatro ecuaciones con tres incógnitas<sup>88</sup>.

El sistema resulta ser compatible “afortunadamente”, y tras resolverlo se obtienen los siguientes resultados (ver apéndice A.4.6),

$$\begin{aligned} z_{11} &= R_S \frac{A_p - K_p}{A_i + K_i} \\ z_{22} &= R_L \frac{A_p + K_p}{A_i + K_i} \\ z_{12} &= \frac{\sqrt{R_S R_L}}{A_i + K_i} \end{aligned} \quad (4.76)$$

87. La atenuación es la inversa de la función de transferencia. Esta figura era más usada antiguamente en el contexto de los filtros pasivos RLC, y aún sigue siendo utilizada con cierta frecuencia. Las expresiones **polos de atenuación** y **ceros de atenuación** son sinónimos de ceros de transmisión y de polos del filtro, respectivamente.

88. Resulta más fácil separar las partes par e impar de la atenuación que las de la función de transferencia.

$$\begin{aligned}
 y_{11} &= G_S \frac{A_p + K_p}{A_i - K_i} \\
 y_{22} &= G_L \frac{A_p - K_p}{A_i - K_i} \\
 y_{12} &= \frac{-\sqrt{G_S G_L}}{A_i - K_i}
 \end{aligned} \tag{4.77}$$

Teniendo en cuenta nuestra elección de que todos los ceros de transmisión estén en el eje imaginario,  $N(s)$  será par o impar. Esto puede ser aprovechado para escribir las relaciones anteriores directamente en función de los polinomios  $N(s)$ ,  $D(s)$  y  $\hat{F}(s)$ , pero será necesario distinguir ambos casos porque las expresiones resultantes no son iguales.

Si  $N(s)$  es par, tendremos,

$$\begin{aligned}
 z_{11}(s) &= R_S \frac{D_p(s) - \hat{F}_p(s)}{D_i(s) + \hat{F}_i(s)} \\
 z_{22}(s) &= R_L \frac{D_p(s) + \hat{F}_p(s)}{D_i(s) + \hat{F}_i(s)} \\
 z_{12}(s) &= \sqrt{R_S R_L} \frac{N(s)}{D_i(s) + \hat{F}_i(s)} \\
 y_{11}(s) &= G_S \frac{D_p(s) + \hat{F}_p(s)}{D_i(s) - \hat{F}_i(s)} \\
 y_{22}(s) &= G_L \frac{D_p(s) - \hat{F}_p(s)}{D_i(s) - \hat{F}_i(s)} \\
 y_{12}(s) &= -\sqrt{G_S G_L} \frac{N(s)}{D_i(s) - \hat{F}_i(s)}
 \end{aligned} \tag{4.78}$$

$$\begin{aligned}
 y_{11}(s) &= G_S \frac{D_p(s) + \hat{F}_p(s)}{D_i(s) - \hat{F}_i(s)} \\
 y_{22}(s) &= G_L \frac{D_p(s) - \hat{F}_p(s)}{D_i(s) - \hat{F}_i(s)} \\
 y_{12}(s) &= -\sqrt{G_S G_L} \frac{N(s)}{D_i(s) - \hat{F}_i(s)}
 \end{aligned} \tag{4.79}$$

mientras que si  $N(s)$  es impar tendremos,

$$\begin{aligned}
 z_{11}(s) &= R_S \frac{D_i(s) - \hat{F}_i(s)}{D_p(s) + \hat{F}_p(s)} \\
 z_{22}(s) &= R_L \frac{D_i(s) + \hat{F}_i(s)}{D_p(s) + \hat{F}_p(s)} \\
 z_{12}(s) &= \sqrt{R_S R_L} \frac{N(s)}{D_p(s) + \hat{F}_p(s)} \\
 y_{11}(s) &= G_S \frac{D_i(s) + \hat{F}_i(s)}{D_p(s) - \hat{F}_p(s)} \\
 y_{22}(s) &= G_L \frac{D_i(s) - \hat{F}_i(s)}{D_p(s) - \hat{F}_p(s)} \\
 y_{12}(s) &= -\sqrt{G_S G_L} \frac{N(s)}{D_p(s) - \hat{F}_p(s)}
 \end{aligned} \tag{4.80}$$

$$\begin{aligned}
 y_{11}(s) &= G_S \frac{D_i(s) + \hat{F}_i(s)}{D_p(s) - \hat{F}_p(s)} \\
 y_{22}(s) &= G_L \frac{D_i(s) - \hat{F}_i(s)}{D_p(s) - \hat{F}_p(s)} \\
 y_{12}(s) &= -\sqrt{G_S G_L} \frac{N(s)}{D_p(s) - \hat{F}_p(s)}
 \end{aligned} \tag{4.81}$$

Los resultados anteriores se resumen en la Tabla 4.1. Nótese que, en cualquier filtro paso de baja (y por tanto para cualquier LPP),  $N(s)$  será par, ya que un LP no puede tener ceros de transmisión en cero. Por tanto, este será el caso más usado.

Nótese también que, tanto para los parámetros de impedancia como para los de admitancia, y tanto en el caso de numerador par como de numerador impar, el denominador de los tres parámetros de inmitancia es el mismo. Por tanto, en general sólo habrá polos privados en infinito<sup>89</sup>.

Otro aspecto a notar es que el numerador de la transinmitancia coincide con el numerador de la función de transferencia. Esto quiere decir que todos

89. Salvo cancelaciones entre el numerador y el denominador de algún parámetro de inmitancia.

**Tabla 4.1: Expresiones de los parámetros de inmitancia en función de los de transducción para bipuertas LCM.**

|                             | $\frac{z_{11}}{R_S}$                      | $\frac{z_{22}}{R_L}$                      | $\frac{z_{12}}{\sqrt{R_S R_L}}$ | $\frac{y_{11}}{G_S}$                      | $\frac{y_{22}}{G_L}$                      | $\frac{y_{12}}{\sqrt{G_S G_L}}$ |
|-----------------------------|---|---|---------------------------------|---|---|---------------------------------|
| Expresión General           | $\frac{A_p - K_p}{A_i + K_i}$             | $\frac{A_p + K_p}{A_i + K_i}$             | $\frac{1}{A_i + K_i}$           | $\frac{A_p + K_p}{A_i - K_i}$             | $\frac{A_p - K_p}{A_i - K_i}$             | $\frac{-1}{A_i - K_i}$          |
| Si $N(s)$ es un pol. par:   | $\frac{D_p - \hat{F}_p}{D_i + \hat{F}_i}$ | $\frac{D_p + \hat{F}_p}{D_i + \hat{F}_i}$ | $\frac{N}{D_i + \hat{F}_i}$     | $\frac{D_p + \hat{F}_p}{D_i - \hat{F}_i}$ | $\frac{D_p - \hat{F}_p}{D_i - \hat{F}_i}$ | $\frac{-N}{D_i - \hat{F}_i}$    |
| Si $N(s)$ es un pol. impar: | $\frac{D_i - \hat{F}_i}{D_p + \hat{F}_p}$ | $\frac{D_i + \hat{F}_i}{D_p + \hat{F}_p}$ | $\frac{N}{D_p + \hat{F}_p}$     | $\frac{D_i + \hat{F}_i}{D_p - \hat{F}_p}$ | $\frac{D_i - \hat{F}_i}{D_p - \hat{F}_p}$ | $\frac{-N}{D_p - \hat{F}_p}$    |

los ceros de transmisión finitos serán también ceros de la transinmitancia<sup>90</sup>. No tiene porqué ocurrir lo mismo con los ceros de transmisión en infinito.

Finalmente, nótese también que, puesto que también nos hemos restringido al caso de que los ceros de reflexión estén todos en el eje imaginario,  $\hat{F}(s)$  también será par o impar. Es fácil ver, por tanto, que si las paridades de  $N(s)$  y  $\hat{F}(s)$  son contrarias<sup>91</sup>, y si  $R_S = R_L$ , la bipuerta será simétrica (es decir, que se cumplirá que  $z_{11} = z_{22}$  y también que  $y_{11} = y_{22}$ ). El que la bipuerta sea o no simétrica tendrá consecuencias claras en la circuitería que la realice<sup>92</sup>.

90. Salvo cancelaciones polo-cero en la transinmitancia.

91. Aunque el número de ceros de reflexión y de transmisión (contando los que haya en infinito) debe coincidir en cualquier función de transferencia, y aunque ambos polinomios sean o par o impar, no tiene porqué ser cierto que la “paridad” de los dos polinomios coincida, porque los ceros de reflexión o de transmisión en infinito no son raíces de los polinomios.

92. La circuitería tendrá que ser simétrica también. Esto puede simplificar en algunos casos el problema de la realización.

### 4.3.7 Realización de bipuertas LC en escalera

Esta es la sección clave de este capítulo, y a la que se han orientado todas las anteriores. Nuestro problema es, conocidos los parámetros de inmitancia de una bipuerta<sup>93</sup> LCM, obtener la realización a nivel de circuito.

Está claro que si elegimos cualquiera de los cuatro parámetros que son realmente inmitancias ( $z_{11}$ ,  $z_{22}$ ,  $y_{11}$ ,  $y_{22}$ ), y seguimos alguno de los procedimientos de síntesis de monopuertas descritos anteriormente, acabaremos consiguiendo una monopuerta con ese parámetro de inmitancia. El procedimiento se fundamenta en ésto, y a la inmitancia elegida se le denomina **inmitancia de síntesis**<sup>94</sup>.

La cuestión es cómo obtener una bipuerta a partir de la monopuerta, y cómo asegurar que esa bipuerta tenga también los otros dos parámetros de inmitancia deseados. Vamos a abordar estas dos preguntas por separado: a) cómo elegir la segunda puerta, y b) cómo garantizar la realización simultánea de los tres parámetros de inmitancia.

La elección de la segunda puerta se hará de la siguiente manera. El proceso de realización de la inmitancia de síntesis producirá una estructura en escalera<sup>95</sup>. La última rama (eliminación de polo) será una rama serie (eliminación de un polo de impedancia), o una rama paralelo (eliminación de un polo de admitancia). En cualquier caso, aunque la última rama se corresponda con la eliminación de un polo de impedancia, esta última rama deberá ponerse en “paralelo” para que sea observable desde la monopuerta

93. Se asumirá que la bipuerta es realizable LCM. En realidad, siempre será interesante comprobarlo antes de comenzar el proceso de realización.

94. Más adelante se darán algunas recomendaciones sobre la elección que puede resultar más conveniente en el sentido de facilitar la realización. No obstante, cualquiera de las cuatro alternativas será viable (de hecho, una vez realizada la bipuerta en base a alguna elección, puede “reproducirse” el proceso de realización que hubiera resultado de elegir cualquiera de los cuatro parámetros de inmitancia).

95. Se utilizan técnicas de realización en escalera (todas las vistas hasta ahora son de hecho realizaciones en escalera) porque esto facilita la creación de los ceros de la transinmitancia, como se verá pronto.

(puerta correspondiente a la inmitancia de síntesis). La cuestión es dónde elegir la segunda puerta. Si la inmitancia de síntesis es una impedancia, ésta deberá obtenerse con la otra puerta (la que estamos buscando) en circuito abierto. Si la inmitancia de síntesis era una admitancia, ésta deberá realizarse con “la otra puerta” en cortocircuito. Por tanto, en el caso de impedancia de síntesis, la segunda puerta habría que buscarla entre cualquier par de nudos (añadiendo una fuente de intensidad de valor cero, sin modificar el circuito). Por el contrario, en el caso de admitancia de síntesis, la segunda puerta habría que buscarla en cualquier rama (añadiendo una fuente de tensión de valor cero, sin modificar el circuito).

En cualquiera de los dos casos lo haremos en la última rama implementada. En el caso de impedancia de síntesis, elegiremos la segunda puerta entre los nudos correspondientes a la última rama empleada en la síntesis de la inmitancia de síntesis, que siempre estará en paralelo como ya hemos dicho. En el caso de admitancia de síntesis, la última puerta la tomaremos en la unión entre la última rama empleada en la síntesis de la inmitancia de síntesis y el nudo común de la primera puerta.

Las razones para estas elecciones se basan en la conveniencia de realizar simultáneamente (junto con la inmitancia de síntesis) la transinmitancia de la bipuerta<sup>96</sup>. Por una parte, se busca que la transinmitancia tenga los polos que debe tener. Esto sin embargo es fácil de conseguir. Los polos de un circuito no dependen de la salida elegida ni de cuál de las fuentes de excitación existentes<sup>97</sup> sea la considerada como entrada<sup>98</sup>. Por tanto, si la inmitancia de síntesis ha sido realizada, y en el conjunto de sus polos se encuentran todos los polos de la transinmitancia<sup>99</sup>, los polos de la transinmitancia<sup>96</sup>. También buscaremos la realización simultánea de la inmitancia de la otra puerta, pero vayamos por partes. De momento fijémonos en la transinmitancia.

97. Se puede considerar que en el circuito hay muchas fuentes de excitación, todas ellas de valor cero salvo la que estemos considerando como entrada en ese momento. Entre cualquier par de nudos podemos insertar una fuente de intensidad de valor cero sin afectar al circuito (de hecho podemos considerar que estaba ya ahí). En cualquier rama podemos insertar una fuente de tensión de valor cero sin modificar el circuito (de hecho podemos considerar que estaba ya ahí).

tancia habrán sido ya realizados, y esto será independiente de dónde tomemos la salida de la transinmitancia (la segunda puerta). Aparte de asegurarnos de que la transinmitancia tiene los polos que debe tener, habrá que tener en cuenta algunas medidas adicionales para asegurar que **sólo** tenga esos polos. En relación a los ceros de la transinmitancia, la cuestión es diferente. Para que la bipuerta realizada tenga, en su transinmitancia, los ceros oportunos, deberemos haber hecho eliminaciones de polos en el proceso de síntesis de la inmitancia de síntesis en las frecuencias oportunas, y para ello nos valdremos cuando haga falta de las técnicas de desplazamiento de ceros mediante eliminación parcial de polos vista anteriormente. Posicionando un cero en el sitio adecuado, en el siguiente paso de realización invertimos la inmitancia restante y eliminamos el polo que aparecerá en la posición en la que había un cero.

Para comprender que los ceros de transinmitancia deben crearse mediante eliminaciones de polos, es necesario analizar las posibles causas de creación de **ceros de transmisión** en el filtro realizado con la bipuerta que estamos buscando (y sus resistencias terminales).

#### 4.3.7.1 Ceros de transmisión y parámetros de inmitancia

A partir de las ecuaciones que expresan la función de transferencia<sup>100</sup> en función de los parámetros de inmitancia (ver (4.69)), es relativamente fácil comprobar que puede haber tres causas, y sólo estas tres, para la aparición de un cero de transmisión en el filtro LC doblemente terminado.

98. Existen excepciones. Por ejemplo los polos debidos a elementos o a agrupaciones de elementos (monopuertas) que estén en serie con la fuente de excitación en intensidad, y los polos debidos a elementos o a agrupaciones de elementos (monopuertas) que estén en paralelo con la fuente de excitación en tensión.
99. Recuérdese que los polos de la transinmitancia son todos compartidos. Los polos de cualquiera de las dos inmitancias pueden ser privados. Estos polos privados son de hecho excepciones a la regla general de que los polos son independientes de la entrada y la salida concretas.
100. También puede hacerse a partir de la expresión de la función característica en función de los parámetros de inmitancia (4.71).

## A) Un cero de la transinmitancia

Un cero de transinmitancia **siempre** crea un cero de transmisión. La única razón por la que, siendo nula la transinmitancia (es decir, el “numerador”<sup>101</sup> de (4.69)), la función de transferencia podría no ser cero es porque el “denominador” de la expresión<sup>102</sup>  $(R_S + z_{11})(R_L + z_{22}) - z_{12}^2$  sea también nulo. Puesto que  $z_{12}$  es cero, esto obliga a que el primer sumando del “denominador” sea nulo, lo que a su vez obliga a que  $(R_S + z_{11})$  y/o  $(R_L + z_{22})$  sean nulos, pero esto es imposible porque los ceros de  $z_{12}$  están todos en el eje imaginario (por ser la bipuerta LCM), en donde, por ser todos los parámetros de inmitancia impares, son imaginarios puros, mientras que los valores de las resistencias son reales.

## B) Un polo privado

Un polo privado **siempre** crea un cero de transmisión. Es fácil comprobarlo observando que si alguna de las inmitancias tiende a infinito cuando la transinmitancia es finita (polo privado), la función de transferencia tenderá a cero. También es fácil comprobar que si ambas inmitancias tienden a infinito a una frecuencia a la que la transinmitancia es finita (polo privado “doble”<sup>103</sup>), el cero de la función de transferencia será de “segundo orden”, es decir, habrá dos ceros a esa frecuencia, o si se prefiere, un único cero doble.

No hay ninguna posibilidad de que un polo privado no cree un cero de transmisión porque al ser la transinmitancia finita, ni el “numerador” puede

101. Estos numeradores y denominadores no son polinomios, sino funciones racionales, pero esto no afecta a la discusión. Por otra parte, estamos suponiendo que las resistencias/conductancias terminales no son ni infinitas ni nulas, como corresponde a una realización LC doblemente terminada.
102. Se está utilizando la expresión en función de los parámetros de impedancia. El razonamiento es aplicable igualmente a la expresión en función de los parámetros de admitancia.
103. Si una cierta frecuencia fuese polo privado de ambas inmitancias, habría dos ceros de transmisión a esa frecuencia (un cero doble). Como se comentó antes, esto puede interpretarse de dos maneras: a) como un par de ceros creados por un par de polos privados a la misma frecuencia (sin que consideremos que a esa frecuencia existe un polo no compacto), y b) como un par de ceros creados por un único polo privado a esa frecuencia (un cero) que además es no compacto (otro cero).

ser infinito ni puede haber cancelación en el “denominador” (esto es fácil de comprobar tomando por separado las partes real e imaginaria de denominador (con la transinmitancia nula), y teniendo en cuenta que los residuos de las inmitancias son ambos positivos).

## C) Un polo compartido no compacto

Un polo compartido no compacto **siempre** crea un cero de transmisión. Esto puede comprobarse observando que tanto el “numerador” como el denominador tenderán a infinito en cualquier polo compartido. Si el polo es no compacto, el denominador tenderá a “un infinito de segundo orden”, mientras que el numerador sólo a “un infinito de primer orden”. Por tanto, cualquier polo compartido no compacto creará un cero de transmisión.

Sin embargo, puede comprobarse que si el polo es compacto, se produce una cancelación de los residuos en la expresión del “denominador” que hace que resulte en una tendencia a “un infinito de primer orden”, que se cancela con la del numerador, resultando un valor no nulo (y por supuesto finito) para la función de transferencia.

Para comprobar esto, basta “sustituir mentalmente” los parámetros de inmitancia por sus expresiones expandidas en fracciones simples en la función de transferencia, hacer el límite al tender la variable compleja hacia el polo<sup>104</sup> y despreciar los sumandos que no tiendan a infinito.

Es importante remarcar este último resultado: **un polo compartido compacto nunca crea un cero de transmisión.**

También es importante recordar aquí las conclusiones de la sección anterior en lo referente a las posiciones esperables para polos privados y en lo referente a los ceros de la transinmitancia.

Hemos visto que, puesto que los denominadores de los tres parámetros de inmitancia son iguales (ver Tabla 4.1), sólo puede haber polos privados en infinito (salvo excepciones<sup>105</sup>). Es decir, que todos los polos finitos<sup>106</sup>

104. Todos estos “límites” pueden hacerse “en la frecuencia real” (es decir, en el eje imaginario), ya que los polos de los parámetros de inmitancia de las bipuertas LCM están todos en el eje imaginario.

serán compartidos (salvo excepciones). Por otra parte, la transinmitancia tiene ceros en todos los ceros de transmisión finitos (salvo excepciones<sup>107</sup>), porque su numerador es el numerador  $N(s)$  de la función de transferencia. Estos ceros de la transinmitancia crean, según hemos visto, ceros de transmisión, cosa bastante coherente con lo anterior. Lo interesante es que esto excluye la posibilidad de que los ceros de transmisión finitos puedan ser debidos a otra razón que la de ser cero de la transinmitancia (salvo excepciones), ya que si alguno de los ceros de transmisión (finitos) de la función de transferencia fuera debido a un polo privado o a un polo compartido no compacto, este cero debería ser doble, ya que además de ser debido a un polo privado o compartido no compacto también aparecería en  $N(s)$ . Si aceptamos que sea doble, el mismo argumento llevaría a que tiene que ser triple, y así recursivamente, lo que es absurdo porque el número de ceros de transmisión es finito. Ya sabíamos que los polos finitos tenían que ser compartidos, porque los polos privados sólo podían estar en infinito (salvo excepciones). Ahora sabemos, además, que todos los polos finitos son compartidos compactos (salvo excepciones). En otras palabras, los polos privados y los polos compartidos no compactos (es decir, los ceros de transmisión no debidos a ceros de la transinmitancia), si existen, estarán en infinito (salvo excepciones). En resumen: **todos los polos finitos son compartidos compactos** (salvo excepciones).

#### 4.3.7.2 Ceros de transmisión y estructura de la bipuerta en escalera

En una estructura en escalera, hay un nudo común a las dos puertas de la bipuerta. La señal podrá pasar desde el generador a la carga (desde la puerta 1 a la 2) sólo por un camino, a través de las ramas serie y paralelo de la

105. Cancelaciones polo-cero en el parámetro de transinmitancia, y eventualmente también (si no sería un polo privado doble) en alguno de los parámetros de inmitancia.
106. Esto incluye a los polos en cero. En esta discusión, “finito” tiene su sentido habitual (todo lo que no es infinito)
107. Las mismas consideraciones que en la nota anterior.

escalera. Podemos intuir que si alguna de las ramas serie resuena en impedancia (tiene impedancia infinita a cierta frecuencia, es decir, es un abierto) se interrumpirá el único camino de señal entre las dos puertas, la salida no recibirá ninguna energía, y por tanto la tensión/intensidad de salida en régimen sinusoidal estacionario serán nulas, es decir, habrá un cero de transmisión a esa frecuencia. De la misma manera, si alguna de las ramas paralelo resuena en admitancia (tiene admitancia infinita a cierta frecuencia, es decir, es un corto) se interrumpirá el único camino de señal entre las dos puertas, y por tanto habrá también un cero de transmisión a esa frecuencia. Esto puede comprobarse fácilmente utilizando expresiones simples de funciones de transferencia parciales en base a divisores de impedancias ó admitancias.

En resumen, las ramas de la estructura escalera LC crearan ceros de transmisión en sus frecuencias de resonancia<sup>108</sup> en impedancia (rama serie) o admitancia (rama paralelo). Nótese que, en el proceso de realización de la inmitancia de síntesis, las ramas serie y paralelo surgen precisamente al eliminar polos de impedancia y admitancia respectivamente. Por tanto, llegamos a la conclusión de que las eliminaciones de polos (totales o parciales, puesto que ambas producen una rama serie ó paralelo) crean ceros de transmisión, aunque también en esto hay excepciones como veremos<sup>109</sup>.

#### 4.3.7.3 Teoremas de Bader

En el proceso de síntesis de una bipuerta LC se parte de los parámetros de inmitancia que se desea que tengan la bipuerta. Tras elegir un conjunto concreto de parámetros (impedancia o admitancia), y una de las dos inmi-

108. Aparecen excepciones cuando las inmitancias de salida y/o entrada (es decir, de los bloques a la izquierda / derecha de la rama que resuena) también resuenan (son infinitas/nulas). Estas excepciones están relacionadas con el hecho de que no todos los ceros de transmisión serán ceros de la transinmitancia (un polo privado o un polo compartido no compacto se corresponderán con alguna rama serie o paralelo según veremos, y crearán un cero de transmisión, pero sin embargo no producen cero en la transinmitancia)
109. Estas excepciones están relacionadas también con las mencionadas en la nota pie de página anterior.

tancias ( $f_{11}$  ó  $f_{22}$ ) como **inmitancia de síntesis**, se van realizando una serie de pasos de eliminación de polos de la inmitancia de síntesis siguiendo un procedimiento que pretende conseguir que, a la vez que se realiza la inmitancia de síntesis, se consiga una bipuerta con estructura en escalera cuyos parámetros de **transinmitancia** y de **inmitancia de la otra puerta** (la que no es la de síntesis) sean los que se están buscando.

Aunque es seguro que al final del proceso se conseguirá un circuito cuya inmitancia vista desde **la puerta de síntesis** será justamente la inmitancia de síntesis que se perseguía, no se puede asegurar lo mismo respecto a la transinmitancia y a la inmitancia de la otra puerta. Conviene introducir los conceptos de parámetros de inmitancia **prescritos**, refiriéndonos a los que se pretenden conseguir, y parámetros de inmitancia **realizados**, refiriéndonos a los de la bipuerta obtenida tras el proceso de realización de la inmitancia de síntesis.

Existen dos **Teoremas de Bader** que describen las propiedades de los polos de los parámetros de inmitancia **realizados** en función de la forma en que se ha llevado a cabo la realización de la inmitancia de síntesis. Es evidente que estos teoremas deberán ser tenidos en cuenta durante la realización de la inmitancia de síntesis si se quiere conseguir que los parámetros de inmitancia **realizados** sean iguales a los parámetros de inmitancia **prescritos** (o en su defecto lo más parecidos posibles<sup>110</sup>). Los Teoremas de Bader son los siguientes:

**Primer teorema de Bader:** *“Si en el proceso de realización de la inmitancia de síntesis, todas las eliminaciones parciales son seguidas por una eliminación total a la misma frecuencia, entonces los parámetros de inmitancia realizados tendrán una inmitancia en la otra puerta en la que todos sus polos son polos compartidos compactos”.*

110. En general, si los parámetros prescritos son realizables y si se han hecho las cosas correctamente, aunque no se consiga que sean iguales, las diferencias pueden “compensarse” posteriormente, como se verá más adelante.

Conviene aclarar que este teorema no exige que las eliminaciones parciales sean seguidas “inmediatamente” por una eliminación total a la misma frecuencia. Es decir, basta con que la eliminación total a la misma frecuencia se produzca en algún momento posterior a la parcial. Tampoco exige que todas las eliminaciones totales estén precedidas en algún momento por una eliminación parcial a la misma frecuencia: una eliminación total no precedida de una eliminación parcial a la misma frecuencia no supone una violación de las condiciones del primer teorema de Bader. Finalmente, tampoco se exige en las condiciones que *a cada una* de las eliminaciones parciales le siga una eliminación total a la misma frecuencia: si *varias* eliminaciones parciales a la misma frecuencia son seguidas por una (o más) eliminación total a esa frecuencia, se están cumpliendo las condiciones del primer teorema de Bader.

Otra aclaración relevante es que, el incumplimiento de las condiciones del primer teorema a alguna(s) frecuencia(s), sólo afectará a los polos que eventualmente aparezcan a esa(s) frecuencia(s) en los parámetros realizados. Es decir, en aquellas frecuencias a las que se hayan realizado eliminaciones cumpliendo las condiciones del primer teorema, los parámetros realizados tendrán un polo compartido compacto, o un polo privado de la inmitancia de síntesis.

Una conclusión a este teorema es que, si se han cumplido las condiciones durante la realización de la inmitancia de síntesis, la inmitancia realizada de la otra puerta no tendrá polos privados, y además, todos los polos compartidos de los parámetros de inmitancia realizados serán compactos<sup>111</sup> (no sólo los de la inmitancia de la otra puerta, ya que los polos compartidos, precisamente por ser compartidos, son los mismos para cualquiera de los tres parámetros de inmitancia). Por tanto, si se cumplen las condiciones, sólo 111. Nótese que no se excluye la posibilidad de que existan polos privados en la inmitancia de síntesis realizada (que habrán sido realizados sin lugar a dudas si la inmitancia de síntesis prescrita los tenía). Sólo se excluye la existencia de polos privados en la inmitancia (realizada) de la otra puerta, y de polos compartidos no compactos (en los parámetros de inmitancia realizados).

puede haber polos privados de los parámetros de inmitancia realizados en la inmitancia de síntesis (que por tanto serán polos privados “simples, o compactos”).

Este primer teorema de Bader describe las condiciones que deben satisfacerse durante la realización de la inmitancia de síntesis para que los polos de la inmitancia de la otra puerta realizada sean todos polos compartidos compactos (lógicamente, en relación a los otros dos parámetros de inmitancia realizados).

Existen dos corolarios, derivados del primer teorema de Bader, que describen lo que ocurre en los parámetros de inmitancia realizados si no se cumplen las condiciones del primer teorema. En particular, describen las propiedades de los parámetros de inmitancia realizados, a la frecuencia (o a las frecuencias) en la que se ha producido una eliminación parcial que no ha sido seguida por una eliminación total a la misma frecuencia. El primer corolario se refiere a lo que ocurre cuando la frecuencia en cuestión **no es polo** de la inmitancia de síntesis<sup>112</sup>. El segundo se refiere a lo que ocurre cuando **sí es polo** de la inmitancia de síntesis.

**Primer corolario al Primer Teorema de Bader:** “*Si en el proceso de realización de la inmitancia de síntesis se realiza alguna eliminación parcial a una frecuencia que **no** es polo de la inmitancia de síntesis, y esta eliminación parcial no es seguida por una eliminación total a la misma frecuencia, entonces los parámetros de inmitancia realizados tendrán un polo privado de la inmitancia de la otra puerta a esa frecuencia*”.

Nótese que el polo será privado sólo de la inmitancia (realizada) de la otra puerta, y nunca de la inmitancia (realizada) de la puerta de síntesis, pues las inmitancias de síntesis realizada y prescritas son idénticas, y esa frecuencia no es polo de la inmitancia de síntesis prescrita. Por tanto será un polo privado “simple (o compacto)”.

112. Cuando se habla de inmitancia de síntesis, da igual hablar de la prescrita o de la realizada, pues se tendrá la certeza de que ambas serán iguales.

**Segundo corolario al Primer Teorema de Bader:** “*Si en el proceso de realización de la inmitancia de síntesis se realiza alguna eliminación parcial a una frecuencia que **sí** es polo de la inmitancia de síntesis, y esta eliminación parcial no es seguida por una eliminación total a la misma frecuencia, entonces los parámetros de inmitancia realizados tendrán un polo compartido **no** compacto a esa frecuencia*”.

Es conveniente remarcar de nuevo que el incumplimiento de las condiciones del primer teorema de Bader tiene un “efecto local”, descrito por los dos corolarios anteriores, pero que en el resto de las frecuencias a las que se han realizado eliminaciones se seguirá aplicando el resultado general del primer teorema. Esto quiere decir que la inmitancia de la otra puerta **sólo** tendrá polos privados y/o compartidos no compactos en aquellas frecuencias en las que no se hayan cumplido las condiciones del primer teorema de Bader, siendo todos los demás polos de la inmitancia de la otra puerta compartidos compactos.

Existe un segundo Teorema de Bader, también de suma importancia para nuestro objetivo, que describe lo que ocurre con los parámetros de inmitancia realizados a aquellas frecuencias a las que no se ha realizado ninguna eliminación.

**Segundo teorema de Bader:** “*Aquellos polos de la inmitancia de síntesis a cuya frecuencia no se haya realizado ninguna eliminación en el proceso de realización, serán polos compartidos compactos de los parámetros de inmitancia realizados*”.

#### 4.3.7.4 Proceso de síntesis de la bipuerta

Los teoremas de Bader y sus corolarios excluyen, de forma implícita, que los parámetros de inmitancia realizados tengan polos privados o compartidos no compactos a frecuencias a las que no se haya realizado ninguna eliminación.

Por otra parte, es fácil comprobar que los parámetros de inmitancia realizados tampoco tendrán ceros de la transinmitancia a frecuencias a las que no se haya realizado ninguna eliminación<sup>113</sup>. Por tanto, los ceros de transmisión sólo podrán crearse mediante eliminaciones<sup>114</sup>, y eso nos indica que, durante la realización de la inmitancia de síntesis, debemos procurar crear dichos ceros de transmisión mediante eliminaciones a las frecuencias oportunas. En particular, **durante la realización de la inmitancia de síntesis estamos obligados a realizar eliminaciones totales a las frecuencias de los ceros de transmisión debidos a ceros de la transinmitancia**<sup>115</sup>.

Resumiendo, el proceso de síntesis de la bipuerta consiste en implementar la inmitancia de síntesis, creando a la vez los ceros de transmisión de la transinmitancia. Los polos de la transinmitancia se crearán simultáneamente con los de la inmitancia de síntesis, porque son todos compartidos<sup>116</sup>. Para crear los ceros de la transinmitancia, utilizaremos eliminación parcial de polos<sup>117</sup> para desplazar ceros a las posiciones de los ceros de transmisión internos, en el siguiente paso invertiremos la inmitancia restante, y eliminaremos totalmente el polo que aparece en la posición del cero desplazado. A la hora de elegir el polo a eliminar parcialmente, deberemos tener en cuenta que los ceros se desplazan (sólo los finitos) hacia la posición del polo eliminado total o parcialmente, por lo que la posición del cero de transmisión que

113. Esto puede hacerse de forma recursiva, mediante las relaciones de división de tensión (en base a impedancias) o de intensidad (en base a admitancias), en cada paso de la realización de la inmitancia de síntesis.
114. En algunos casos, los ceros de transmisión debidos a polos compartidos no compactos o a polos privados de la otra puerta podrán crearse “a posteriori”, es decir, después de terminar la realización de la inmitancia de síntesis, por medio de nuevas ramas de inmitancia que afecten únicamente a la inmitancia de la otra puerta (“eliminaciones”, pero ya no de la inmitancia de síntesis).
115. Estos ceros no pueden crearse “a posteriori”.
116. Debemos tener cuidado, sin embargo, de no añadir polos de más a la transinmitancia: si la inmitancia de síntesis tiene polos privados, deberemos eliminarlos al principio, de manera que no aparezcan en la transinmitancia, ya que en ese caso, los parámetros realizados tendrán un polo compartido donde debían tener uno privado.

se desea crear deberá estar entre el cero a desplazar y el polo a eliminar parcialmente.

Para llevar a cabo este proceso sistemáticamente es prácticamente obligado hacer un diagrama polo/cero que muestre las posiciones relativas de polos y ceros en el eje imaginario.

Nótese también que, si no se cumple el primer teorema de Bader a alguna frecuencia (es decir, si se realiza alguna eliminación parcial no seguida de la total), aparecerá o un polo privado (corolario 1) o un polo compartido no compacto (corolario 2) en los parámetros realizados a esa frecuencia. Cualquiera de las dos circunstancias crea un cero de transmisión en el filtro según hemos visto. Por otra parte, si sí se cumple el teorema de Bader a esa frecuencia (es decir, si la última eliminación a esa frecuencia fue una eliminación total), las eliminaciones parciales no crearán ceros de transmisión<sup>118</sup>, pero la eliminación total a la misma frecuencia que les sigue si creará un cero de la transinmitancia<sup>119</sup>, y por tanto también creará un cero de transmisión del filtro.

Por tanto, a cualquier frecuencia a la que se haya realizado algún tipo de eliminación durante la realización de la inmitancia de síntesis, aparecerá un cero de transmisión en el filtro realizado. Esto nos lleva a la siguiente conclusión: **“En el proceso de realización de la inmitancia de síntesis no po-**

117. Estas eliminaciones se harán, siempre que sea posible, eliminando parcialmente los polos que hubiera en cero o en infinito, porque estas eliminaciones parciales tienen un coste adicional de sólo un elemento, mientras que las de polos internos cuestan dos. Por otra parte, como se verá, el realizar una eliminación conduce siempre a un cero de transmisión a esa frecuencia, por lo que en los filtros paso de baja no podrá realizarse eliminación en cero, y en los pasos de alta no podrá hacerse en infinito.
118. Según el primer teorema de Bader, el polo a esa frecuencia será compartido compacto. Otra forma de ver esto es que, al ser la eliminación parcial, la inmitancia restante también resuena a esa frecuencia, y por tanto, aunque la inmitancia de la rama creada por la eliminación resuena, no se produce cero de transmisión porque el divisor de tensión (o de intensidad) formado con la inmitancia restante resultará del tipo “cero partido por cero” ó “infinito partido por infinito” y su valor será finito (igual al cociente de la parte de residuo eliminado y la restante).

**demostrar que no se puede realizar ninguna eliminación a ninguna frecuencia que no sea un cero de transmisión del filtro especificado**” ya que en caso contrario el filtro realizado tendrá un cero de transmisión donde el filtro especificado no lo tenía.

Si se han seguido las reglas anteriores, habremos conseguido realizar la inmitancia de síntesis prescrita, y a la vez tendremos una transinmitancia realizada que contendrá los polos y los ceros de la transinmitancia prescrita, y sólo esos polos y esos ceros.

Por tanto, la transinmitancia realizada podrá diferir de la prescrita sólo en una constante multiplicativa independiente de la frecuencia. Para compensar esto, cuando sea necesario, habrá que añadir un transformador ideal<sup>120</sup> en la segunda puerta, para obtener una nueva segunda puerta en la que la nueva transinmitancia realizada sea la correcta. Este transformador no afecta a la inmitancia vista en la primera puerta (la de síntesis) porque la inmitancia vista en “la puerta de entrada” de un transformador ideal es proporcional a la inmitancia que carga la “puerta de salida”, que en nuestro caso (en lo referente a la realización de la inmitancia de síntesis) es siempre infinita o nula (los parámetros de inmitancia se miden en circuito abierto o en cortocircuito). Para determinar si es o no necesario un transformador habrá que obtener el valor de la transinmitancia realizada utilizando análisis convencional del circuito atendiendo a las expresiones en (4.21) ó en (4.24).

Puede medirse la transinmitancia en cualquiera de los dos “sentidos”,  
119. Existen excepciones a esto, pero no afectan al hecho de la creación del cero de transmisión del filtro. Por ejemplo, en algunos casos relacionados con polos privados de la inmitancia de síntesis, la eliminación total (orientada a la creación del polo privado de la inmitancia de síntesis, y normalmente realizada “en la primera rama”) no creará un cero de la transinmitancia, pero en estos casos el polo privado de la inmitancia de síntesis produce el cero de transmisión. Estas excepciones están relacionadas con una “fuente ideal” que ataca a una carga “ideal”, por ejemplo un generador modelado por su equivalente Norton con impedancia de salida infinita a cierta frecuencia que ataca a una impedancia que también resuena a esa frecuencia, o su variante dual, un generador modelado por su equivalente Thévenin con admitancia de salida infinita a cierta frecuencia que ataca a una admitancia que también resuena a esa frecuencia

porque se tiene la certeza de que la bipuerta realizada es recíproca por ser pasiva (y LTI de parámetros concentrados). Un procedimiento que facilita mucho las cosas es recurrir únicamente al análisis del comportamiento asintótico de la transinmitancia a altas o a bajas frecuencias (tanto la de la bipuerta realizada como la de la función prescrita), obteniendo la constante del transformador a partir de la relación entre ellas.<sup>121</sup> Evidentemente, si esta constante es igual a uno, no hará falta transformador.

Con este procedimiento, habremos conseguido ya una bipuerta en la que tanto la inmitancia de la primera puerta (la de síntesis) como la transinmitancia son las prescritas. En relación a la inmitancia de la otra puerta, lo que sabemos de ella se debe básicamente a los teoremas de Bader.

Sin embargo, estos teoremas se aplican a los parámetros realizados *antes de utilizar el transformador*. Es fácil comprobar que la inserción del transformador no afecta a los resultados del teorema de Bader, por los siguientes motivos. El transformador no afecta a la inmitancia realizada en la primera puerta. En cuanto a la transinmitancia, la multiplica/divide por una constante<sup>122</sup>, mientras que la inmitancia de la otra puerta se ve multiplicada por el cuadrado de la misma constante. Puesto que cada uno de los parámetros de inmitancia puede ser expresado como una suma de fracciones simples, es fácil ver que los nuevos parámetros de inmitancia tendrán los mis-

120. Los transformadores ideales no existen en la realidad, por lo que en general habrá que recurrir a una de estas dos opciones: a) “pasar” las inmitancias al “lado de entrada” del transformador (se verá más adelante), aceptando el escalado resultante y el cambio de resistencia de carga necesario, b) intentar “encajar” las autoinducciones de las dos puertas de un transformador “perfecto” (más cercano a la realidad) en la estructura de la escalera sintetizada.

121. Puesto que se tiene la certeza de que difieren sólo en una constante multiplicativa independiente de la frecuencia, esta constante puede evaluarse mediante comparación a cualquier frecuencia. Los casos  $s \rightarrow 0$  y  $s \rightarrow \infty$  son los que requieren menos cálculos y evitan el análisis detallado del circuito realizado.

122. La multiplicará o dividirá dependiendo de que estemos considerando parámetros de impedancia o admitancia, de que la constante se refiera a la ganancia en tensión o en intensidad, y de que la constante represente la relación entre la tensión/intensidad de la puerta 2 respecto a la 1 (ambas del transformador) o viceversa.

mos (y sólo los mismos) polos que antes de la inserción del transformador (en relación o no a la existencia de polos privados), y que los nuevos residuos se ven modificados en la misma medida en que los son los parámetros de inmitancia en su conjunto. Es inmediato además comprobar que dichas modificaciones no afectan a la condición de los residuos (4.34) (en relación a si los polos compartidos son o no compactos).

En resumen, **la inserción del transformador no afecta en nada a los resultados de los teoremas de Bader ni a los de sus corolarios.**

Recapitulando de nuevo, sabemos ya como debemos actuar para realizar simultáneamente la inmitancia de síntesis y la transinmitancia. En cuanto a la inmitancia realizada en la segunda puerta, habrá que evaluar su similitud o diferencia con la prescrita en base a los teoremas de Bader.

Desafortunadamente, no existe un procedimiento de validez general a seguir para la síntesis de la bipuerta (es decir, del filtro que buscamos) pero, distinguiendo algunos casos frecuentes podemos obtener procedimientos válidos en la mayoría de los casos prácticos<sup>123</sup>.

El más importante de todos ellos es el siguiente.

Si en el proceso de síntesis se han cumplido<sup>124</sup> las condiciones del primer teorema de Bader (a todas las frecuencias), tendremos certeza de que los (eventuales) polos privados de la inmitancia de síntesis han sido realizados, de que los (eventuales) polos privados de la inmitancia de la otra puerta **no** han sido realizados, y de que los (eventuales) polos compartidos no compactos “han sido realizados como polos compartidos compactos”, es decir, los polos existen en los parámetros realizados pero son compartidos compactos.

Puesto que la inmitancia de síntesis y la transinmitancia prescritas y realizadas son idénticas, tendremos que los residuos de los polos de la inmitancia de síntesis prescrita son iguales que los de la realizada, y que lo mismo

123. En particular en los casos de filtros paso de baja en base a aproximaciones clásicas (los que sean realizables directamente)  
124. Se da por supuesto que se han cumplido también los requerimientos de realizar eliminaciones totales en todos los ceros de la transinmitancia, y de no realizar ninguna a ninguna frecuencia que no sea cero de transmisión.

mo ocurre con la transinmitancia. Por tanto, puesto que los parámetros realizados tienen una inmitancia de la otra puerta con todos sus polos compartidos compactos, los residuos de los polos compartidos compactos de la inmitancia de la otra puerta realizada serán también los mismos que los de la prescrita (por la condición de los residuos, que se verifica con una igualdad tanto para los parámetros prescritos como para los realizados, siendo iguales los residuos prescritos y realizados de la inmitancia de síntesis y de la transinmitancia).

En lo referente a los (eventuales) polos privados de la inmitancia prescrita de la otra puerta, pueden ser realizados fácilmente añadiendo la rama correspondiente a la fracción simple de la inmitancia de la otra puerta asociada con el polo privado. Esta rama no afectará a la inmitancia de síntesis ni a la transinmitancia<sup>125</sup>. En lo referente a los (eventuales) polos compartidos no compactos, en este caso podemos tener la certeza de que añadiendo las ramas oportunas a la inmitancia de la otra puerta podremos conseguir que los polos sean no compactos “justo en la medida necesaria”. Esto puede comprobarse fácilmente teniendo en cuenta, de nuevo, que los residuos de los polos de la inmitancia de síntesis prescrita son iguales que los de la realizada, y que lo mismo ocurre con la transinmitancia. Puesto que los polos realizados son compactos, el residuo, en cualquier polo, de la inmitancia realizada en la otra puerta puede obtenerse a partir de la condición de los residuos (4.34), que se verifica con una igualdad para los parámetros realizados. Si los parámetros prescritos tienen un polo no compacto en esa frecuencia, el residuo de la inmitancia en la otra puerta prescrita será siempre mayor que

125. La rama será una “rama serie” en el caso de estar utilizando parámetros de impedancia y una “rama paralelo” en el caso de estar utilizando parámetros de admitancia. La última rama serie no afectará a la impedancia de síntesis ni a la transimpedancia porque estos parámetros se miden con la segunda puerta abierta, y por tanto no pasará corriente por la rama añadida (sí pasará cuando la bipuerta está cargada por la resistencia de carga). La última rama paralelo no afectará a la admitancia de síntesis ni a la transadmitancia porque estos parámetros se miden con la segunda puerta cortocircuitada, y por tanto no habrá tensión en la rama añadida (sí la habrá cuando la bipuerta está cargada por la resistencia de carga)

el realizado, como se deduce fácilmente de la condición de los residuos (ahora con una desigualdad)<sup>126</sup>. Por tanto, bastará añadir una rama de inmitancia que realice un polo a esa frecuencia, con la diferencia de residuo (el prescrito menos el realizado, que siempre será positiva). Estas ramas no afectan a la inmitancia de síntesis ni a la transinmitancia por las razones mencionadas anteriormente.

En resumen, si en el proceso de síntesis conseguimos cumplir el primer teorema de Bader en todas las frecuencias<sup>127</sup>, podemos estar seguros de haber encontrado un procedimiento válido de implementación.

Las mismas razones que nos llevan a afirmar que, si se ha cumplido el primer teorema de Bader, siempre podemos añadir los polos privados de la inmitancia de la otra puerta y/o los excesos de residuos de los polos compartidos no compactos, nos permiten asegurar que si durante el proceso de síntesis hemos creado un polo privado o un polo compartido no compacto donde no lo había (donde los parámetros prescritos no los tenían), no podremos corregirlo añadiendo ramas de inmitancia en la segunda puerta<sup>128</sup>. Esto quiere decir que, algo a evitar a toda costa es crear polos privados o compartidos no compactos donde no los había.

Por tanto, independientemente de cómo sean los parámetros prescritos<sup>129</sup> (de cómo sean sus polos) el objetivo debe ser el cumplimiento del primer teorema de Bader durante la realización de la inmitancia de síntesis, haciendo eliminaciones totales en las posiciones de todos los ceros de la transinmitancia, y no haciéndolas en ningún sitio que no sea un cero de transmisión. Si la inmitancia de síntesis tiene polos privados, intentaremos realizarlos mediante eliminaciones totales al principio de la síntesis.

126. Se está suponiendo en todo momento que los parámetros de inmitancia prescritos son realizables (y por tanto cumplen la condición de los residuos).

127. Creando a la vez los ceros de la transinmitancia.

128. Los residuos de las ramas a añadir serían negativos, y eso no es realizable con elementos positivos.

129. Sobre todo si los parámetros de inmitancia prescritos sólo tienen polos compartidos compactos.

En algunos casos en los que los parámetros de inmitancia prescritos tienen polos privados<sup>130</sup> y/o polos compartidos no compactos, no es fácil conseguir estos objetivos. En estos casos, podemos intentar la realización creando polos privados y/o polos compartidos no compactos (sólo donde lo tienen los parámetros prescritos) pero, en estos casos no tendremos garantías de que la realización final sea válida. La razón para esto es que no sabemos si los polos privados o compartidos no compactos habrán sido creados con más o con menos residuo del prescrito. Si todos han sido creado con menos residuo del prescrito, no hay problema: se añaden. Pero si alguno ha sido con más residuo del prescrito no podremos corregirlo, por ser el residuo a añadir negativo y por tanto no realizable. En este caso, la realización no es válida y habrá que buscar otra alternativa. La comprobación de los residuos realizados habrá que hacerla mediante análisis del circuito realizado (cuando sea posible recurriendo a la observación del comportamiento asintótico) y comparando con los valores prescritos.

Esto puede resumirse en lo siguiente. Tras realizar la inmitancia de síntesis y la transinmitancia (con el transformador si es necesario), calculamos la diferencia entre la inmitancia de la otra puerta realizada<sup>131</sup> y prescrita,

$$\Delta F = f_{O.P.PRESCRITA} - f_{O.P.REALIZADA} \quad (4.82)$$

y la expandimos en fracciones simples,

$$\Delta F = \sum_{(i)} \frac{\Delta k^{(i)}}{s - j\omega_i} \quad (4.83)$$

Si todos los “incrementos de residuos ( $\Delta k^{(i)}$ )” (los residuos de  $\Delta F$ ) son positivos, no tenemos más que añadirlos (como ramas serie si estamos utilizando polos privados de la inmitancia de la otra puerta (los que se pueden crear como consecuencia del incumplimiento del primer teorema de Bader). Naturalmente, la elección de la inmitancia de síntesis hará que un cierto polo privado esté en ella o en la de la otra puerta, pero este asunto de la elección de la inmitancia de síntesis lo tratamos después. Aquí se supone que la inmitancia de síntesis ya ha sido elegida.

131. Esta inmitancia de la otra puerta realizada es la vista tras el transformador.

zando parámetros de impedancia, como ramas paralelo si estamos utilizando parámetros de admitancia).

Por el contrario, si alguno de ellos es negativo, no podremos realizarlo, y por tanto el procedimiento seguido no es válido: hay que buscar otro procedimiento.

Si se ha cumplido el primer teorema de Bader, el procedimiento es válido con certeza<sup>132</sup> (los residuos de  $\Delta F$  son todos positivos).

Si no hemos cumplido el primer teorema de Bader, y hemos creado algún polo privado<sup>133</sup> y/o compartido no compacto donde no los había, el procedimiento es inválido con certeza (algún residuo de  $\Delta F$  es negativo). Si no lo hemos seguido, creando algún polo privado y/o compartido no compacto pero en posiciones donde había un polo de las mismas características, no tenemos certeza de la validez ni de la invalidez del procedimiento: hay que calcular  $\Delta F$  para averiguarlo (esto hay que hacerlo en cualquier caso para completar la escalera).

En cuanto a la elección de la inmitancia de síntesis, cualquiera de los cuatro parámetros de inmitancia puede ser elegido como tal. En general se recomienda elegir una inmitancia de síntesis de orden lo más alto posible (será igual al orden de  $H(s)$ ). Esto quiere decir que, si hay polos privados, se recomienda escoger la inmitancia que los tenga.

#### 4.3.7.5 Utilización y eliminación del transformador ideal.

Un transformador ideal es una bipuerta que se caracteriza por tener los siguientes parámetros híbridos<sup>134</sup>:

132. Si además los parámetros prescritos tenían todos sus polos compartido compactos, tendremos la certeza de que no hay que añadir nada (el transformador sí puede ser necesario) y la escalera está terminada.

133. En esta discusión, por polo privado entendemos polo privado de la otra puerta. Los eventuales polos privados de la inmitancia de síntesis han sido creados seguro, y serán efectivamente privados si han sido eliminados al principio de la síntesis.

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & -1/K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} \quad (4.84)$$

y lo representaremos por el símbolo mostrado en la Fig. 4.12.

La Fig. 4.13 muestra la construcción de una “nueva bipuerta” mediante la concatenación de una primera bipuerta y un transformador ideal, tal como se ha hecho en el proceso de síntesis de bipuertas para corregir la eventual diferencia de la constante multiplicativa de la transadmitancia. Asumiendo siempre el criterio de que la puerta 1 está a la izquierda y la 2 a la derecha, podemos demostrar fácilmente las siguientes relaciones.

$$z'_{11} = z_{11} \quad (4.85)$$

$$y'_{11} = y_{11}$$

$$z'_{12} = Kz_{12}$$

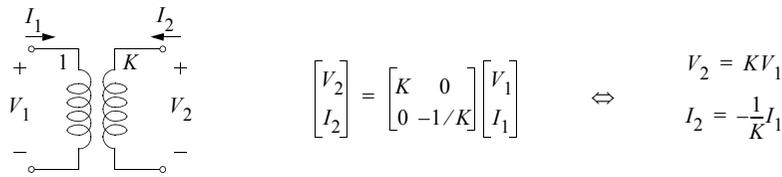
$$y'_{12} = \frac{1}{K}y_{12} \quad (4.86)$$

$$z'_{22} = K^2z_{22}$$

$$y'_{22} = \frac{1}{K^2}y_{22} \quad (4.87)$$

Estas relaciones han sido empleadas antes de forma verbal para demostrar que la utilización de un transformador no afecta al cumplimiento de la condición de los residuos ni a los resultados de los teoremas de Bader o de sus corolarios. La ecuaciones (4.86) reflejan el valor que debe tener la constante de ganancia en tensión del transformador ( $K$ ) si se pretende que la transinmitancia vista en la nueva bipuerta ( $z'_{12}$  o  $y'_{12}$ ) sea igual a la pre-

134. Suponiendo que dentro del transformador no se pierde energía (transformador perfecto), y admitiendo que los elementos que están fuera de la diagonal son nulos (transformador ideal), la relación mostrada entre los elementos de la diagonal es necesaria para un correcto balance de potencias en la bipuerta  $V_2I_2 + V_1I_1 = 0$ .



**Figura 4.12: Símbolo y convenio de notación para transformadores ideales.**

escrita, partiendo de la base de que la transinmitancia realizada ( $z_{12}$  o  $y_{12}$ ) difiere de ella sólo en una constante (tiene los mismos polos y ceros),

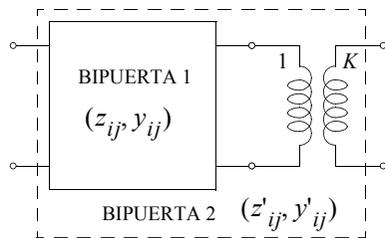
Si se están utilizando parámetros de impedancia,

$$K = \frac{z'_{12}}{z_{12}} = \frac{z_{12}|_{\text{Prescrita}}}{z_{12}|_{\text{Realizada}}} \quad (4.88)$$

mientras que si se están utilizando parámetros de admitancia,

$$K = \frac{y_{12}}{y'_{12}} = \frac{y_{12}|_{\text{Realizada}}}{y_{12}|_{\text{Prescrita}}} \quad (4.89)$$

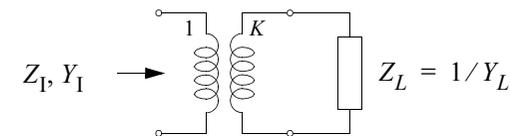
Por otra parte, la figura Fig. 4.14 ilustra la relación entre la inmitancia de entrada vista en la puerta de un transformador (ideal) y la inmitancia que carga la otra puerta. Es fácil comprobar que



**Figura 4.13: Construcción de una segunda bipuerta a partir de los parámetros realizados y un transformador ideal.**

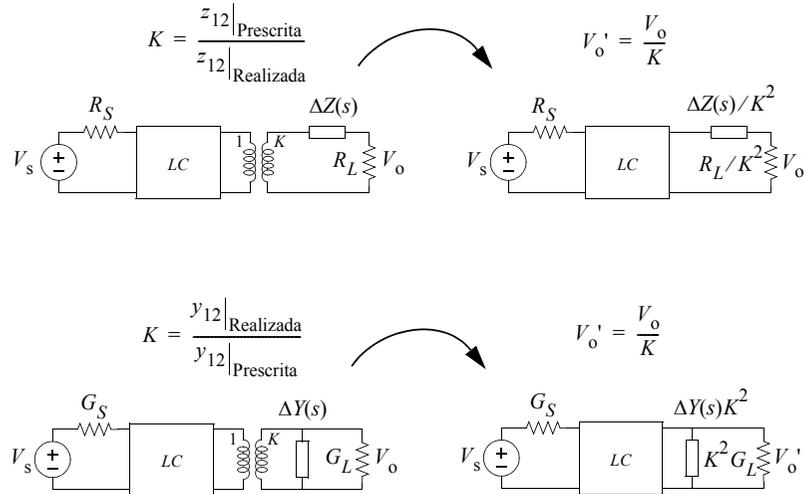
$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{1}{K^2} Z_L \\ Y_1 &= K^2 Y_L \end{aligned} \quad (4.90)$$

Estas relaciones muestran que la inmitancia vista desde la izquierda del transformador puede ser sustituida por la admitancia que carga la puerta de la derecha, si la escalamos convenientemente. Por tanto, si pasamos las ramas añadidas para completar los residuos de los polos privados o compartidos no compactos ( $\Delta F$  en (4.83)) y la resistencia de carga a la izquierda del transformador, multiplicándolas por el factor adecuado, podremos eliminar el transformador (que quedará abierto o cortocircuitado en la segunda puerta). La Fig. 4.15 muestra los resultados de este procedimiento y las relaciones entre inmitancias para los casos de utilización de parámetros de impedancia y de admitancia. Nótese que la eliminación del transformador conlleva un cambio de la resistencia de carga y un escalado de la magnitud de la función de transferencia, por lo que sólo podrá hacerse cuando estas consecuencias sean aceptables<sup>135</sup>.



**Figura 4.14: Relación entre impedancia vista a la entrada de un transformador e impedancia de carga en la otra puerta.**

135. Este será el caso con frecuencia, y siempre si lo que se persigue es diseñar un filtro activo que emule el comportamiento de un filtro escalera LC pasivo.



**Figura 4.15: Eliminación del transformador: efecto en la resistencia de carga y escalado de la función de transferencia.**

### 4.3.8 Limitaciones de realización de filtros LC doblemente terminados.

Desafortunadamente, no todas las funciones de aproximación clásicas son realizables directamente como filtros escaleras LC doblemente terminados.

Por ejemplo, las funciones de aproximación (paso de baja: LPP) que no tienen cero de transmisión en infinito, no pueden realizarse directamente porque al no tener ceros de transmisión ni en infinito ni en cero, y al no coincidir los polos de las posibles inmitancia de síntesis con los ceros de transmisión finitos<sup>136</sup>, no tenemos polos que eliminar parcialmente (sin crear

136. Los ceros de transmisión finitos se deben a ceros de la transinmitancia, como hemos visto. Normalmente, no se da la “casualidad” de que los valores de estos ceros coincidan con los de un polo (compartido compacto) de los parámetros de inmitancia.

ceros de transmisión indeseados) para desplazar los ceros internos a las posiciones necesarias. En este grupo se encuentran los filtros elípticos y Chebishev inversos de orden par.

Por otra parte, las funciones de aproximación clásicas que no tienen cero de reflexión en cero, no pueden ser realizadas convenientemente (sin transformador) con resistencias terminales iguales. Una forma fácil de ver esto es que la bipuerta escalera LC, al estar compuesta sólo por elementos que en DC son o un corto o un abierto, se comportará también en DC como un corto o como un abierto entre las dos puertas de entrada. Esto quiere decir que la impedancia vista a la entrada (puerta 1) de la bipuerta será o infinita, o nula, o igual a la resistencia de carga (que es igual a la de fuente en este caso). A su vez, esto significa que, en DC, el filtro tendrá o un cero de reflexión o un cero de transmisión. Ninguna de las dos opciones son válidas para filtros LP que no tengan cero de reflexión en cero. Esto incluye a los elípticos y a los Chebishev directos de orden par.

En realidad, la realización de un filtro escalera LC (sin transformador) requiere siempre una relación concreta entre las resistencias de carga y de fuente. Este valor está relacionado con la relación de transferencia de potencia en DC. Para ser más preciso, suelen existir dos soluciones, que son inversas entre sí.

Para estos casos, existen unas “transformaciones en frecuencia”. que no alteran el tipo de función de filtrado, pero que desplazan el cero de transmisión finito más alto hacia el infinito (y/o el cero de reflexión más bajo hacia cero), sin modificar significativamente el resto de las características. Tampoco modifican el orden de la función. Estas nuevas funciones de aproximación se denominan “filtros elípticos modificados”, y “filtros Chebishev modificados”.

En otras ocasiones, los valores de elementos resultantes del proceso de síntesis tienen valores inapropiados, tanto por sus órdenes de valor (lo que puede modificarse cambiando los valores de las resistencias de fuente y de

carga, cuando esto sea aceptable), como por la relación máxima existente entre elementos del mismo tipo (bobinas y condensadores). En estos últimos casos, pueden aplicarse una serie de transformaciones que reducen esas relaciones de valores a unas más prácticas. No entraremos aquí a describirlas pero, al menos, es bueno conocer su existencia, y por tanto, esa posibilidad.

### 4.3.9 Transformaciones en frecuencia de filtros LC doblemente terminados

Supongamos que hemos realizado la síntesis de una escalera LC doblemente terminada que realiza la función de transferencia de un prototipo paso de baja (LPP). Normalmente, lo habremos hecho a partir de una función de transferencia y unos parámetros de inmitancia normalizados en frecuencia y en inmitancia<sup>137</sup>. Esto significa que el circuito escalera doblemente terminado estará compuesto por elementos adimensionales normalizados en frecuencia y en inmitancia. Para obtener el circuito real, habrá que desnormalizar los elementos utilizando una frecuencia y una inmitancia de desnormalización<sup>138</sup>, que normalmente serán las mismas empleadas en la normalización de las especificaciones. De esta manera, obtendremos ya un circuito con elementos dimensionalmente correctos.

137. Normalizar en impedancia es lo mismo que normalizar en admitancia. Por otra parte, las funciones de transferencia  $V/V$  ó  $I/I$  no varían con la normalización en impedancia/admitancia, por lo que su forma es independiente de si se ha realizado normalización (en inmitancia) ó no, si se ha desnormalizado (en inmitancia) ó no, y por supuesto con los valores de la inmitancia de (des) normalización.

138. La función de transferencia se normaliza normalmente sólo en frecuencia. Los parámetros de inmitancia (ya normalizados en frecuencia) se normalizan a su vez en inmitancia. La desnormalización suele, pero no tiene porqué, utilizar los mismos valores de frecuencia y de inmitancia de desnormalización. Por ejemplo, el empleo de la impedancia de desnormalización permita “centrar” los valores de los diferentes elementos (resistencias, bobinas y condensadores) en valores razonables, sin afectar a la función de transferencia (se asume una f.d.t.  $V/V$  ó  $I/I$ ). Por otra parte, la frecuencia de desnormalización puede emplearse para escalar el eje de frecuencias cuando sea conveniente.

Este procedimiento será el correcto si nuestro filtro objetivo era un filtro paso de baja. Sin embargo, cuando nuestro filtro objetivo no es un LP, sino un HP, BP ó BR, y hemos recurrido al procedimiento de buscar un “LPP equivalente” basándonos en las (inversas de las) transformaciones clásicas de frecuencia, con el propósito de aplicar después las mismas transformaciones para obtener el filtro objetivo, tendremos dos opciones.

La primera de ellas consiste en aplicar la transformación a la f.d.t. del LPP para obtener la f.d.t. del filtro objetivo, y a partir de ella obtener los parámetros de inmitancia de la bipuerta necesaria para obtener nuestro filtro objetivo, continuando con la realización de la bipuerta LC mediante las técnicas descritas en la sección anterior.

La segunda opción consiste en pasar directamente a la realización de la bipuerta necesaria para la obtención de un circuito escalera LC que tenga la función de transferencia del prototipo LPP. Después, podemos aplicar la transformación en frecuencia “a cada elemento”<sup>139</sup>, obteniendo directamente el circuito escalera LC para el filtro objetivo.

Esta segunda opción suele ser más ventajosa desde el punto de vista de simplificar los cálculos y el proceso de síntesis<sup>140</sup>. En cualquiera de las dos opciones, es preciso observar aspectos relacionados con la normalización.

Las transformaciones en frecuencia que se han visto en un capítulo anterior están pensadas para producir, a partir de un LPP normalizado en frecuencia, una f.d.t. del filtro objetivo desnormalizado ya en frecuencia. La normalización en impedancia no afecta en esto porque, como se ha dicho, no afecta a las funciones de transferencia.

139. En realidad, a la variable de frecuencia compleja que aparecerá (cuando aparezca) en la relación constitutiva (impedancia o admitancia) del elemento.

140. Cuando la f.d.t. del filtro objetivo no haya sido obtenida mediante transformaciones de frecuencia, no quedará más remedio que abordar la realización de la bipuerta del filtro objetivo directamente. Esto sólo ocurrirá cuando se desee evitar las limitaciones impuestas por las transformaciones en frecuencia (por ejemplo la homogeneidad de las atenuaciones y la simetría geométrica de las frecuencias transformadas).

Si empleamos el primer procedimiento, a partir de la f.d.t. del filtro objetivo, desnormalizada en frecuencia, obtendríamos parámetros de inmitancia también desnormalizados en frecuencia (y en general también en impedancia). Podremos normalizarlos de nuevo antes de abordar la realización de la bipuerta, y desnormalizar los elementos después, o abordar la realización con parámetros de inmitancia desnormalizados para obtener directamente el circuito real (esto último no es aconsejable).

Si empleamos el segundo procedimiento, la utilización de las transformaciones en frecuencia (en la forma vista en un capítulo anterior) a los elementos resultantes de la realización del LPP, que suponemos obtenidos a partir de parámetros de inmitancia normalizados en inmitancia (además de en frecuencia) producirá valores de elementos desnormalizados en frecuencia pero normalizados en inmitancia. Estos elementos no son adimensionales ni tienen tampoco las dimensiones correctas<sup>141</sup>, y deben ser desnormalizados en impedancia para obtener los valores reales de los elementos del filtro escalera LC objetivo. Esto no es un problema difícil, pero todo se hace mucho más sencillo si introducimos rápidamente las versiones de las transformaciones en frecuencia que producen, a partir de un LPP normalizado en frecuencia (o no) un filtro HP, BP ó BR también normalizado (o no) en frecuencia. Para ello, basta emplear frecuencias normalizadas (o no) en ambos lados de las expresiones  $s = F(p)$  de transformación en frecuencia.

#### 4.3.9.1 Transformaciones en frecuencia normalizadas en frecuencia

En las transformaciones en frecuencia vistas hasta ahora, para obtener la función de transferencia objetivo  $H_O(p)$ , con una variable de frecuencia desnormalizada  $p$ , a partir de una función de transferencia  $H_{LPP}(s)$  con una

141. La normalización independiente en frecuencia o en impedancia no presenta problemas significativos, pero no se ha tratado en esta asignatura, en la que hasta ahora hemos tratado siempre con elementos normalizados simultáneamente en frecuencia y en impedancia, o con elementos “reales” (desnormalizados en ambas variables).

variable de frecuencia  $s$  normalizada con respecto al borde de la banda pasante, hacíamos

$$H_O(p) = H_{LPP}(s) \Big|_{s=F(p)} \quad (4.91)$$

Si queremos obtener una función de transferencia objetivo normalizada en frecuencia (con respecto a algún valor), a partir de una función prototipo paso de baja también normalizada en frecuencia<sup>142</sup>, lo que debemos hacer es normalizar la frecuencia  $p$  en las funciones de transformación  $s = F(p)$ .

Para una transformación LP a HP teníamos

$$s = F(p) = \frac{\omega_p}{p} \quad (4.92)$$

donde  $\omega_p$  es la frecuencia borde (inferior) del paso de alta objetivo. Normalizando la variable de frecuencia del filtro objetivo respecto a este valor tendremos,

$$s = F'(p') = F(p) \Big|_{p=p'\omega_p} = \frac{1}{p'} \quad (4.93)$$

Y la función de transferencia paso de alta objetivo, normalizada en frecuencia respecto al borde inferior de su banda pasante, será

$$H_{LP}(p') = H_{LPP}(s) \Big|_{s=F'(p')} \quad (4.94)$$

$$F'(p') = \frac{1}{p'}$$

Para transformaciones LP a BP teníamos

$$s = F(p) = \frac{p^2 + \omega_0^2}{pB} \quad (4.95)$$

142. Las mismas transformaciones pueden emplearse para obtener una función de transferencia objetivo desnormalizada en frecuencia a partir de una función de transferencia prototipo paso de baja desnormalizada en frecuencia, pero será necesario introducir un escalado en frecuencia si las frecuencias de normalización empleadas aquí para ambas funciones (prototipo LP y objetivo) no se corresponden.

donde  $\omega_0$  y  $B$  son la frecuencia central, en sentido geométrico, de la banda de paso (o de rechazo,  $\omega_0 = \sqrt{\omega_{p1}\omega_{p2}} = \sqrt{\omega_{s1}\omega_{s2}}$ ), y el ancho de banda ( $B = \omega_{p2} - \omega_{p1}$ ), respectivamente, con sus valores reales (desnormalizados). Normalizando la variable de frecuencia del filtro objetivo respecto a  $\omega_0$  tendremos,

$$\begin{aligned} s = F(p') &= F(p)|_{p=p'\omega_0} = \frac{(p'\omega_0)^2 + \omega_0^2}{p'\omega_0 B} = \\ &= \frac{p'^2 + 1}{p' \frac{B}{\omega_0}} = Q \frac{p'^2 + 1}{p'} \quad (4.96) \\ Q &= \frac{\omega_0}{B} \end{aligned}$$

donde  $Q$  se conoce como el “factor de calidad del filtro paso de banda”. La función de transferencia paso de banda objetivo, normalizada en frecuencia respecto a la frecuencia central (en sentido geométrico) de su banda pasante  $\omega_0$ , será

$$\begin{aligned} H_{BP}(p') &= H_{LPP}(s)|_{s=F(p')} \\ F(p') &= Q \frac{p'^2 + 1}{p'} \quad (4.97) \\ Q &= \frac{\omega_0}{B} \end{aligned}$$

Finalmente, para transformaciones LP a BR teníamos

$$s = F(p) = \frac{pB}{p^2 + \omega_0^2} \quad (4.98)$$

donde  $\omega_0$  y  $B$  son la frecuencia central, en sentido geométrico, de la banda de rechazo (o de paso,  $\omega_0 = \sqrt{\omega_{s1}\omega_{s2}} = \sqrt{\omega_{p1}\omega_{p2}}$ ), y el “ancho de banda” ( $B = \omega_{p2} - \omega_{p1}$ ), respectivamente, con sus valores reales (desnormal-

izados). Normalizando la variable de frecuencia del filtro objetivo respecto a  $\omega_0$  tendremos,

$$\begin{aligned} s = F(p') &= F(p)|_{p=p'\omega_0} = \frac{p'\omega_0 B}{(p'\omega_0)^2 + \omega_0^2} = \\ &= \frac{p' \frac{B}{\omega_0}}{p'^2 + 1} = \frac{1}{Q} \frac{p'}{p'^2 + 1} \quad (4.99) \\ Q &= \frac{\omega_0}{B} \end{aligned}$$

donde  $Q$  se conoce como el “factor de calidad del filtro rechazo de banda”. La función de transferencia rechazo de banda objetivo, normalizada en frecuencia respecto a la frecuencia central (en sentido geométrico) de su banda de rechazo  $\omega_0$ , será

$$\begin{aligned} H_{RB}(p') &= H_{LPP}(s)|_{s=F(p')} \\ F(p') &= \frac{1}{Q} \frac{p'}{p'^2 + 1} \quad (4.100) \\ Q &= \frac{\omega_0}{B} \end{aligned}$$

#### 4.3.9.2 Transformaciones en frecuencia de filtros (escalera) LC

Volviendo a las dos opciones mencionadas al principio de esta sección, ambas parten de la función de transferencia del prototipo paso de baja normalizado en frecuencia respecto al borde de la banda pasante. En la primera opción, la utilización, cuando sea necesario, de las transformaciones (4.94), (4.97) ó (4.100) permitirá obtener una función de transferencia, normalizada en frecuencia, del tipo que sea: LP, HP, BP ó BR. A partir de ella obtendremos los parámetros de inmitancia<sup>143</sup>, normalizados en inmitancia<sup>144</sup>, de 143. Será necesario aplicar la misma transformación a la función característica, lógicamente, ya que ambas funciones son necesarias para obtener los parámetros de inmitancia.

la bipuerta. A partir de estos parámetros de inmitancia se sintetizará la bipuerta, y con ella el filtro compuesto por ella y las resistencias terminales. Todos los elementos estarán normalizados (los de la bipuerta y también las resistencias terminales). El circuito realizado tendrá la función de transferencia deseada, pero normalizada en frecuencia<sup>145</sup>. Este primer procedimiento no es muy recomendable, como se había comentado, sobre todo en los casos<sup>146</sup> de filtros BP ó BR, porque en estos casos el orden de la función de transferencia (y de los parámetros de inmitancia) es doble al de los correspondientes al LPP, y por tanto la síntesis de la bipuerta suele ser más compleja.

La otra opción, que es la más utilizada, consiste en sintetizar directamente el prototipo paso de baja normalizado, obteniendo sus parámetros de inmitancia normalizados y de ellos el filtro escalera LC doblemente terminado correspondiente, con todos sus elementos normalizados. A continuación, cuando sea necesario, se aplican las transformaciones (4.94), (4.97) ó (4.100) a las relaciones constitutivas (inmitancias) de cada elemento<sup>147</sup>, obteniendo unas nuevas inmitancias que, como veremos, son fácilmente “mapeables” en otros elementos o conjuntos de elementos normalizados en frecuencia e impedancia. Esto resultará en un nuevo circuito LC doblemente terminado, con la función de transferencia deseada (normalizada en frecuencia). En otras palabras, cada elemento del circuito LPP escalera LC se sus-

144. Esta normalización es directa, y no supone cálculos adicionales (basta ver las expresiones en la Tabla 4.1). Normalmente los parámetros de inmitancia se normalizan respecto al valor de una de las resistencias/conductancias terminales, de manera que una de ellas (normalizada) tiene valor unidad mientras la otra tiene un valor igual a la relación entre ambas. Frecuentemente, ambas resistencias terminales son iguales. En estos casos, ambas tendrán valor unidad.
145. Respecto a la frecuencia borde de la banda pasante en el caso de filtros LP ó HP, y respecto a la frecuencia central de la banda en el caso de filtros BP ó BR.
146. En el caso de filtros HP el orden no cambia, pero se suele estar acostumbrado a las particularidades de realización propias de los paso de baja. En el caso de una filtro paso de baja, las dos “opciones” descritas arriba son en realidad la misma.
147. Las relaciones constitutivas estarán normalizadas en frecuencia y en impedancia, como corresponde a elementos en las mismas circunstancias.

tituye por otro elemento o conjunto de elementos, resultando en un nuevo circuito escalera LC que tiene ya la función de transferencia deseada pero normalizada en frecuencia.

En este punto, ambas opciones convergen. Los elementos del circuito están normalizados en frecuencia e impedancia, y deberán ser desnormalizados utilizando la frecuencia de desnormalización deseada<sup>148</sup>. La impedancia de desnormalización puede ser cualquiera en general, salvo que estén prefijados los valores de las resistencias terminales. Si podemos elegirla, será frecuente utilizarla para obtener valores de elementos “razonables”.

Para completar la explicación del segundo procedimiento de realización (que hemos dicho que es el preferible), falta concretar la correspondencia entre elementos de la escalera LPP y de la escalera objetivo (normalizada en frecuencia). Para ello, consideramos las relaciones constitutivas (normalizadas en frecuencia e impedancia) de condensadores, bobinas y resistencias, y les aplicamos las transformaciones (4.94), (4.97) y (4.100) para obtener las nuevas relaciones constitutivas, que después sintetizaremos mediante asociaciones de elementos. Emplearemos, por ejemplo, las impedancias. La utilización de las admitancias lleva a los mismos resultados (lógicamente). Tendremos,

$$Z_O(p') = Z_{LP}(s) \Big|_{s = F(p')} \quad (4.101)$$

dónde  $Z_{LP}(s)$  representa la impedancia de uno de los tres tipos de elementos del filtro LP (R, L ó C), “O” representa el tipo de filtro objetivo (HP, BP ó BR), y donde la función de transformación  $s = F(p')$  tendrá que ser acorde a la transformación que se esté empleando (LP a HP, LP a BP, ó LP a BR).

En el caso de una resistencia  $Z_{LP}(s) = R_{LP}$ . Esto quiere decir que en su relación constitutiva no aparece la “frecuencia”, y por tanto, independientemente del tipo de transformación que se esté realizando

148. La frecuencia borde de la banda pasante en el caso de filtros LP ó HP, o la frecuencia central de la banda en el caso de filtros BP ó BR.

$$Z_O(p') = Z_{LP}(s) \Big|_{s=F(p')} = R_{LP} \Big|_{s=F(p')} = R_{LP} = R_O \quad (4.102)$$

Por tanto a una resistencia le corresponderá una resistencia del mismo valor, sea cual sea el tipo de transformación en frecuencia. **Las resistencias terminales no cambian.**

En el caso de un condensador,  $Z_{LP}^C(s) = 1/(sC_{LP})$ , y en el caso de una bobina  $Z_{LP}^L(s) = sL_{LP}$ . En ambos casos habrá que distinguir el tipo de transformación que se esté realizando, pues sus impedancias dependen de la variable de frecuencia compleja.

En una transformación LP  $\rightarrow$  HP tendremos, utilizando la transformación (4.94),

$$Z_{HP}^C(p') = \frac{1}{sC_{LP}} \Big|_{s=\frac{1}{p'}} = p' \frac{1}{C_{LP}} = p' L_{HP}^C \quad (4.103)$$

$$Z_{HP}^L(p') = sL_{LP} \Big|_{s=\frac{1}{p'}} = \frac{1}{p'} L_{LP} = \frac{1}{p' C_{HP}^L}$$

Es decir, que en las transformaciones LP  $\rightarrow$  HP, **los condensadores se transforman en bobinas, y las bobinas en condensadores.** Los valores de los nuevos elementos son los inversos a los de los elementos de los que proceden<sup>149</sup>,

$$\begin{aligned} L_{HP}^C &= \frac{1}{C_{LP}} \\ C_{HP}^L &= \frac{1}{L_{LP}} \end{aligned} \quad (4.104)$$

En una transformación LP  $\rightarrow$  BP tendremos, utilizando la transformación (4.97),

149. Son elementos normalizados en frecuencia y en impedancia (adimensionales).

$$\begin{aligned} Z_{BP}^C(p') &= \frac{1}{sC_{LP}} \Big|_{s=Q\frac{p'^2+1}{p'}} = \frac{p'}{p'^2+1} \frac{1}{QC_{LP}} = \\ &= \frac{1}{p'QC_{LP} + \frac{1}{p'QC_{LP}}} = \frac{1}{p'C_{BP}^C + \frac{1}{p'L_{BP}^C}} \end{aligned} \quad (4.105)$$

$$\begin{aligned} Z_{BP}^L(p') &= sL_{LP} \Big|_{s=Q\frac{p'^2+1}{p'}} = \frac{p'^2+1}{p'} QL_{LP} = \\ &= p'QL_{LP} + \frac{1}{p'QL_{LP}} = p'L_{BP}^L + \frac{1}{p'C_{BP}^L} \end{aligned}$$

Es decir, que en las transformaciones LP  $\rightarrow$  BP, **los condensadores se transforman en una asociación en paralelo de bobina y condensador, y las bobinas en asociaciones en serie de bobina y condensador.** Los valores de los nuevos elementos son

$$\begin{aligned} C_{BP}^C &= \frac{1}{L_{BP}^C} = QC_{LP} \\ L_{BP}^L &= \frac{1}{C_{BP}^L} = QL_{LP} \end{aligned} \quad (4.106)$$

En una transformación LP  $\rightarrow$  BR tendremos, utilizando la transformación (4.100),

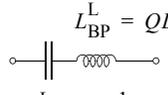
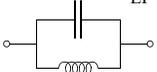
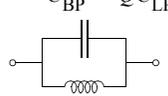
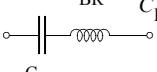
$$\begin{aligned}
 Z_{BR}^C(p') &= \frac{1}{sC_{LP}} \Big|_{s = \frac{1}{Q} \frac{p'}{p'^2 + 1}} = \frac{p'^2 + 1}{p'} \frac{Q}{C_{LP}} = \\
 &= p' \frac{Q}{C_{LP}} + \frac{1}{p' \frac{C_{LP}}{Q}} = p' L_{BR}^C + \frac{1}{p' C_{BR}^C} \\
 Z_{BR}^L(p') &= sL_{LP} \Big|_{s = \frac{1}{Q} \frac{p'}{p'^2 + 1}} = \frac{p'}{p'^2 + 1} \frac{L_{LP}}{Q} = \\
 &= \frac{1}{p' \frac{Q}{L_{LP}} + \frac{1}{p' \frac{L_{LP}}{Q}}} = \frac{1}{p' C_{BR}^L + \frac{1}{p' L_{BR}^L}}
 \end{aligned} \tag{4.107}$$

Es decir, que en las transformaciones LP → BR, **los condensadores se transforman en una asociación en serie de bobina y condensador, y las bobinas en asociaciones en paralelo de bobina y condensador.** Los valores de los nuevos elementos son

$$\begin{aligned}
 C_{BR}^C &= \frac{1}{L_{BR}^C} = \frac{C_{LP}}{Q} \\
 L_{BR}^L &= \frac{1}{C_{BR}^L} = \frac{L_{LP}}{Q}
 \end{aligned} \tag{4.108}$$

Estos resultados se resumen en la Tabla 4.2 Debe remarcarce de nuevo que los valores de los elementos están normalizados en frecuencia y en impedancia, y tendrán que ser desnormalizados.

**Tabla 4.2: Transformación de elementos en una escalera LC como consecuencia de transformaciones en frecuencia normalizadas.**

| LP →  | → HP   | → BP  | → BR  |
|---|--|---|---|
|  | $C_{HP}^L = \frac{1}{L_{LP}}$<br> | $L_{BP}^L = QL_{LP}$<br><br>$C_{BP}^L = \frac{1}{QL_{LP}}$ | $C_{BR}^L = \frac{1}{L_{LP}/Q}$<br><br>$L_{BR}^L = L_{LP}/Q$ |
|  | $L_{HP}^C = \frac{1}{C_{LP}}$<br> | $C_{BP}^C = QC_{LP}$<br><br>$L_{BP}^C = \frac{1}{QC_{LP}}$ | $L_{BR}^C = \frac{1}{C_{LP}/Q}$<br><br>$C_{BR}^C = C_{LP}/Q$ |

### 4.4 Realización de filtros pasa-todo LC doblemente terminados

Se ha visto en la sección anterior que los ceros de transmisión de un filtro LC doblemente terminado pueden venir de (y sólo de) ceros de la transmitancia y de polos privados o no compactos. También sabemos que todos los polos de cualquier parámetro de inmitancia de una bipuerta LC están en el eje imaginario, y que lo mismo ocurre con los ceros de los dos parámetros de inmitancia. Esto no es cierto en general respecto a los ceros del parámetro de transmitancia, pero si lo es si la estructura de la bipuerta es en **escalera**.

Esto quiere decir, claramente, que las bipuertas LC con estructura en escalera no pueden ser utilizadas para la realización de filtros LC doblemente

terminados con funciones de transferencia que no tengan todos sus ceros en el eje imaginario. Sin embargo, en principio sí podrán utilizarse para estos propósitos bipuertas LC que no tengan estructura en escalera.

Un caso claro y de gran importancia de filtro que tiene ceros con parte real distinta de cero (y por tanto fuera del eje imaginario), son los filtros pasa-todo (AP), que se emplean habitualmente como ecualizadores de fase.

Se ha visto con anterioridad que los ceros de una función de transferencia pasa todo están localizados en el semiplano derecho del plano  $s$  y que sus posiciones son imágenes especulares (respecto al eje imaginario) de los polos de la función de transferencia. Puesto que los polos complejos conjugados aparecen siempre por pares, las posiciones de polos y ceros serán también simétricas respecto al origen,

$$z_i = -p_i \quad i = 1, \dots, n \quad (4.109)$$

Esto quiere decir que la función de transferencia siempre puede escribirse como

$$\begin{aligned}
 H(s) &= K \frac{\prod_{i=1}^n (s - z_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} = K \frac{\prod_{i=1}^n (s + p_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} = \\
 &= K \frac{(-1)^n \prod_{i=1}^n (-s - p_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} = (-1)^n K \frac{D(-s)}{D(s)}
 \end{aligned} \quad (4.110)$$

En definitiva, lo que interesa a los propósitos de esta discusión: puesto que se espera que el sistema sea asintóticamente estable, los polos tendrán parte real estrictamente negativa, y por tanto los ceros tendrán parte real estrictamente positiva. Esto quiere decir que para la realización LC doblemente terminada de filtros pasa-todo deberemos usar bipuertas que no tengan estruc-

tura en escalera.

Una estructura de bipuerta LC que cumple muy bien la función que buscamos es la mostrada<sup>150</sup> en la Fig. 4.16, en la que se asume que se cumple la siguiente condición,

$$Z_1(s)Z_2(s) = R_o^2 \quad (4.111)$$

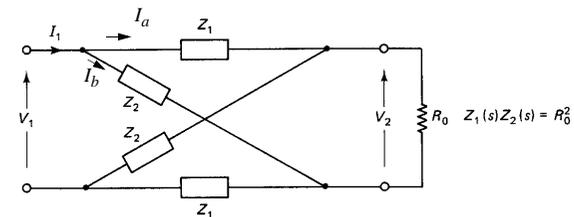
El análisis de dicha bipuerta muestra fácilmente los valores de los parámetros de impedancia,

$$\begin{aligned}
 z_{11} = z_{22} &= \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{I_2=0} = \left. \frac{V_1}{I_a + I_b} \right|_{I_2=0} = \frac{1}{2}(Z_1 + Z_2) \\
 z_{12} &= \left. \frac{V_2}{I_1} \right|_{I_2=0} = \left. \frac{I_a Z_2 - I_b Z_1}{I_a + I_b} \right|_{I_2=0} = \frac{1}{2}(Z_2 - Z_1)
 \end{aligned} \quad (4.112)$$

dónde se ha utilizado el hecho de que la bipuerta es simétrica (y por supuesto recíproca, por condiciones de realizabilidad LC), y también el que, al estar la segunda puerta “en abierto” ( $I_2 = 0$ ) se tendrá

$$I_a = I_b = \frac{V_1}{Z_1 + Z_2} \quad (4.113)$$

La impedancia de entrada vista en la primera puerta de una bipuerta con carga  $R_o$  en la segunda puerta es<sup>151</sup>



**Figura 4.16: Estructura lattice de resistencia constante.**

150. En esta figura se muestra la bipuerta LC y también su resistencia de carga  $R_o$ .

$$Z_{in} = z_{11} - \frac{z_{12}^2}{z_{22} + R_o} \quad (4.114)$$

Utilizando (4.112) y (4.111) podemos observar que

$$\begin{aligned} Z_{in} &= z_{11} - \frac{z_{12}^2}{z_{22} + R_o} = \frac{Z_1}{2} + \frac{Z_2}{2} - \frac{\frac{1}{4}(Z_2 - Z_1)^2}{\frac{Z_1}{2} + \frac{Z_2}{2} + R_o} = \\ &= \frac{Z_1 Z_2 + \frac{Z_2 R_o}{2} + \frac{Z_1 R_o}{2}}{\frac{Z_1}{2} + \frac{Z_2}{2} + R_o} = R_o \frac{\frac{Z_1}{2} + \frac{Z_2}{2} + \frac{Z_1 Z_2}{R_o}}{\frac{Z_1}{2} + \frac{Z_2}{2} + R_o} = R_o \end{aligned} \quad (4.115)$$

es decir, que la **impedancia vista en la primera puerta es independiente de la variable de frecuencia** (compleja o real) y es siempre igual a la impedancia de carga<sup>152</sup>. Por este motivo, a esta estructura (recuérdese que debe cumplir la condición (4.111)) se le suele denominar **“lattice” de resistencia constante**.

Esta propiedad es muy interesante porque significa que podemos sustituir la resistencia de carga de cualquier filtro LC doblemente terminado por una estructura lattice de resistencia constante (con la misma resistencia de carga<sup>153</sup>) sin que esto afecte a la función de transferencia del primer filtro (el filtro previo) en la cascada. Es más, podemos concatenar tantas lattices

151. Esta expresión es general, para cualquier bipuerta, con cualquier carga. Existe una expresión equivalente utilizando los parámetros de admitancia de la bipuerta y la admitancia de la carga.
152. Si la resistencia de salida del generador que atacara a la bipuerta por su puerta 1 fuese también  $R_o$ , habría cero de reflexión en todos los valores de frecuencia. En el caso más general, sólo lo habrá para aquellos valores de frecuencia en los cuales la impedancia de salida del generador sea  $R_o$ .
153. Se remarca de nuevo que los elementos internos a la estructura lattice de resistencia constante deben cumplir la condición (4.111), y por tanto, para adaptar la estructura a un cierto valor de resistencia de carga del filtro LC previo, no bastará con cambiar el elemento de carga de la estructura lattice, sino que habrá que escalar los elementos internos.

de resistencia constante como sean necesarias sin afectar a la función de transferencia vista a la salida del filtro inicial.

Pero, veamos cual es la función de transferencia  $V_2/V_1$  de la estructura lattice<sup>154</sup>. Para ello podemos operar directamente con la estructura lattice y su carga suponiendo que la bipuerta es atacada en su puerta 1 por una fuente de tensión ideal<sup>155</sup>, o utilizar la expresión previa de la función de transferencia en base a la relación de transferencia de potencia en bipuertas LC doblemente terminadas<sup>156</sup> (es decir, cuando el generador tiene impedancia de salida resistiva<sup>157</sup>), su relación con la función de transferencia como cociente de las tensiones  $V_2/V_S$ , y la relación entre  $V_S$  y  $V_1$  en función de la impedancia de entrada a la bipuerta. Siguiendo este último procedimiento tendremos, a partir de (4.67),

$$\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{V_S(s) V_2(s)}{V_1(s) V_S(s)} = \frac{Z_{in}(s) + R_s}{Z_{in}(s)} \sqrt{\frac{R_L}{4R_s}} H(s) \quad (4.116)$$

donde  $H(s)$  estará dado por (4.69), y  $Z_{in}(s)$  por (4.72), es decir,

154. Aquí definimos la función de transferencia de esta manera (como cociente de tensiones) para poder obtener la función de transferencia del filtro total (el previo concatenado con la(s) estructura(s) lattice) mediante la multiplicación de las funciones de transferencia.
155. Por el principio de sustitución, da igual como establezcamos la tensión en la primera puerta para obtener la relación entre ésta y la tensión en la segunda puerta (o cualquier otra variable del circuito).
156. La bipuerta lattice es una bipuerta LC(M): los elementos  $Z_1(s)$  y  $Z_2(s)$  deben ser inmitancias LC.
157. De nuevo apelamos al principio de sustitución.

$$\begin{aligned}
\frac{V_2(s)}{V_1(s)} &= \left( 1 + \frac{R_S}{z_{11} - \frac{z_{12}^2}{z_{22} + R_L}} \right) \frac{\sqrt{\frac{R_L}{4R_S(R_S + z_{11})(R_L + z_{22}) - z_{12}^2}} \cdot 2\sqrt{R_S R_L} z_{12}}{z_{11} - \frac{z_{12}^2}{z_{22} + R_L}} = \\
&= \left( 1 + \frac{R_S(z_{22} + R_L)}{z_{11}(z_{22} + R_L) - z_{12}^2} \right) \frac{R_L z_{12}}{(R_S + z_{11})(R_L + z_{22}) - z_{12}^2} = \\
&= \frac{R_L z_{12}}{z_{11}(z_{22} + R_L) - z_{12}^2}
\end{aligned} \tag{4.117}$$

Este resultado es general para cualquier bipuerta y cualquier impedancia de carga (no necesariamente resistiva)<sup>158</sup>. Tomando<sup>159</sup>  $R_L = R_o$  y utilizando (4.112) y (4.111), tendremos

$$\begin{aligned}
\frac{V_2(s)}{V_1(s)} &= \frac{R_o \left( \frac{Z_2}{2} - \frac{Z_1}{2} \right)}{\left( \frac{Z_1}{2} + \frac{Z_2}{2} \right) \left( \frac{Z_1}{2} + \frac{Z_2}{2} + R_o \right) - \left( \frac{Z_2}{2} - \frac{Z_1}{2} \right)^2} = \\
&= \frac{R_o \left( \frac{Z_2}{2} - \frac{Z_1}{2} \right)}{\left( \frac{Z_1}{2} + \frac{Z_2}{2} \right)^2 + \left( \frac{Z_1}{2} + \frac{Z_2}{2} \right) R_o - \left( \frac{Z_2}{2} - \frac{Z_1}{2} \right)^2} = \\
&= \frac{R_o \left( \frac{Z_2}{2} - \frac{Z_1}{2} \right)}{\left( \frac{Z_1}{2} + \frac{Z_2}{2} \right) R_o + Z_1 Z_2} = \frac{R_o \left( \frac{Z_2}{2} - \frac{Z_1}{2} \right)}{\left( \frac{Z_1}{2} + \frac{Z_2}{2} \right) R_o + R_o^2}
\end{aligned} \tag{4.118}$$

158. El que no aparezca la resistencia de fuente del generador en la expresión de la función de transferencia como relación de tensiones entre ambas puertas era algo esperable y consecuencia del principio de sustitución.

159. Que  $R_L = R_o$  no es más que un cambio de notación.

$$\begin{aligned}
&= \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2 + 2R_o} = \frac{\frac{R_o^2}{Z_1} - Z_1}{2R_o + Z_1 + \frac{R_o^2}{Z_1}} = \frac{R_o^2 - Z_1^2}{2R_o Z_1 + Z_1^2 + R_o^2} = \\
&= \frac{R_o^2 - Z_1^2}{(R_o + Z_1)^2} = \frac{R_o - Z_1}{R_o + Z_1} = \frac{1 - \frac{Z_1}{R_o}}{1 + \frac{Z_1}{R_o}}
\end{aligned} \tag{4.119}$$

Es decir,

$$\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{1 - Z_1/R_o}{1 + Z_1/R_o} \tag{4.120}$$

Lógicamente, se puede escribir una forma alternativa en función de  $Z_2(s)$ .

Ahora, teniendo en cuenta que tanto  $Z_1(s)$  como  $Z_2(s)$  son impedancias LC, y que por tanto son impares, veremos fácilmente que la función de transferencia obtenida puede escribirse siempre en la forma<sup>160</sup> de (4.110) con  $K = 1$ , es decir, que la función de transferencia del lattice de resistencia constante es una función pasa todo de magnitud unidad. Otra forma de ver esto mismo es observar que, en régimen sinusoidal estacionario,  $Z_1(s) = Z_1(j\omega)$  será imaginaria pura por ser  $Z_1(s)$  una impedancia LC. Por tanto, la expresión final para la función de transferencia es el cociente de dos números complejos conjugados, y por tanto de magnitud constante e igual a la unidad.

Por tanto, el circuito “lattice” LC de resistencia constante es un filtro pasa todo cuya impedancia de entrada es igual a la resistencia de carga para todas las frecuencias.

160. Aunque  $Z_1(s)$  no sea un polinomio, sino una función racional, basta considerar que su numerador será par y su denominador impar o viceversa (de nuevo por ser una inimpedancia LC). Ambas posibilidades llevan al resultado mencionado.

Hemos comprobado por tanto que, si se ha diseñado un filtro escalera LC con una resistencia de carga  $R_L$  atendiendo a las especificaciones de magnitud, y observamos después que tenemos que corregir su fase o retraso, podemos reemplazar la resistencia de carga por una “lattice” o una cascada de “lattices” terminadas en  $R_L$ . La operación de la escalera LC no se ve afectada ya que su carga no varía, y la función de transferencia global (tomando la salida en la segunda puerta de la (última) lattice) tendrá la magnitud del filtro escalera inicial y la fase (retraso) resultante de sumar la del filtro escalera inicial y la de la lattice (o cascada de lattices) añadida.

Veamos ahora la forma de realización de una función pasa todo<sup>161</sup> de magnitud unidad y de orden  $n$ :

$$H_n(s) = \frac{D_n(-s)}{D_n(s)} \quad (4.121)$$

Si  $n$  es par el polinomio  $D_n(s)$  se puede factorizar en términos de la forma:

$$s^2 + s\frac{\omega_i}{Q_i} + \omega_i^2 \quad (4.122)$$

y si  $n$  es impar, en factores de este tipo y un factor de primer orden:

$$s + \sigma \quad (4.123)$$

Por tanto, la función de transferencia global, si  $n$  es impar, puede escribirse como:

$$H_n(s) = \frac{-s + \sigma}{s + \sigma} \prod_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{s^2 - s\omega_i/Q_i + \omega_i^2}{s^2 + s\omega_i/Q_i + \omega_i^2} = H_1(s) \prod_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} H_{2i}(s) \quad (4.124)$$

y si  $n$  es par como

161. Nos despreciamos aquí del signo, que no suele ser relevante (una fase constante adicional, que no afecta al retraso de grupo, la especificación normalmente de interés). Por otra parte, si el signo es interesante, siempre se puede redefinir la polaridad de la segunda puerta.

$$H_n(s) = \prod_{i=1}^{\frac{n}{2}} \frac{s^2 - s\omega_i/Q_i + \omega_i^2}{s^2 + s\omega_i/Q_i + \omega_i^2} = \prod_{i=1}^{\frac{n}{2}} H_{2i}(s) \quad (4.125)$$

Por tanto,  $H_1(s)$  y  $H_{2i}(s)$  podrían realizarse separadamente, cada una de ellas con un lattice de resistencia constante, y obtener  $H_n(s)$  mediante la cascada de todas ellas. Es decir, el problema se reduce a implementar funciones pasa todo de primer y segundo orden mediante lattices de resistencia constante. Normalizando los parámetros de impedancia de la estructura de lattice constante respecto a  $R_0$  (nótese que, para utilizar la cascada de lattice como ecualizador de fase de un filtro LC(M) diseñado previamente, deberemos tomar  $R_0 = R_L$ ) y considerando la variable de frecuencia compleja también normalizada, obtendremos realizaciones en las que todos los elementos están normalizados en frecuencia y en impedancia. La ecuación (4.111) pasa a ser,

$$Z_1(s)Z_2(s) = 1 \quad (4.126)$$

y la (4.120)

$$\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{1 - Z_1(s)}{1 + Z_1(s)} \quad (4.127)$$

donde las impedancias  $Z_1(s)$  y  $Z_2(s)$  están ahora normalizadas en impedancia y en frecuencia.

Para la función pasa todo de primer orden:

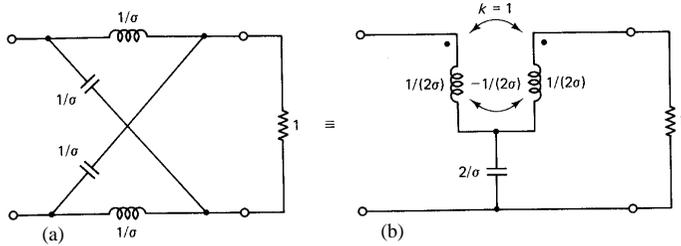
$$H_1(s) = \frac{-s + \sigma}{s + \sigma} = \frac{1 - s/\sigma}{1 + s/\sigma} = \frac{1 - Z_1(s)}{1 + Z_1(s)} \quad (4.128)$$

Es decir,

$$Z_1(s) = \frac{1}{Z_2(s)} = \frac{s}{\sigma} \quad (4.129)$$

donde hemos usado (4.126).

La realización de esta función se muestra en la Fig. 4.17(a). La Fig. 4.17(b) es un equivalente con tierra común que puede analizarse y comprobar que es un circuito equivalente. Todos los elementos están normalizados en frecuencia y en impedancia, por lo que habrán de ser desnormalizados convenientemente.



**Figura 4.17: Estructura pasa-todo de primer orden de resistencia constante: (a) lattice de 4 elementos; (b) circuito equivalente con tierra común.**

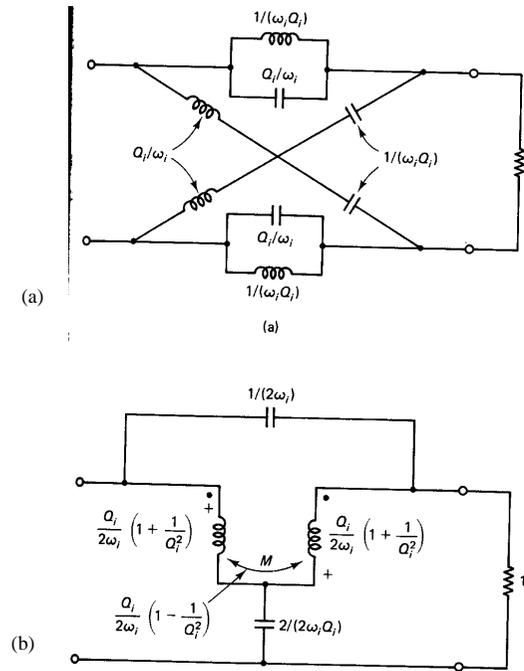
Para el caso de la función de segundo orden:

$$H_{2i}(s) = \frac{s^2 - s\omega_i/Q_i + \omega_i^2}{s^2 + s\omega_i/Q_i + \omega_i^2} = \frac{1 - \frac{s\omega_i/Q_i}{s^2 + \omega_i^2}}{1 + \frac{s\omega_i/Q_i}{s^2 + \omega_i^2}} \quad (4.130)$$

Por tanto,  $Z_1$  y  $Z_2$  son:

$$Z_1(s) = \frac{1}{Z_2(s)} = \frac{s\omega_i/Q_i}{s^2 + \omega_i^2} \quad (4.131)$$

cuya realización se muestra en la Fig. 4.18(a). El circuito de la Fig. 4.18(b) es un circuito equivalente de tierra común que puede analizarse y comprobar que es un circuito equivalente. Todos los elementos están normalizados en frecuencia y en impedancia, por lo que habrán de ser desnormalizados convenientemente.



**Figura 4.18: Estructura pasa-todo de segundo orden de resistencia constante: (a) lattice de 8 elementos; (b) circuito equivalente con tierra común.**

## Problemas Resueltos

---

### Ejercicio

**4.1.** Demostrar que si la impedancia  $Z(s)$  es una función real positiva, la admitancia  $Y(s)$  también lo es.

#### Solución detallada

Una función  $F(s)$  es real positiva si y sólo si para cualquier  $s$  con parte real no negativa, la parte real de la función evaluada en ese valor de  $s$  también tiene parte real no negativa, es decir, si y sólo si

$$\forall s / \operatorname{Re}(s) \geq 0, \operatorname{Re}(F(s)) \geq 0 \quad (4.132)$$

En nuestro caso, la impedancia es real positiva, por lo que se cumple la condición anterior. Ahora podemos relacionar el signo de la parte real de la admitancia con el signo de la parte real de la impedancia, notando que

$$\operatorname{Re}(Y(s)) = \operatorname{Re}(1/Z(s)) = \operatorname{Re}(Z^*(s)/|Z(s)|) \quad (4.133)$$

y por tanto,

$$\operatorname{signo}(\operatorname{Re}(Y(s))) = \operatorname{signo}(\operatorname{Re}(Z(s))) \quad (4.134)$$

lo que quiere decir que si se cumple la condición (4.132) para la impedancia, también se cumplirá para la admitancia.

Es evidente que también ocurre lo contrario, es decir, que si se cumple para la admitancia, también se cumplirá para la impedancia.

Esta reciprocidad es lógica, puesto que si una cierta impedancia (o admitancia) es realizable, cualquier circuito que la implementara tendría la admitancia (o impedancia) correspondiente, que por tanto también sería realizable.

**NOTA:** Una función de impedancia o admitancia es realizable con elementos RLCM positivos de parámetros concentrados si y sólo si la función es

una función racional real, real-positiva. Una función es racional real, real positiva si y sólo si cumplen las dos condiciones siguientes,

- La función es una función racional real
- La función es una función real positiva

La condición (a) se verifica a la vista, y en general se da por supuesta en el contexto de esta asignatura. Por tanto, cuando hablamos de si una función es o no real positiva (condición (b)) entendemos que esto es equivalente a hablar de si es o no realizable (por “realizable”, se entiende en nuestro contexto “realizable como impedancia o admitancia con elementos RLCM positivos de parámetros concentrados”. En general diremos únicamente “realizable”, dando por entendido todo lo demás por simplicidad).

---

### Ejercicio

**4.2.** ¿Cuáles de las siguientes funciones de impedancia o admitancia son reales positivas y por qué?

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \frac{s^2 + 2s + 24}{s^2 + 5s + 16} & \text{(b)} \quad & \frac{s + 3}{s^2 + 2s + 1} \\ \text{(c)} \quad & \frac{s^3 + 2}{s^2 + 2s + 1} & \text{(d)} \quad & \frac{s^3 + 2s^2 + 3s + 1}{s + 1} \end{aligned} \quad (4.135)$$

#### Solución detallada

Puesto que todas ellas son funciones racionales con coeficientes reales, las que sean reales positivas, y sólo las que lo sean, serán realizables (como impedancia o admitancia con elementos RLCM positivos de parámetros concentrados).

Una función es real positiva si y sólo si verifica la condición dada en (4.132). Una manera de abordar el problema directamente sería tomar  $s = \sigma + j\omega$ , sustituir en las expresiones de las funciones, obtener la parte

real de las funciones, en función de  $\sigma$  y  $\omega$ , y observar si son no negativas para cualquier valor no negativo de  $\sigma$  y para cualquier valor de  $\omega$ . Este procedimiento es, cuando menos, tedioso (el alumno puede hacer un intento con alguna de las funciones). En estos casos, es preferible recurrir a un conjunto de condiciones equivalentes para la condición (4.132), es decir, una definición equivalente de función real positiva, que puede formularse de la siguiente manera.

Una función  $F(s)$  es real positiva si y sólo si cumple las dos condiciones siguientes:

$$\text{b.1) } \operatorname{Re}(F(j\omega)) \geq 0 \quad \forall \omega \in R$$

b.2) Todos los polos de  $F(s)$  tienen parte real no positiva. Si los polos tienen parte real nula (están en el eje imaginario), deben ser simples y tener residuo real y positivo.

**NOTA:** a los efectos de la condición b.2) los polos en  $s = 0$  y  $s = \infty$  están en el eje imaginario.

Vamos ahora a utilizar las condiciones b.1) y b.2) para ver cuáles de las funciones propuestas son reales positivas (es decir, realizables en forma de impedancia o admitancia con elementos RLCM de parámetros concentrados y positivos, pues es evidente que son racionales de coeficientes reales).

#### Apartado A:

$$F(s) = \frac{s^2 + 2s + 24}{s^2 + 5s + 16} \quad (4.136)$$

intentamos verificar primero<sup>162</sup> la condición b.1). Para ello hacemos  $s = j\omega$ , multiplicamos numerador y denominador por el conjugado del denominador (con lo que el nuevo denominador es la magnitud al cuadrado del denominador inicial, y por tanto real y no negativo), y analizamos el signo de la parte real del nuevo numerador. En nuestro caso:

$$F(j\omega) = \frac{(24 - \omega^2) + j(2\omega)}{(16 - \omega^2) + j(5\omega)} = \frac{(24 - \omega^2)(16 - \omega^2) + 10\omega^2 + j(\dots)}{(16 - \omega^2)^2 + (5\omega)^2} \quad (4.137)$$

$$\begin{aligned} \text{Para ver el signo de la parte real del nuevo numerador podemos observar que} \\ (24 - \omega^2)(16 - \omega^2) + 10\omega^2 &= \omega^4 - 30\omega^2 + 384 = \\ &= \omega^4 - 2 \cdot 15\omega^2 + 15^2 + 159 = (\omega^2 - 15)^2 + 159 > 0 \end{aligned} \quad (4.138)$$

y por tanto se satisface la condición b.1). Veamos ahora la condición b.2). Para ello calculamos los polos de  $F(s)$ , que resultan ser

$$p_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 16}}{2} = -2.5 \pm j(\dots) \quad (4.139)$$

pues el discriminante es negativo. Es evidente por tanto que se cumple también la condición b.2, pues la parte real de los polos es negativa (estrictamente negativa en este caso, es decir, no hay polos en el eje imaginario, lo que simplifica las cosas). El alumno puede verificar que la condición b.2) también es satisfecha por los ceros de  $F(s)$ , como era de esperar según los comentarios anteriores.

**NOTA:** debe tenerse en cuenta la posible existencia de polos (o ceros) en  $s = \infty$ . Estos polos (o ceros) no aparecen como raíces del denominador (o numerador), sino como consecuencia de diferencias de orden entre numerador y denominador. Por este motivo, es frecuente olvidarse de ellos, lo que constituye un error grave.

162. En la práctica, puede ser preferible verificar primero la condición b.2, si la obtención de los polos es posible "a mano". Nótese que, sabiendo que si una función de impedancia es realizable también lo será la admitancia, podemos deducir que la condición b.2 también debe ser satisfecha por los ceros de la función. Puede ser conveniente emplear esto (p.e. simplicidad de los ceros y situación en el eje imaginario) para descartar rápidamente la realizabilidad de algunas funciones de impedancia o admitancia. Por el mismo motivo, la comprobación de realizabilidad puede hacerse siempre sobre la inmitancia dada o sobre su inversa, la que nos sea más conveniente en cada caso.

**Apartado B:**

$$F(s) = \frac{s+3}{s^2+2s+1} \quad (4.140)$$

Siguiendo el procedimiento descrito en el apartado anterior para verificar la condición b.1) tendremos,

$$F(j\omega) = \frac{3+j\omega}{(1-\omega^2)+j(2\omega)} = \frac{3(1-\omega^2)+2\omega^2+j(\dots)}{(1-\omega^2)^2+(2\omega)^2} \quad (4.141)$$

y observando que

$$3(1-\omega^2)+2\omega^2 = 3-\omega^2 < 0 \quad \forall |\omega| > \sqrt{3} \quad (4.142)$$

podemos decir que  $\text{Re}(F(j\omega)) < 0$ ,  $\forall |\omega| > \sqrt{3}$ , es decir, que **no** se cumple la condición b.1), y por tanto la función no es real positiva (no es “realizable”).

**Apartado C:**

$$F(s) = \frac{s^3+2}{s^2+2s+1} \quad (4.143)$$

Siguiendo el mismo procedimiento tendremos,

$$F(j\omega) = \frac{2-j\omega^3}{(1-\omega^2)+j(2\omega)} = \frac{2(1-\omega^2)-2\omega^4+j(\dots)}{(1-\omega^2)^2+(2\omega)^2} \quad (4.144)$$

y observando que existen muchos valores de  $\omega$  para los cuales

$$2(1-\omega^2)-2\omega^4 = 2(1-\omega^2-\omega^4) < 0 \quad (4.145)$$

podemos decir que esta función tampoco es real positiva.

**NOTA:** una forma alternativa de haber visto esto era fijarse en que la función tiene ceros (polos de la inversa) con parte real positiva,

$$\begin{aligned} z_{1,2,3} &= \sqrt[3]{-2} = (2e^{j(2n+1)\pi})^{1/3} = \sqrt[3]{2}e^{j\frac{(2n+1)\pi}{3}} = \\ &= \{\sqrt[3]{2}e^{j\pi/3}, \sqrt[3]{2}e^{j\pi}, \sqrt[3]{2}e^{-j\pi/3}\} \end{aligned} \quad (4.146)$$

lo que quiere decir que la función inversa no es realizable y por tanto tampoco lo es ella.

**Apartado D:**

$$F(s) = \frac{s^3+2s^2+3s+1}{s+1} \quad (4.147)$$

Podríamos empezar de nuevo por verificar el cumplimiento de la condición b.1). Sin embargo, en este caso podemos ahorrarnos trabajo y tiempo observando que la función tiene un polo doble en infinito (el orden del numerador es superior en 2 unidades al del denominador). Puesto que a los efectos de la condición b.2), el infinito es un punto del eje imaginario, tenemos un polo doble en el eje imaginario, es decir, no se cumple la condición b.2) y por tanto esta función tampoco es realizable.

**Ejercicio**

**4.3.** Hallar las realizaciones de Foster y de Cauer para la función de impedancia

$$Z(s) = \frac{2s^3+8s}{s^2+1} \quad (4.148)$$

**Solución detallada**

Aunque no nos lo piden, podemos empezar por comprobar la “realizabilidad LC” de la impedancia. La realizabilidad LC (es decir, la realizabilidad sólo con elementos L y C de parámetros concentrados y positivos) es un caso particular de la realizabilidad RLCM, y por tanto, debe cumplir las con-

diciones generales de realizabilidad RLCM. Sin embargo, para que sea realizable sólo con condensadores y bobinas, estas condiciones deben cumplirse de forma más restrictiva. En particular, la condición a) no cambia, pero las condiciones b.1) y b.2) deben cumplirse ahora “con una igualdad”, es decir, la transformación del eje imaginario debe estar incluida en el eje imaginario, y los polos deben ser imaginarios puros (y por tanto simples y con residuo real y positivo). Las condiciones de realizabilidad LC de una función de impedancia o admitancia  $F(s)$  las podemos enumerar entonces de la siguiente manera:

a) La función es una función racional de coeficiente reales

$$b.1) \operatorname{Re}(F(j\omega)) = 0 \quad \forall \omega \in R$$

b.2) Todos los polos de  $F(s)$  deben estar en el eje imaginario, deben ser simples, y deben tener residuo real y positivo.

Recuérdese que a los efectos de la condición b.2) los polos en  $s = 0$  y  $s = \infty$  están en el eje imaginario.

Recuérdese también que la realizabilidad de una impedancia (o admitancia) implica la realizabilidad de la admitancia (o impedancia) asociada. Esto quiere decir que los ceros también tienen que estar en el eje imaginario, ser simples, y sus “residuos” (de la inversa de la función) deben ser reales y positivos.

Por otra parte, de las condiciones anteriores se deducen un conjunto de condiciones necesarias (no tienen por que ser suficientes) que pueden servir para desechar rápidamente la realizabilidad LC de algunas funciones. Estas son:

- El numerador y el denominador deben ser impar o par en  $s$ .
- La función debe ser impar en  $s$ , es decir, numerador y denominador deben ser uno impar y el otro impar.
- La diferencia de orden entre numerador y denominador debe ser  $\pm 1$ .
- Los polos y los ceros de la función deben aparecer intercalados en el eje  $j\omega$ .

Veamos ahora si la función que nos proponen es realizable LC. La repetimos aquí por comodidad,

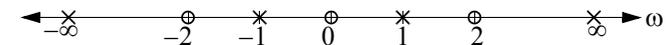
$$Z(s) = \frac{2s^3 + 8s}{s^2 + 1} \quad (4.149)$$

Es fácil comprobar que se cumplen las cuatro condiciones necesarias mencionadas arriba<sup>163</sup>. El numerador es impar, y el denominador par. La función es impar por tanto. La diferencia de orden es 1. Los polos y los ceros están en

$$\begin{aligned} \{p\} &= \{\pm j1, \infty\} \\ \{z\} &= \{0, \pm j2\} \end{aligned} \quad (4.150)$$

que efectivamente están intercalados en el eje  $\omega$ .

Es frecuente representar esto de la siguiente manera:



Nótese que estamos representando los polos en el eje imaginario  $j\omega$  del plano  $s$ , pero que por simplicidad se ha omitido la unidad imaginaria. Nótese también que hay simetría respecto al origen. Esto es una consecuencia directa de que la función sea racional con coeficientes reales. Nótese también que sólo existe un polo en cero, porque el cero y su conjugado son iguales, y sólo un polo en infinito por la misma razón (no existe un polo en  $\infty$  y otro en  $-\infty$ , como pudiera parecer). Debido a esta simetría, es frecuente representar las posiciones de polos y ceros sólo en la parte positiva del eje  $\omega$ , y también, de forma análoga, en el eje  $\omega^2$  como se muestra a continuación para el caso de este problema:



163. En general será una buena estrategia empezar por aquí, porque la verificación o no de estas condiciones suele ser inmediata.

No hemos podido descartar la realizabilidad de la función en base a las condiciones necesarias sencillas. Recurrimos por tanto a las condiciones suficientes y necesarias de realizabilidad LC. El cumplimiento de la condición a) es evidente. En cuanto a la condición<sup>164</sup> b.1),

$$Z(j\omega) = \frac{2s^3 + 8s}{s^2 + 1} = \frac{-j\omega^3 + j8\omega}{-\omega^2 + 1} = j\omega \frac{8 - \omega^2}{1 - \omega^2} \quad (4.151)$$

que claramente es imaginario puro<sup>165</sup>, o lo que es lo mismo, la reactancia  $X(\omega)$  es real

$$\begin{aligned} Z(j\omega) &= jX(\omega) \\ X(\omega) &= \omega \frac{8 - \omega^2}{1 - \omega^2} \in \Re \end{aligned} \quad (4.152)$$

La condición b.1) se cumple por tanto. Veamos la b.2). Los polos, calculados antes como  $\{p\} = \{\pm j1, \infty\}$  son efectivamente imaginarios puros y simples. Calculemos ahora sus residuos,

$$\begin{aligned} Z(s) &= \frac{2s^3 + 8s}{s^2 + 1} = k_\infty s + \frac{k_{+j1}}{s - j1} + \frac{k_{-j1}}{s + j1} \\ k_\infty &= \left[ Z(s) \frac{1}{s} \right] \Big|_{s \rightarrow \infty} = 2 \end{aligned} \quad (4.153)$$

$$k_{+j1} = [Z(s)(s - j1)] \Big|_{s \rightarrow +j1} = \left[ \frac{2s^3 + 8s}{(s + j1)} \right] \Big|_{s \rightarrow +j1} = 3$$

$$k_{-j1} = [Z(s)(s + j1)] \Big|_{s \rightarrow -j1} = \left[ \frac{2s^3 + 8s}{(s - j1)} \right] \Big|_{s \rightarrow -j1} = 3$$

164. Se están utilizando los mismos nombres b.1) y b.2) para las condiciones de realizabilidad RLCM y realizabilidad LC, que son diferentes (para la condición **a**) no hay problema porque ésta es la misma para ambos casos). Según el contexto, deberá quedar claro a qué condiciones de realizabilidad (RLCM ó LC) nos referimos en cada momento.

165. Esto es una consecuencia directa de que el numerador y el denominador sean polinomios par o impar, y de que la paridad de uno sea la contraria de la del otro.

que son reales y positivos. Por tanto, se cumple también la condición b.2), lo que significa que la impedancia es realizable LC. Esto, por otra parte, era de esperar, ya que se nos pide que la realicemos de varias maneras.

La expansión en fracciones simples y evaluación de los residuos hecha en (4.153) puede hacerse también de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} Z(s) &= \frac{2s^3 + 8s}{s^2 + 1} = k_\infty s + \frac{K_1 s}{s^2 + 1} \\ k_\infty &= \left[ Z(s) \frac{1}{s} \right] \Big|_{s \rightarrow \infty} = 2 \end{aligned} \quad (4.154)$$

$$K_1 = \left[ Z(s) \frac{s^2 + 1}{s} \right] \Big|_{s^2 \rightarrow -1} = (2s^2 + 8) \Big|_{s^2 \rightarrow -1} = 6$$

El hecho de que  $K_1$  sea real y positivo demuestra que los residuos (que valen<sup>166</sup>  $K_1/2$  y  $K_1^*/2$ ) son también reales y positivos.

Una vez visto que la función es realizable LC, vamos a realizarla siguiendo las distintas técnicas que nos piden.

### Foster 1

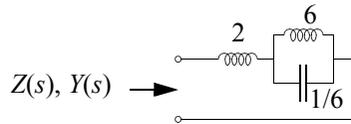
La realización Foster 1 es una realización canónica basada en la expansión en fracciones simples de la impedancia, y la conexión en serie de la realización de cada una de las fracciones simples de impedancia. Esta expansión se hizo ya en (4.154)

$$Z(s) = \frac{2s^3 + 8s}{s^2 + 1} = 2s + \frac{6s}{s^2 + 1} = 2s + \frac{1}{\frac{1}{6}s + \frac{1}{6s}} \quad (4.155)$$

El primer sumando corresponde a una bobina de valor 2, mientras el segundo corresponde a una asociación en paralelo de una bobina y un condensador

166. La evaluación de cuál de los dos residuos corresponde a cada uno de los polos requiere realizar las evaluaciones con  $s$  tendiendo a  $p$  y a  $-p$  (o lo que es lo mismo, a  $p^*$ ), en vez de con  $s$  tendiendo a  $-|p|^2$ .

de valores 6 y 1/6 respectivamente:



Lógicamente, el orden de los sumandos no afecta a la impedancia observada (ni al circuito).

**NOTA:** Los elementos se expresan sin unidades porque se asume que la función  $Z(s)$  dada está normalizada en frecuencia y en impedancia (ya que sus coeficientes no tienen unidades). Por tanto, los elementos obtenidos son en realidad elementos normalizados (por la misma impedancia y frecuencia), y por tanto, adimensionales.

### Foster 2

La realización Foster 2 es una realización canónica basada en la expansión en fracciones simples de la admitancia, y la conexión en paralelo de la realización de cada una de las fracciones simples de admitancia. Esta expansión puede obtenerse de la siguiente manera,

$$Y(s) = \frac{1}{Z(s)} = \frac{s^2 + 1}{2s^3 + 8s} = \frac{s^2 + 1}{2s(s^2 + 4)} = \frac{k_0}{s} + \frac{K_1 s}{s^2 + 4}$$

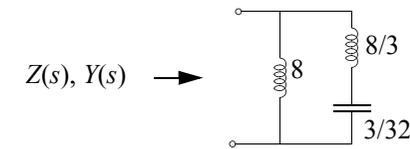
$$k_0 = [Y(s)s] \Big|_{s \rightarrow 0} = \frac{s^2 + 1}{2(s^2 + 4)} \Big|_{s \rightarrow 0} = \frac{1}{8} \quad (4.156)$$

$$K_1 = \left[ Y(s) \frac{s^2 + 4}{s} \right] \Big|_{s^2 \rightarrow -4} = \frac{s^2 + 1}{2s^2} \Big|_{s^2 \rightarrow -4} = \frac{3}{8}$$

Es decir,

$$Y(s) = \frac{1/8}{s} + \frac{(3/8)s}{s^2 + 4} = \frac{1}{8s} + \frac{1}{\frac{8}{3}s + \frac{1}{32}s} \quad (4.157)$$

El primer sumando corresponde a una bobina de valor 8, mientras el segundo corresponde a una asociación en serie de una bobina y un condensador de valores 8/3 y 3/32 respectivamente:



### Cauer 1

La realización Cauer 1 es una realización canónica en escalera basada en la eliminación consecutiva de polos en infinito. Esta expansión puede obtenerse de la siguiente manera.

Puesto que  $Z(s)$  tiene efectivamente un polo en infinito (en caso contrario, empezaríamos eliminando el polo en infinito que tendría la impedancia<sup>167</sup>), empezamos por obtener su residuo en infinito y la impedancia restante, que es invertida para obtener la admitancia restante equivalente, a la que de nuevo se le elimina su residuo en infinito y así sucesivamente:

167. Dado que la diferencia de grado entre numerador y denominador es siempre  $\pm 1$ , y que o bien el numerador o bien el denominador es impar, las inmitancias LC tienen siempre un polo o un cero en  $s \rightarrow 0$ , y un polo o un cero en  $s \rightarrow \infty$ . Esto quiere decir que podemos estar seguros de que siempre alguna de las dos inmitancias (la impedancia o la admitancia) tendrá polo en  $s \rightarrow 0$  y también de que alguna de las dos (puede ser la misma o no) lo tendrá en  $s \rightarrow \infty$ .

$$Z(s) \equiv Z_1(s) = \frac{2s^3 + 8s}{s^2 + 1} = k_{\infty Z_1} s + Z_2(s)$$

$$k_{\infty Z_1} = 2$$

$$Z_2(s) = Z_1(s) - k_{\infty Z_1} s = \frac{6s}{s^2 + 1} \tag{4.158}$$

$$Y_2(s) = \frac{1}{Z_2(s)} = \frac{s^2 + 1}{6s} = k_{\infty Y_2} s + Y_3(s)$$

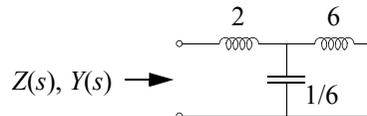
$$k_{\infty Y_2} = 1/6$$

$$Y_3(s) = Y_2(s) - k_{\infty Y_2} s = \frac{1}{6s}$$

$$Z_3(s) = \frac{1}{Y_3(s)} = 6s = k_{\infty Z_3} s \tag{4.159}$$

$$k_{\infty Z_3} = 6$$

La eliminación de polos de impedancia y admitancia en infinito resulta en este caso en el siguiente circuito (La eliminación de un polo de impedancia se corresponde con una “rama serie”, y la de un polo de admitancia con una “rama paralelo”. La rama que tiene un polo de impedancia en infinito es una bobina de valor igual al residuo de impedancia eliminado, y la que tiene un polo de admitancia en infinito es un condensador de valor igual al residuo de admitancia eliminado),



**NOTA:** este circuito es idéntico al obtenido de la implementación Foster 1. Cuando el orden de las inmitancias es menor o igual a 3, las implementaciones de Foster y de Cauer coinciden<sup>168</sup>. Para orden 4 o mayor no.  
168. No necesariamente de la forma Foster 1 con Cauer 1 y Foster 2 con Cauer 2

**Cauer 2**

La realización Cauer 2 es una realización canónica en escalera basada en la eliminación consecutiva de polos en cero. Esta expansión puede obtenerse de la siguiente manera.

Puesto que  $Z(s)$  no tiene polo en cero, debemos empezar por la admitancia, que sí lo tendrá. Comenzamos por obtener su residuo en cero y la admitancia restante, que es invertida para obtener la impedancia restante equivalente, a la que de nuevo se le elimina su residuo en cero y así sucesivamente:

$$Y(s) \equiv Y_1(s) = \frac{s^2 + 1}{2s^3 + 8s} = \frac{k_0 Y_1}{s} + Y_2(s)$$

$$k_0 Y_1 = 1/8$$

$$Y_2(s) = Y_1(s) - \frac{k_0 Y_1}{s} = \frac{(3/8)s}{s^2 + 4} \tag{4.160}$$

$$Z_2(s) = \frac{1}{Y_2(s)} = \frac{s^2 + 4}{(3/8)s} = \frac{k_0 Z_3}{s} + Z_3(s)$$

$$k_0 Z_3 = 32/3$$

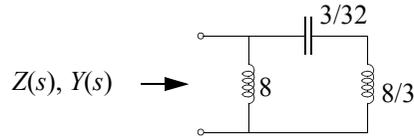
$$Z_3(s) = Z_2(s) - \frac{k_0 Z_3}{s} = \frac{8}{3}s \tag{4.161}$$

$$Y_3(s) = \frac{1}{Z_3(s)} = \frac{3}{8s} = \frac{k_0 Y_3}{s}$$

$$k_0 Y_3 = 3/8$$

La eliminación de polos de admitancia e impedancia en cero resulta en este caso en el siguiente circuito (La eliminación de un polo de admitancia se corresponde con una “rama paralelo”, y la de un polo de impedancia con una “rama serie”. La rama que tiene un polo de admitancia en cero es una bobina de valor igual a la inversa del residuo de admitancia eliminado, y la

que tiene un polo de impedancia en cero es un condensador de valor igual a la inversa del residuo de impedancia eliminado),



**NOTA:** este circuito es idéntico al obtenido de la implementación Foster 2.

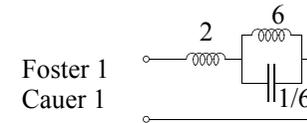
Una buena medida, que puede servir para detectar errores, consiste en estimar el comportamiento asintótico de la impedancia y admitancia (lógicamente serán inversos) cuando  $s \rightarrow 0$  y cuando  $s \rightarrow \infty$ , y contrastarlo con el comportamiento asintótico que se deriva de los circuitos realizados. En nuestro caso,

$$\begin{aligned}
 Z(s) &= \frac{2s^3 + 8s}{s^2 + 1} & \begin{cases} \lim_{s \rightarrow 0} Z(s) \approx 8s \\ \lim_{s \rightarrow 0} Y(s) \approx \frac{1}{8s} \end{cases} \\
 Y(s) &= \frac{s^2 + 1}{2s^3 + 8s} & \begin{cases} \lim_{s \rightarrow \infty} Z(s) \approx 2s \\ \lim_{s \rightarrow \infty} Y(s) \approx \frac{1}{2s} \end{cases}
 \end{aligned}
 \tag{4.162}$$

Para obtener el comportamiento asintótico de los circuitos se aplican dos reglas básicas: 1) en una asociación en serie (suma de impedancias), domina la mayor impedancia, y por tanto si uno de los elemento tiene una impedancia mucho menor que los demás, este elemento puede aproximarse por un cortocircuito, y 2) en una asociación en paralelo (suma de admitancias), domina la mayor admitancia, y por tanto si uno de los elementos tiene una admitancia mucho menor que los demás, este elemento puede aproximarse por un circuito abierto. A estas reglas se añade el hecho de que la impedancia (la admitancia) de los condensadores tiende a infinito (a cero) cuando

$s \rightarrow 0$  y a cero (a infinito) cuando  $s \rightarrow \infty$ , y que la impedancia (la admitancia) de las bobinas tiende a cero (a infinito) cuando  $s \rightarrow 0$  y a infinito (a cero) cuando  $s \rightarrow \infty$ .

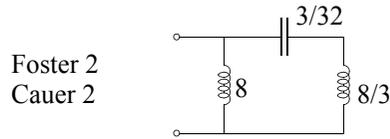
Aplicando estas reglas a los circuitos obtenidos anteriormente, tendremos, para el circuito resultante de la realización Foster 1 o la Cauer1, repetido aquí por comodidad, los siguiente resultados,



Para  $s \rightarrow 0$ , la bobina de valor 6 es mucho más “conductiva” que el condensador con el que está en paralelo, y por tanto el condensador puede sustituirse por un abierto. En la asociación serie resultante, de dos bobinas, no domina ninguna. La bobina equivalente es la suma, es decir, una bobina de valor 8. Esto quiere decir que la impedancia tiende a  $8s$  y la admitancia, como es lógico, a la inversa  $1/8s$ .

Para  $s \rightarrow \infty$ , el condensador es mucho más “conductivo” que la bobina de valor 6 con la que está en paralelo, y por tanto la bobina puede sustituirse por un abierto. En la asociación serie resultante, la bobina de valor 2 es mucho más “resistiva” que el condensador, y por tanto el condensador puede sustituirse por un cortocircuito. El resultado es una bobina de valor 2. Esto quiere decir que la impedancia tiende a  $2s$  y la admitancia a  $1/2s$ . Tanto los resultados correspondientes a  $s \rightarrow 0$  como los correspondientes a  $s \rightarrow \infty$  son congruentes con (4.162).

Yendo ahora al circuito resultante de la realización Foster 2 o la Cauer 2, repetido aquí por comodidad, los resultados son los siguientes,



Para  $s \rightarrow 0$ , la bobina de valor  $8/3$  es mucho más “conductiva” que el condensador con el que está en serie, y por tanto la bobina puede sustituirse por un cortocircuito. En la asociación paralelo resultante, el condensador es mucho más “resistivo que la bobina de valor 8, y por tanto el condensador puede sustituirse por un circuito abierto. El resultado es una bobina de valor 8. Esto quiere decir que la impedancia tiende a  $8s$  y la admitancia, como es lógico, a la inversa  $1/8s$ .

Para  $s \rightarrow \infty$ , el condensador es mucho más “conductivo” que la bobina de valor  $8/3$  con la que está en serie, y por tanto el condensador puede sustituirse por un cortocircuito. En la asociación paralelo resultante, de dos bobinas, no domina ninguna. La bobina equivalente de una asociación en paralelo es la inversa de la suma de los inversos. El resultado es una bobina de valor 2. Esto quiere decir que la impedancia tiende a  $2s$  y la admitancia a  $1/2s$ . De nuevo, tanto los resultados correspondientes a  $s \rightarrow 0$  como los correspondientes a  $s \rightarrow \infty$  son congruentes con (4.162).

Además, los resultados obtenidos de ambos circuitos también son congruentes entre sí. Esto será cierto a cualquier frecuencia, ya que ambos implementan la misma inmitancia.

Una forma alternativa de realizar las implementaciones de Cauer consiste en ir dividiendo los polinomios (dividendo, divisor, resto) alternativamente de manera que puedan obtenerse los residuos correspondientes a las expresiones

$$F(s) = k_{\infty 1}s + \frac{1}{k_{\infty 2}s + \frac{1}{k_{\infty 3}s + \frac{1}{k_{\infty 4}s + \dots}}}, \text{ para Cauer 1}$$

$$F(s) = \frac{k_{01}}{s} + \frac{1}{\frac{k_{02}}{s} + \frac{1}{\frac{k_{03}}{s} + \frac{1}{\frac{k_{04}}{s} + \dots}}}, \text{ para Cauer 2} \quad (4.163)$$

Los residuos “pares” e “impares”, en infinito o en cero, serán de impedancia o admitancia según  $F(s)$  sea admitancia o impedancia. El primer factor no existirá cuando la inmitancia de partida no tenga polo en cero o en infinito, según el caso.

En el caso concreto que nos ocupa, tendremos, para la Cauer 1,

$$Z(s) = \frac{2s^3 + 8s}{s^2 + 1}$$

**Cauer 1:** eliminación de polos en infinito.  $Z(s)$  sí tiene polo en infinito. Empezamos por ella. El primer residuo corresponderá a un polo de impedancia (rama serie) en infinito, el siguiente a un polo de admitancia (rama paralelo) en infinito, y así alternativamente. Los elementos tienen el mismo valor que los residuos.

$$\begin{array}{r} 2s^3 + 8s \quad \left| \begin{array}{l} s^2 + 1 \\ -2s^3 - 2s \\ \hline 6s \end{array} \right. \begin{array}{l} 2s \\ \hline \frac{1}{6}s \end{array} \\ \hline -s^2 \quad \left| \begin{array}{l} 6s \\ -s^2 \\ \hline 6s \end{array} \right. \begin{array}{l} \frac{1}{6}s \\ \hline 1 \end{array} \\ \hline -6s \quad \left| \begin{array}{l} 6s \\ -6s \\ \hline 0 \end{array} \right. \begin{array}{l} \hline \hline \hline \end{array} \end{array}$$

$\rightarrow Z, r. \text{ serie, } L=2$   
 $\rightarrow Y, r. \text{ paralelo, } C=1/6$   
 $\rightarrow Z, r. \text{ serie, } L=6$

y para la Cauer 2,

$$Y(s) = \frac{s^2 + 1}{2s^3 + 8s}$$

**Cauer 2:** eliminación de polos en cero.  $Z(s)$  no tiene polo en cero: empezamos por la admitancia. El primer residuo corresponderá a un polo de admitancia (rama paralelo) en cero, el siguiente a un polo de impedancia (rama serie) en cero, y así alternativamente. Los elementos tienen valor inverso al de los residuos. Contrariamente a lo que es habitual, en la división se “presta atención” a las potencias de menor orden.

$$\begin{array}{r} 1 + s^2 \left| \begin{array}{l} 8s + 2s^3 \\ -1 - \frac{1}{4}s^2 \end{array} \right. \frac{1}{8s} \\ \hline 8s + 2s^3 \left| \begin{array}{l} \frac{3}{4}s^2 \\ -8 \end{array} \right. \frac{32}{3s} \\ \hline 8 + 2s^2 \left| \begin{array}{l} \frac{3}{4}s^2 \\ -8 \end{array} \right. \frac{32}{3s} \\ \hline \frac{3}{4}s \left| \begin{array}{l} 2s^2 \\ -8 \end{array} \right. \frac{32}{3s} \\ \hline \frac{3}{4} \left| \begin{array}{l} 2s \\ -8 \end{array} \right. \frac{32}{3s} \\ \hline \frac{3}{4} \left| \begin{array}{l} 3 \\ -8 \end{array} \right. \frac{3}{8s} \\ \hline 0 \end{array}$$

Y, r. paralelo, L=8  
Z, r. serie, C=3/32  
Y, r. paralelo, L=8/3

Estos procedimientos son más cómodos cuando el orden de la función de impedancia o admitancia es grande.

**Ejercicio**

4.4. Hallar las implementaciones de Foster y Cauer de la función de impedancia

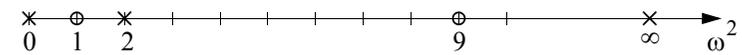
$$Z(s) = \frac{s^4 + 10s^2 + 9}{s^3 + 2s} \tag{4.164}$$

**Solución detallada**

El numerador es par y el denominador impar. La función es impar. La diferencia de grado es 1 a favor del numerador. Los polos y los ceros están dados por

$$\begin{aligned} \{p\} &= \{0, \pm j\sqrt{2}, \infty\} \\ \{z\} &= \{\pm j1, \pm j3\} \end{aligned} \tag{4.165}$$

y por tanto están intercalados en el eje imaginario. El diagrama polo cero en  $\omega^2$  es



En resumen, la función cumple las condiciones necesarias más inmediatas. Veamos ahora las condiciones necesarias y suficientes. Es evidente que la función es racional de coeficientes reales (condición a). En cuanto a la b.1, al ser la función racional e impar, tendremos,

$$\text{Re}(Z(j\omega)) = Z_p(j\omega) = 0 \tag{4.166}$$

y por tanto se cumple. En cuanto a la condición b.2, los polos ya han sido obtenidos arriba. Son imaginarios puros y simples. Veamos sus residuos.

$$Z(s) = \frac{s^4 + 10s^2 + 9}{s^3 + 2s} = \frac{k_0}{s} + k_\infty s + \frac{K_1 s}{s^2 + 2}$$

$$k_0 = [Z(s)s]_{s \rightarrow 0} = \frac{9}{2} \quad k_\infty = \left[ \frac{Z(s)}{s} \right]_{s \rightarrow \infty} = 1 \tag{4.167}$$

$$K_1 = 2k_1 = \left[ Z(s) \frac{s^2 + 2}{s} \right]_{s^2 \rightarrow -2} = \frac{7}{2}$$

que son reales y positivos. Por tanto, la función es realizable LC. Puede comprobarse que los residuos de la admitancia también son reales y positivos. Esto vendrá bien en cualquier caso para la síntesis de Foster 2. Veámoslo<sup>169</sup>.

169. Se van a utilizar los mismos símbolos para denotar los residuos de la impedancia y de la admitancia. Debe tenerse cuidado para que no surja confusión.

$$Y(s) = \frac{s^3 + 2s}{s^4 + 10s^2 + 9} = \frac{s(s^2 + 2)}{(s^2 + 1)(s^2 + 9)} = \frac{K_1 s}{s^2 + 1} + \frac{K_2 s}{s^2 + 9}$$

$$K_1 = 2k_1 = \left[ Y(s) \frac{s^2 + 1}{s} \right]_{s^2 \rightarrow -1} = \frac{1}{8} \quad (4.168)$$

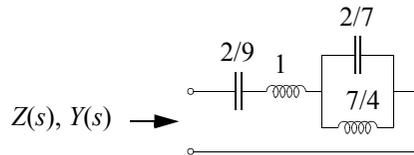
$$K_2 = 2k_2 = \left[ Y(s) \frac{s^2 + 9}{s} \right]_{s^2 \rightarrow -9} = \frac{7}{8}$$

**Foster 1**

De (4.167), tendremos

$$Z(s) = \frac{9/2}{s} + 1s + \frac{7/2 s}{s^2 + 2} = \frac{1}{2} + 1s + \frac{1}{\frac{2}{7}s + \frac{1}{4}s} \quad (4.169)$$

que en forma de circuito es,

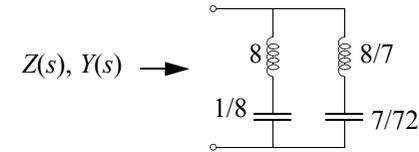


**Foster 2**

De (4.168), tendremos

$$Y(s) = \frac{1/8 s}{s^2 + 1} + \frac{7/8 s}{s^2 + 9} = \frac{1}{8s + \frac{1}{8}s} + \frac{1}{\frac{8}{7}s + \frac{1}{72}s} \quad (4.170)$$

que en forma de circuito es,



**Cauer 1**

Empezaremos con la impedancia, ya que tiene polo en infinito. Utilizando la técnica de división de polinomios tendremos,

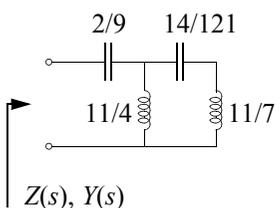
$$Z(s) = \frac{s^4 + 10s^2 + 9}{s^3 + 2s}$$

$$\begin{array}{r} s^4 + 10s^2 + 9 \quad | \quad s^3 + 2s \\ -s^4 - 2s^2 \\ \hline 8s^2 + 9 \quad | \quad 1s \\ -8s^2 - \frac{9}{8}s \\ \hline \frac{1}{8}s \\ \hline \frac{7}{8}s \quad | \quad \frac{64}{7}s \\ -8s^2 \\ \hline \frac{64}{7}s \\ \hline \frac{7}{8}s \quad | \quad \frac{7}{72}s \\ -\frac{7}{8}s \\ \hline \frac{7}{72}s \\ \hline 0 \end{array}$$

$\swarrow$  Z, r. serie, L=1  
 $\swarrow$  Y, r. paralelo, C=1/8  
 $\swarrow$  Z, r. serie, L=64/7  
 $\swarrow$  Y, r. paralelo, C=7/72

**Cauer 2**

De nuevo empezaremos con la impedancia, ya que tiene polo en cero. Utilizando la técnica de división de polinomios tendremos,

$$Z(s) = \frac{s^4 + 10s^2 + 9}{s^3 + 2s}$$


$$\begin{array}{r} 9 + 10s^2 + s^4 \quad \left| \begin{array}{l} 2s + s^3 \\ -9 - \frac{9}{2}s^2 \\ \hline 2s + s^3 \end{array} \right. \frac{9}{2s} \\ \hline 2s + s^3 \quad \left| \begin{array}{l} \frac{11}{2}s^2 + s^4 \\ -2s - \frac{4}{11}s^3 \\ \hline \frac{11}{2}s^2 + s^4 \end{array} \right. \frac{4}{11s} \\ \hline \frac{11}{2}s^2 + s^4 \quad \left| \begin{array}{l} \frac{7}{11}s^3 \\ -\frac{11}{2}s^2 \\ \hline \frac{7}{11}s^3 \end{array} \right. \frac{121}{14s} \\ \hline \frac{7}{11}s^3 \quad \left| \begin{array}{l} s^4 \\ -\frac{7}{11}s^3 \\ \hline \frac{7}{11}s^3 \end{array} \right. \frac{7}{11s} \\ \hline \frac{7}{11}s^3 \\ \hline 0 \end{array}$$

Z, r. serie, C=2/9

Y, r. paralelo, L=11/4

Z, r. serie, C=14/121

Y, r. paralelo, L=11/7

**Ejercicio**

4.5. Una impedancia LC tiene ceros en  $f_1 = 800\text{KHz}$  y en infinito. El circuito que la implementa debe tener un condensador en paralelo entre los terminales de entrada de valor  $C_1 = 100\text{pF}$ . Solamente se pueden utilizar inductores de valor  $L \leq 0.5\text{mH}$  y el cociente entre cualquier pareja de condensadores debe ser menor o igual a 3. Obtener la función  $Z(s)$  y su realización más simple.

**Solución detallada**

Puesto que tenemos un cero finito, en el numerador deberá aparecer un factor del tipo  $s^2 + \omega_z^2$ . Como hay otro cero en infinito, el orden del denominador debe ser mayor que el del numerador. Este orden debe ser superior sólo en una unidad, porque si no, no sería realizable LC. Por tanto, el denominador tendrá la forma  $s(s^2 + \omega_x^2)$ , ya que los ceros y polos de las inmitancias LC están todos en el eje imaginario. Además, la impedancia tendrá en general una constante multiplicativa de la función racional, a la que vamos a llamar  $1/A$ . En resumen, la forma de la función de impedancia será,

$$Z(s) = \frac{1}{A} \frac{s^2 + \omega_z^2}{s(s^2 + \omega_x^2)} \tag{4.171}$$

El valor de  $\omega_z$  está dado por el enunciado,

$$\omega_z = 2\pi \cdot 800 \cdot 10^3 \text{ rad/s} = 1.6\pi \text{Mrad/s} = 5.027 \text{Mrad/s} \tag{4.172}$$

pero debemos obtener los valores<sup>170</sup> de  $A$  y de  $\omega_x$ .

El enunciado nos dice que el circuito debe tener un condensador  $C_1 = 100\text{pF}$  en paralelo entre los terminales de entrada. Esto se corresponde con un polo de admitancia (rama paralelo) en infinito (condensador). “Afortunadamente” (algo no encajaría en caso contrario), nuestra admitancia tiene efectivamente un polo en infinito. Puesto que nos piden que hagamos la realización más sencilla posible, debemos intentar que este condensador se corresponda con la eliminación completa<sup>171</sup> del polo de admitancia en infinito, para que el orden de la admitancia restante sea menor. Calculamos el valor de este residuo, y lo igualamos al condensador,

170. En este problema no se va a utilizar normalización. Quizás así en los siguientes se aprecie mejor la ventaja de la misma. Caso de normalizar, parecería razonable hacerlo respecto a la única frecuencia conocida ( $\omega_z$ ) y a la impedancia del único elemento conocido a esa frecuencia  $1/(\omega_z C_1) = 1.989\text{K}\Omega$

171. Si todavía no se tiene muy claro la diferencia entre eliminación parcial y eliminación completa de los polos, y su influencia sobre el número de elementos, ignore este comentario,..., ya se entenderá más adelante.

$$Y(s) = A \frac{s(s^2 + \omega_x^2)}{s^2 + \omega_z^2} = k_{\infty Y_1} s + Y_2(s) \quad (4.173)$$

$$k_{\infty Y_1} = \left[ \frac{Y(s)}{s} \right] \Big|_{s \rightarrow \infty} = A$$

y por tanto,

$$A = k_{\infty Y_1} = C_1 = 100 \text{ pF} \quad (4.174)$$

La admitancia restante  $Y_2(s)$  será,

$$Y_2(s) = Y(s) - k_{\infty Y_1} s = C_1 \frac{s(s^2 + \omega_x^2)}{s^2 + \omega_z^2} - C_1 s = C_1 \frac{s(\omega_x^2 - \omega_z^2)}{s^2 + \omega_z^2} \quad (4.175)$$

que efectivamente es de orden menor (algo iría mal en caso contrario, pues la eliminación del polo fue completa). También está claro que  $\omega_x$  debe ser mayor que  $\omega_z$ , porque si no la admitancia restante no sería realizable (residuo negativo). Podría ser conveniente comprobar esto después.

Nos falta por conocer el valor de  $\omega_x$ , y por terminar de implementar el circuito. Para ello no tenemos ninguna relación en forma de igualdad, sino sólo unas “desigualdades” que imponen una cota superior al valor de los inductores y a la relación máxima entre condensadores. Puesto que el valor de  $\omega_x$  es “libre” (aunque parece evidente que las “cotas” anteriores resultarán a su vez en cotas para el valor de  $\omega_x$ ), podemos sencillamente terminar de realizar el circuito de forma simbólica (en función de  $\omega_x$ ). Obtener también de forma simbólica el valor de los elementos, y exigir que se cumplan las restricciones impuestas por el enunciado.

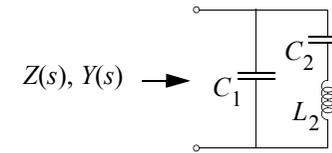
La admitancia restante  $Y_2(s)$ , supuesta realizable ( $\omega_x > \omega_z$ ), se corresponde con una rama en paralelo con  $C_1$  compuesta por una asociación en serie de bobina y condensador (no hay otra alternativa, es decir, el circuito (canónico) que realiza la función es único<sup>172</sup>). Sus valores pueden calcularse fácilmente de la siguiente manera,

$$Y_2(s) = C_1 \frac{s(\omega_x^2 - \omega_z^2)}{s^2 + \omega_z^2} = \frac{1}{\frac{1}{C_1(\omega_x^2 - \omega_z^2)} s + \frac{1}{C_1 \frac{\omega_x^2 - \omega_z^2}{\omega_z^2} s}} \quad (4.176)$$

es decir, que la bobina y el condensador valen

$$L_2 = \frac{1}{C_1(\omega_x^2 - \omega_z^2)} \quad C_2 = C_1 \frac{(\omega_x^2 - \omega_z^2)}{\omega_z^2} \quad (4.177)$$

y el circuito obtenido es,



De la expresión (4.177) para el valor de  $L_2$  y el valor máximo establecido para las bobinas ( $L_{\text{MAX}} = 0.5 \text{ mH}$ ), podemos obtener<sup>173</sup>

$$L_2 = \frac{1}{C_1(\omega_x^2 - \omega_z^2)} \leq L_{\text{MAX}} \quad (4.178)$$

$$\omega_x^2 - \omega_z^2 \geq \frac{1}{C_1 \cdot L_{\text{MAX}}}$$

$$\omega_x^2 \geq \omega_z^2 + \frac{1}{C_1 \cdot L_{\text{MAX}}}$$

172. Esto no es así en general. Aquí ocurre porque la función es sólo de tercer orden, nos piden que la realización sea lo más simple posible (es decir, canónica), y además nos imponen que “empecemos” por eliminar un polo de admitancia en infinito.

173. En ese desarrollo, se asume que  $\omega_x^2 - \omega_z^2 > 0$ . Si no fuera así, la forma en que se ha operado con la desigualdad sería incorrecta. Es frecuente olvidar estos detalles cuando se trabaja con símbolos en una desigualdad.

que es una cota inferior para  $\omega_x$ ,

$$\omega_x|_{\text{MIN-1}} = \sqrt{\omega_z^2 + \frac{1}{C_1 \cdot L_{\text{MAX}}}} = 6.728 \text{ Mrad/s} \quad (4.179)$$

equivalente a 1070 KHz. Es efectivamente mayor que  $\omega_z$ .

De la expresión (4.177) para el valor de  $C_2$  y el valor máximo establecido para la relación entre condensadores, podemos obtener<sup>174</sup>

$$\frac{1}{3} \leq \frac{C_2}{C_1} \leq 3 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{3} \leq \frac{\omega_x^2 - \omega_z^2}{\omega_z^2} \leq 3$$

$$\frac{1}{3} \leq \frac{\omega_x^2}{\omega_z^2} - 1 \leq 3 \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{3} \leq \frac{\omega_x^2}{\omega_z^2} \leq 4 \quad (4.180)$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \omega_z \leq \omega_x \leq 2 \omega_z$$

que establece una cota superior y una nueva cota inferior para  $\omega_x$ .

$$\omega_x|_{\text{MIN-2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \omega_z = 5.804 \text{ Mrad/s} \quad (4.181)$$

$$\omega_x|_{\text{MAX}} = 2 \omega_z = 10.053 \text{ Mrad/s}$$

La cota inferior dada por (4.179) es más restrictiva, por lo que el intervalo aceptable para  $\omega_x$  es el siguiente,

$$\omega_x \in [6.728, 10.053] \text{ Mrad/s} \quad (4.182)$$

La elección de cualquier valor de  $\omega_x$  dentro de este intervalo, y su utilización en (4.177) para obtener los valores de  $C_2$  y  $L_2$  proporciona una

174. Sólo hay dos condensadores en el circuito. Cualquier razón entre ellos (es decir, la de uno respecto al otro y la inversa) debe ser menor que 3. De ahí se derivan las dos desigualdades planteadas. En el manejo se éstas asumiremos, ya sin reparos, que  $\omega_x^2 - \omega_z^2 > 0$ .

solución válida al problema. Vamos a dar aquí dos ejemplos, correspondientes a los extremos del rango de validez de  $\omega_x$ ,

| $\omega_z$<br>(Mrad/s) | $C_1$<br>(pF) | $\omega_x$<br>(Mrad/s) | $C_2$<br>(pF) | $L_2$<br>(mH) |
|------------------------|---------------|------------------------|---------------|---------------|
| 5.027                  | 100.0         | 6.728                  | 79.12         | 0.5000        |
|                        |               | 10.053                 | 300.0         | 0.1319        |

La coincidencia en cada caso de los valores de  $L_2$  ó  $C_2$  con extremos impuestos en el enunciado (0.5mH ó  $3C_1$ ) no es casualidad.

### Ejercicio

**4.6.** Implementar una impedancia LC que sea nula para  $f = 4\text{KHz}$  y  $f = 8\text{KHz}$ , y sea infinita para  $f = 2\text{KHz}$ ,  $f = 6\text{KHz}$  y  $f = 10\text{KHz}$ . A altas frecuencias, el circuito debe comportarse como un condensador de 200nF. La realización debe llevarse a cabo de forma que aparezca un condensador en paralelo entre los terminales de entrada y que los ceros puedan ajustarse independientemente.

### Solución detallada

Nos dicen que la impedancia debe tener polos en 2KHz, 6KHz, y 10KHz, y ceros en 4KHz y 8KHz. Además, a altas frecuencias el circuito debe comportarse como un condensador (de 200nF). La impedancia de un condensador en infinito es cero, por lo que nuestra impedancia deberá tener también un cero en infinito. Tenemos por tanto 6 polos y 5 ceros, lo que quiere decir que nos falta un cero aún<sup>175</sup>. La única manera de añadir un (único) cero en infinito. Los polos y ceros finitos (y no nulos) son en realidad una pareja de polos/ceros complejos conjugados. Los polos y ceros infinitos o nulos "son sólo uno", como se ha comentado antes. Además, todos los polos deben ser simples por las condiciones de realizabilidad. Considerando los polos y ceros en infinito (los que no son raíces de numerador y denominador), todas las funciones racionales tienen el mismo número de polos que de ceros.

co) cero manteniendo las condiciones de realizabilidad de inmitancias LC es poner este cero en cero. En resumen, la forma de la impedancia deberá ser,

$$Z(s) = A \frac{s(s^2 + \omega_{z_1}^2)(s^2 + \omega_{z_2}^2)}{(s^2 + \omega_{p_1}^2)(s^2 + \omega_{p_2}^2)(s^2 + \omega_{p_3}^2)} \quad (4.183)$$

Los valores de las frecuencias finitas que intervienen están dados en el enunciado (aunque habría que expresarlos en unidades naturales). Sin embargo, en este problema vamos a utilizar normalización en frecuencia y en impedancia para hacernos el trabajo más cómodo.

Podemos elegir la frecuencia y la impedancia de normalización que queramos. En cuanto a la frecuencia, es habitual (por resultar cómodo) utilizar la más pequeña de las que “se vayan a emplear”, en nuestro caso, la más pequeña de entre los polos y los ceros finitos (y no nulos), es decir,  $f_0 = 2\text{KHz}$ , o lo que es lo mismo (aunque no puedan utilizarse indistintamente un valor numérico y otro),

$$\Omega_0 = 2\pi \cdot 2 \cdot 10^3 \text{ rad/s} = 12.566 \text{Krad/s} \quad (4.184)$$

La normalización (simultáneamente en frecuencia y en impedancia) la abordamos de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} Z_n(s_n) &= \frac{Z(s)}{R_0} \Big|_{s = s_n \Omega_0} = \\ &= \frac{A}{R_0} \frac{s(s^2 + \omega_{z_1}^2)(s^2 + \omega_{z_2}^2)}{(s^2 + \omega_{p_1}^2)(s^2 + \omega_{p_2}^2)(s^2 + \omega_{p_3}^2)} \Big|_{s = s_n \Omega_0} = \\ &= \frac{A}{R_0} \frac{s_n \Omega_0 (s_n^2 \Omega_0^2 + \omega_{z_1}^2)(s_n^2 \Omega_0^2 + \omega_{z_2}^2)}{(s_n^2 \Omega_0^2 + \omega_{p_1}^2)(s_n^2 \Omega_0^2 + \omega_{p_2}^2)(s_n^2 \Omega_0^2 + \omega_{p_3}^2)} = \end{aligned} \quad (4.185)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{A \Omega_0^5}{R_0 \Omega_0^6} \frac{s_n (s_n^2 + \omega_{z_1}^2 / \Omega_0^2)(s_n^2 + \omega_{z_2}^2 / \Omega_0^2)}{(s_n^2 + \omega_{p_1}^2 / \Omega_0^2)(s_n^2 + \omega_{p_2}^2 / \Omega_0^2)(s_n^2 + \omega_{p_3}^2 / \Omega_0^2)} = \\ &= \frac{A}{R_0 \Omega_0} \frac{s_n (s_n^2 + \omega_{nz_1}^2)(s_n^2 + \omega_{nz_2}^2)}{(s_n^2 + \omega_{np_1}^2)(s_n^2 + \omega_{np_2}^2)(s_n^2 + \omega_{np_3}^2)} = \end{aligned} \quad (4.186)$$

Ahora vamos a elegir la impedancia de normalización como

$$R_0 = A / \Omega_0 \quad (4.187)$$

El que el término de la derecha tiene en efecto dimensiones de impedancia (en caso contrario sería incorrecto hacerlo) lo podemos comprobar observando que

$$\lim_{s \rightarrow \infty} Z(s) \approx \frac{A}{s} \quad (4.188)$$

y que según el enunciado, a alta frecuencia el circuito debía comportarse como un condensador (de 200nF), por lo que  $A$  tendrá dimensiones inversas a las de un condensador. Por tanto, (4.187) es dimensionalmente correcta. Es más, el valor de  $A$  será,

$$A = \frac{1}{200\text{nF}} \quad (4.189)$$

lo que permite obtener ya un valor numérico para la impedancia de normalización,

$$R_0 = A / \Omega_0 = 397.89 \Omega \quad (4.190)$$

Volviendo a la expresión (4.186) de la impedancia normalizada (en impedancia y en frecuencia), la elección hecha para la impedancia de normalización lleva a,

$$Z_n(s_n) = \frac{s_n(s_n^2 + \omega_{nz_1}^2)(s_n^2 + \omega_{nz_2}^2)}{(s_n^2 + \omega_{np_1}^2)(s_n^2 + \omega_{np_2}^2)(s_n^2 + \omega_{np_3}^2)} \quad (4.191)$$

En esta expresión, todas las variables representa magnitudes adimensionales (números sin unidades). Los valores de las frecuencias normalizadas de ceros y polos se obtienen fácilmente como,

$$\omega_n = \omega / \Omega_0 = f / f_0 \quad (4.192)$$

En nuestro caso,

$$\begin{aligned} \omega_{nz_1} &= \frac{4\text{KHz}}{2\text{KHz}} = 2, & \omega_{nz_2} &= \frac{8\text{KHz}}{2\text{KHz}} = 4 \\ \omega_{np_1} &= \frac{2\text{KHz}}{2\text{KHz}} = 1, & \omega_{np_2} &= \frac{6\text{KHz}}{2\text{KHz}} = 3 \\ \omega_{np_3} &= \frac{10\text{KHz}}{2\text{KHz}} = 5 \end{aligned} \quad (4.193)$$

Es frecuente, una vez hecha la normalización, “dejar caer” el subíndice  $n$  en todos los símbolos, dando por entendido que se sabe que son variables normalizadas y que no habrá confusión. Entonces, finalmente, podemos expresar la impedancia a realizar como,

$$Z(s) = \frac{s(s^2 + 4)(s^2 + 16)}{(s^2 + 1)(s^2 + 9)(s^2 + 25)} \quad (4.194)$$

La condición de realizabilidad LC que hemos llamado a) se cumple (la función es racional-real) y la b.1) también (la función es impar, y por tanto su parte real cuando  $s = j\omega$  es nula). En cuanto a la b.2), es evidente que los polos están todos en el eje imaginario y son simples. Sólo falta calcular sus residuos y ver si son reales positivos. Esto es algo que teníamos que hacer de todos modos para realizar la impedancia.

Sin embargo, hay un requisito del enunciado que no se ha atendido aún. Se nos pide que los ceros puedan ajustarse de forma independiente. Se refiere a los ceros finitos (y no nulos), pues los ceros en cero e infinito no admiten ajuste. Esto quiere decir que debemos procurar que los valores de los ceros dependan de pocos elementos, y que la variación de estos elementos para modificar el valor del cero no afecte al resto de características del circuito.

La implementación de una inmitancia LC se hace en base a eliminar polos (de impedancia o admitancia). Cada eliminación se corresponde con uno a dos elementos LC. Si hiciéramos una implementación siguiendo la técnica de Foster 1, los valores de los ceros se reflejarían en todos los residuos de los polos de impedancia, por lo que sería difícil modificar un cero concreto sin afectar a otras cosas. Algo similar ocurrirá si empleamos cualquiera de las técnicas de Cauer. La única manera que tenemos de “concentrar” los elementos que influyen en los valores de los ceros es hacer que estos ceros “pasen a ser polos” en el proceso de realización. Para ello, basta con realizar la implementación siguiendo una expansión en fracciones simples de la inversa de la impedancia (la admitancia), es decir, la técnica Foster 2.

La discusión de realizabilidad hecha hasta ahora sigue siendo válida. La admitancia es una función racional, impar, y sus polos son imaginarios puros y simples. Falta por evaluar sus residuos, que deben ser reales y positivos. La realizabilidad de la admitancia implica la de la impedancia y viceversa.

La expansión en fracciones simples de la admitancia es,

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{(s^2 + 1)(s^2 + 9)(s^2 + 25)}{s(s^2 + 4)(s^2 + 16)} = \frac{k_0}{s} + k_\infty s + \frac{K_1 s}{s^2 + 4} + \frac{K_2 s}{s^2 + 16} \\ k_0 &= [Y(s)s] \Big|_{s \rightarrow 0} = \frac{1 \cdot 9 \cdot 25}{4 \cdot 16} = \frac{225}{64} \\ k_\infty &= \left[ \frac{Y(s)}{s} \right] \Big|_{s \rightarrow \infty} = 1 \end{aligned} \quad (4.195)$$

$$K_1 = \left[ Y(s) \frac{s^2 + 4}{s} \right] \Bigg|_{s^2 \rightarrow -4} = \frac{(-4 + 1)(-4 + 9)(-4 + 25)}{-4(-4 + 16)}$$

$$= \frac{-3 \cdot 5 \cdot 21}{-4 \cdot 12} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{4 \cdot 4} = \frac{105}{16} \quad (4.196)$$

$$K_2 = \left[ Y(s) \frac{s^2 + 16}{s} \right] \Bigg|_{s^2 \rightarrow -16} = \frac{(-16 + 1)(-16 + 9)(-16 + 25)}{-16(-16 + 4)}$$

$$= \frac{-15 \cdot (-7) \cdot 9}{-16 \cdot (-12)} = \frac{15 \cdot 7 \cdot 9}{16 \cdot 12} = \frac{5 \cdot 7 \cdot 9}{16 \cdot 4} = \frac{315}{64}$$

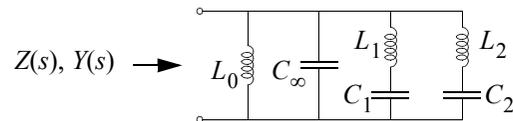
que demuestra que los residuos son reales y positivos. Por tanto, la admitancia es realizable. La expansión en fracciones simples de la admitancia queda entonces como,

$$Y(s) = \frac{225}{64} + 1s + \frac{105}{16} \frac{s}{s^2 + 4} + \frac{315}{64} \frac{s}{s^2 + 16} =$$

$$= \frac{1}{\frac{64}{225}s} + 1s + \frac{1}{\frac{16}{105}s + \frac{1}{\frac{105}{64}s}} + \frac{1}{\frac{64}{315}s + \frac{1}{\frac{315}{1024}s}} = \quad (4.197)$$

$$= \frac{1}{L_0 s} + C_\infty s + \frac{1}{L_1 s + \frac{1}{C_1 s}} + \frac{1}{L_2 s + \frac{1}{C_2 s}}$$

Los valores de los elementos (normalizados en impedancia y admitancia) serán los que se deducen de esta ecuación. El circuito será el siguiente,



Sólo falta desnormalizar los valores de los elementos. Para ello, recordamos la forma en que se normalizan las impedancias, simultáneamente en impedancia y en frecuencia,

$$Z_n(s_n) = \frac{Z(s)}{R_0} \Bigg|_{s = s_n \Omega_0} \quad (4.198)$$

y la aplicamos a los elementos individuales para obtener las relaciones entre sus valores normalizados y reales,

$$R_n = \frac{R}{R_0} \quad \rightarrow \quad R_n = \frac{R}{R_0}$$

$$s_n L_n = \frac{sL}{R_0} = \frac{s_n \Omega_0 L}{R_0} \quad \rightarrow \quad L_n = \frac{\Omega_0 L}{R_0} \quad (4.199)$$

$$\frac{1}{s_n C_n} = \frac{1}{sCR_0} = \frac{1}{s_n \Omega_0 R_0 C} \quad \rightarrow \quad C_n = \Omega_0 R_0 C$$

invirtiendo las relaciones, tendremos,

$$R = R_n R_0$$

$$L = L_n L_0 \quad (4.200)$$

$$C = C_n C_0$$

donde el inductor y el condensador de normalización están dados por,

$$L_0 = \frac{R_0}{\Omega_0} \quad (4.201)$$

$$C_0 = \frac{1}{\Omega_0 R_0}$$

En nuestro caso, utilizando (4.184) y (4.190),

$$L_0 = \frac{R_0}{\Omega_0} = 31.66\text{mH}$$

$$C_0 = \frac{1}{\Omega_0 R_0} = 200.0\text{nF}$$
(4.202)

La coincidencia de la capacidad de normalización con el valor del condensador mencionado en el enunciado no es una casualidad.

Recurriendo a (4.197), y teniendo en cuenta que esos elementos son los normalizados, podemos dar los siguientes valores para cada elemento

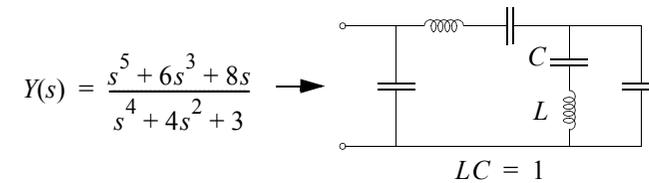
|          | $L_0$            | $C_\infty$ | $L_1$            | $C_1$            | $L_2$            | $C_2$              |
|----------|------------------|------------|------------------|------------------|------------------|--------------------|
| NORM.    | $\frac{64}{225}$ | 1          | $\frac{16}{105}$ | $\frac{105}{64}$ | $\frac{64}{315}$ | $\frac{315}{1024}$ |
| DESNORM. | 9.006mH          | 200.0nF    | 4.824mH          | 328.1nF          | 6.433mH          | 61.52nF            |

**NOTA:** Se ha empleado el símbolo  $L_0$  con dos significados diferentes: un elemento del circuito, y la inductancia de normalización. No debería surgir confusión si las ideas están claras

**NOTA:** Como se nos pedía, la realización de cada uno de los ceros finitos se corresponde con un número reducido de elementos (cada uno de ellos con una rama paralelo constituida por una asociación serie LC). La modificación del valor de las frecuencias de los ceros es por tanto relativamente fácil, y puede hacerse de forma independiente para cada uno de ellos (la modificación de uno de ellos no afecta al otro).

## Ejercicio

4.7. Implemente la siguiente admitancia LC utilizando el circuito de la figura, en el que debe cumplirse  $LC = 1$ .



## Solución detallada

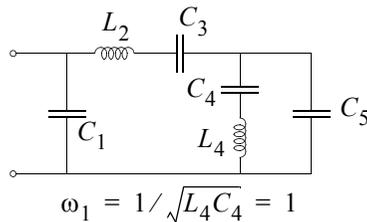
Este problema es ilustrativo de lo que significa la eliminación parcial de polos y la flexibilidad adicional que permite. El precio a pagar es un aumento del número de elementos (y por tanto del coste).

La topología del circuito está dada por el enunciado. Esto significa que el orden de eliminación de polos de impedancia/admitancia (rama serie o rama paralelo) está fijado, y también, hasta cierto punto, la frecuencia de los polos a eliminar (en cero, en infinito, o finito). Sólo hasta cierto punto porque en el caso de un polo finito, no está fijada su frecuencia (salvo en la rama paralelo en la cual  $LC = 1$ ). Tampoco está fijada la “cantidad” en la que debe eliminarse cada polo, es decir si la eliminación debe ser completa siempre, como se ha hecho hasta ahora en todos los problemas anteriores, o si en algún caso esta eliminación debe ser parcial y, en ese caso, en que “medida” realizar la eliminación<sup>176</sup>. Este tipo de problemas puede resolverse con mayor facilidad recurriendo a los diagramas polo-cero, como veremos más tarde. De momento, sigamos el procedimiento que seguiría alguien que no se planteara la posibilidad de realizar alguna eliminación parcial. Para el-

176. La eliminación siempre debe realizarse “entre cero y el residuo completo”. Si se hiciera una eliminación “por encima” del residuo del polo, la inmitancia restante tendría un polo en la misma frecuencia pero con residuo negativo, es decir, no sería realizable.

lo, recordamos el valor de la función de admitancia, y le damos nombres a los elementos.

$$Y(s) = \frac{s^5 + 6s^3 + 8s}{s^4 + 4s^2 + 3}$$



A la vista del circuito, debemos realizar una eliminación de un polo de admitancia en infinito (condensador en rama paralelo), seguida de una eliminación de un polo de impedancia en infinito (bobina en rama serie), seguida de una eliminación de un polo de impedancia en cero (condensador en rama serie), seguida de la eliminación de un polo finito de admitancia (serie LC en una rama paralelo) cuya frecuencia está dada por  $\omega_1 = 1/\sqrt{L_4 C_4} = 1$ , y finalmente seguida por una eliminación de un polo de admitancia en infinito (condensador en rama paralelo).

Siguiendo este procedimiento, realizando siempre eliminaciones completas, se obtiene,

$$Y(s) = Y_1(s) = \frac{s^5 + 6s^3 + 8s}{s^4 + 4s^2 + 3} = k_{\infty Y_1} s + Y_2(s) \quad k_{\infty Y_1} = 1 = C_1$$

$$Z_2(s) = \frac{s^4 + 4s^2 + 3}{2s^3 + 5s} = k_{\infty Z_2} s + Z_3(s) \quad k_{\infty Z_2} = 1/2 = L_2 \quad (4.203)$$

$$Z_3(s) = \frac{\frac{3}{2}s^2 + 3}{2s^3 + 5s} = \frac{k_{0Z_3}}{s} + Z_4(s) \quad k_{0Z_3} = 3/5 = 1/C_3$$

$$Y_4(s) = \frac{20}{3} \frac{s^2 + \frac{5}{2}}{s} \quad \rightarrow \quad \text{No tiene polo interno!!}$$

Es decir, que mediante eliminaciones completas llegamos a un punto en el que la admitancia restante no tiene polo donde debería tenerlo para poder seguir con la realización.

En realidad, las ramas “4” y “5” están conectadas entre los mismos nodos, y por tanto es arbitrario cual de ellas se realice (elimine) antes. Por tanto, podríamos seguir con la eliminación del polo de admitancia en infinito correspondiente a  $C_5$ . Obtendríamos  $k_{\infty Y} = 20/3 = C_5$ , y la admitancia restante con la que deberíamos realizar la rama “4” es ahora  $Y_5(s) = 50/(3s)$ , que tiene sólo un polo en cero (y no un polo a frecuencia “interna” (finita y no nula) como exige la realización de  $C_4$  y  $L_4$ . Esto era previsible porque la eliminación del polo de admitancia en infinito de  $Y_4(s)$  no podía crear un polo de admitancia en una frecuencia interna porque la propia  $Y_4(s)$  no lo tenía, y la eliminación de polos nunca crea polos nuevos.

En definitiva, hemos de volver atrás a algún punto. Este punto debe ser, lógicamente, anterior a la última eliminación a partir de la cual se vio que ya no podíamos seguir (la eliminación del polo de impedancia en infinito de  $Z_3(s)$ , correspondiente a  $C_3$ )<sup>177</sup>.

Partiendo por tanto de  $Z_3(s)$  vamos a realizar una eliminación de su polo de impedancia en infinito, pero no con el residuo completo, sino con un residuo **parcial**, cuyo valor obtendremos de exigir que la impedancia restante que quede después de esta eliminación tenga un cero en la frecuencia finita  $\omega_1 = 1/\sqrt{L_4 C_4} = 1$  (de esta manera, la inversa de esta impedancia, que será la admitancia restante, tendrá un polo en  $\omega_1$ ). Numéricamente, los cálculos son como sigue,

177. ¿Qué pasaría si, en el orden (arbitrario) de realización de  $L_2$  y  $C_3$ , hubiéramos hecho antes la realización de  $C_3$  y después la de  $L_2$ ? ¿Sería necesario volver hasta la eliminación de  $C_3$ ? ¿O sólo hasta la de  $L_2$ ?

$$Z_3(s) = \frac{\frac{3}{2}s^2 + 3}{2s^3 + 5s} = \frac{k_{0Z_3}^\#}{s} + Z_4(s) \quad (4.204)$$

$$Z_4(s) \Big|_{s^2 = -1} = \left[ Z_3(s) - \frac{k_{0Z_3}^\#}{s} \right] \Big|_{s^2 = -1} = 0$$

$$k_{0Z_3}^\# = [sZ_3(s)] \Big|_{s^2 = -1} = \frac{\frac{3}{2}(-1) + 3}{2(-1) + 5} = \frac{3/2}{3} = \frac{1}{2} \quad (4.205)$$

$$C_3 = 1/k_{0Z_3}^\# = 2$$

Nótese que  $k_{0Z_3}^\#$  no es ahora el residuo (completo) de  $Z_3(s)$  en infinito, sino un “residuo parcial” cuyo valor debe ser menor que el total (que en este caso era 3/5) para que la inmitancia restante sea realizable. Los cálculos seguirán ahora con la obtención de<sup>178</sup>  $Z_4(s)$ , que deberá presentar un cero en  $s^2 = -1$  (algo habríamos hecho mal en caso contrario), su inversión, la eliminación del polo finito de admitancia en  $s^2 = -1$  y la del polo de admitancia en infinito (en cualquier orden), es decir,

178. Lógicamente, esta  $Z_4(s)$  será diferente a la obtenida anteriormente. A pesar de eso, como es habitual en estos problemas, no las distinguiremos en la notación para no hacer las cosas demasiado engorrosas. Lo mismo se aplica al resto de inmitancias restantes, residuos, y elementos de circuito.

$$Z_4(s) = \frac{\frac{3}{2}s^2 + 3}{2s^3 + 5s} - \frac{1}{2s} = \frac{s^2 + 1}{4s^3 + 10s} \quad (\text{que tiene el cero esperado})$$

$$Y_4(s) = \frac{4s^3 + 10s}{s^2 + 1} = k_{\infty Y_4} s + \frac{K_4 s}{s^2 + 1} \quad (4.206)$$

$$k_{\infty Y_4} = \left[ \frac{Y_4(s)}{s} \right] \Big|_{s \rightarrow \infty} = 4 \quad \rightarrow \quad C_5 = 4$$

$$K_4 = \left[ Y_4(s) \frac{s^2 + 1}{s} \right] \Big|_{s^2 = 1} = 6 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} C_4 = 6 \\ L_4 = 1/6 \end{cases}$$

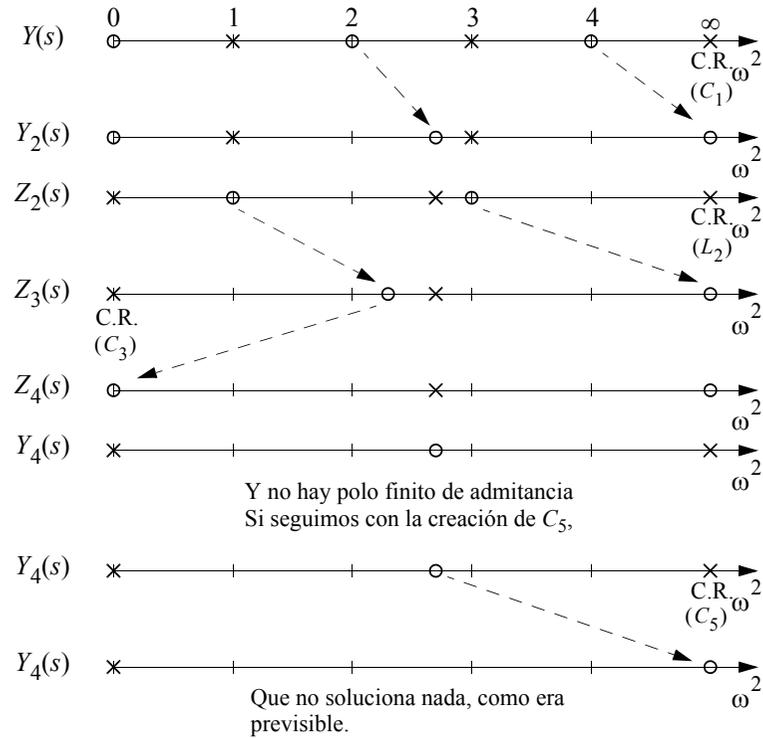
con lo que, ahora sí hemos conseguido resolver el problema.

Veamos ahora como podríamos habernos beneficiado de la utilización de los diagramas polo-cero. Para ello, lo primero es calcular los polos y los ceros de la inmitancia a realizar, en nuestro caso, tras resolver las ecuaciones bicuadráticas de numerador y denominador,

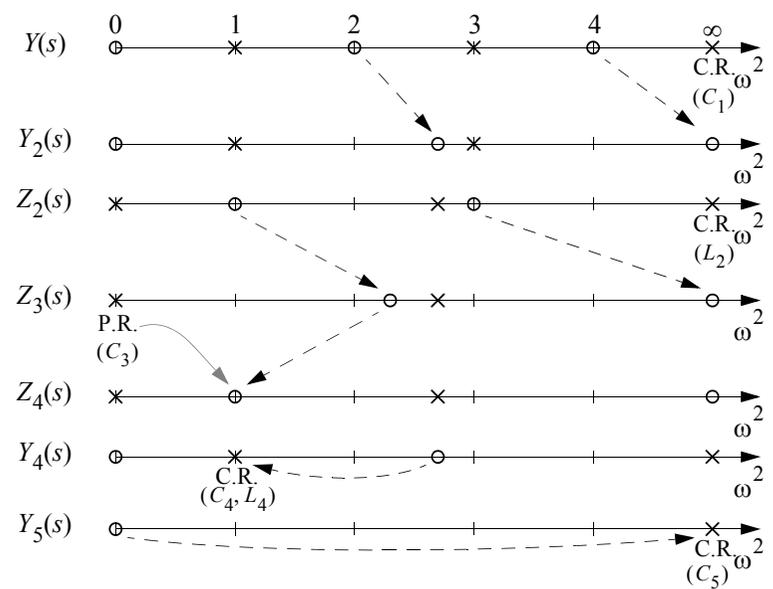
$$Y(s) = \frac{s^5 + 6s^3 + 8s}{s^4 + 4s^2 + 3} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \{z\} = \{0, \pm j\sqrt{2}, \pm j\sqrt{4}\} \\ \{p\} = \{\pm j\sqrt{1}, \pm j\sqrt{3}, \infty\} \end{cases} \quad (4.207)$$

El primer intento se corresponde con el diagrama polo-cero siguiente. Con este simple ejercicio (sin ningún cálculo), hubiéramos podido prever que ese camino no llevaba a una solución válida<sup>179</sup>.

179. Se va a utilizar la siguiente notación: **CR**: “Complete removal” (eliminación completa). **PR**: “Partial removal” (eliminación parcial).



Veamos ahora el diagrama polo-cero correspondiente al procedimiento en el cual se elimina parcialmente el polo en cero de  $Z_3(s)$ ,



Por tanto, este segundo diagrama polo-cero nos hubiera mostrado que este camino sí llevaba a una solución válida, ahorrándonos gran parte de los cálculos.

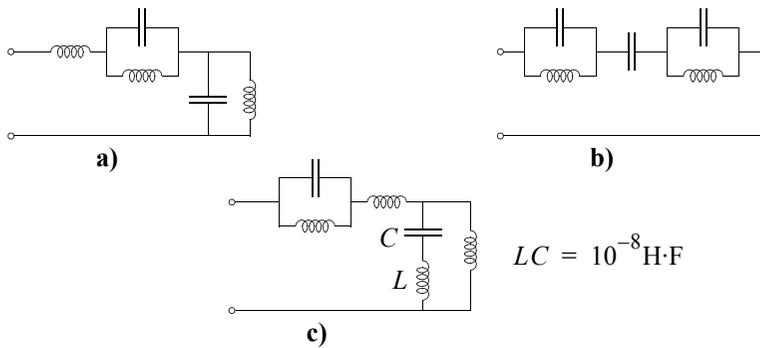
Los cálculos correspondientes a este diagrama han sido realizados ya, por lo que no los repetiremos.

Utilizando esta técnica de diagramas polo-cero, es fácil responder a la pregunta formulada anteriormente en una nota a pie de página. Hágalo como ejercicio.

Por último, quizás haya pensado que el problema también se podría resolver calculando simbólicamente la función de transferencia del circuito de la figura en función de los valores de sus elementos, e igualando los coeficientes a los de la admitancia dada. Esto, en los casos relativamente sencillos como éste, es posible hacerlo sin recurrir a ordenadores, pero los cálculos son muy tediosos y la probabilidad de equivocarse es muy alta. Si le quedan ganas, inténtelo por curiosidad, aunque no sea el método más recomendable.

**Ejercicio**

**4.8.** Obtenga una impedancia  $Z(s)$  que sea nula para  $\omega = 0$  y  $\omega = 4000\text{rad/s}$  e infinita para  $\omega = 2000\text{rad/s}$  y  $\omega = 6000\text{rad/s}$ . A altas frecuencias  $Z(s)$  debe comportarse como un inductor de  $1\text{mH}$ . Para  $\omega = 10000\text{rad/s}$  la impedancia debe ser  $|Z(j\omega)| = 4.9219\Omega$ . Estudie la posible implementación de dicha impedancia con los circuitos de la figura, y realícela en aquellos casos en que sea posible.



**Solución detallada**

Los datos de polos y ceros dados nos llevan a que el numerador de la impedancia debe ser al menos de orden 3 (para realizar el cero en cero y el cero finito<sup>180</sup>) y el denominador de orden 4 (para realizar los dos polos finitos). Sin embargo, esto nos lleva a que, a altas frecuencias, la impedancia tenderá a cero a  $20\text{dB/dec}$ , lo que se corresponde con un condensador y no con una bobina como nos piden. Será por tanto necesario aumentar el orden del numerador en 2, para que a altas frecuencias tienda a infinito a  $20\text{dB/dec}$ ,

180. Casi siempre, por cero o polo finito entenderemos un cero o polo finito y no nulo. En alguna otra ocasión, se incluirá al cero en el conjunto de frecuencias críticas finitas. Por el contexto, no debería surgir confusión.

como corresponde a una bobina. Esto nos obliga a introducir un nuevo cero finito, de valor desconocido, en la impedancia.

Tendremos entonces dos incógnitas en la expresión de la impedancia: la constante multiplicativa y el valor del cero finito desconocido. Tenemos también conocimiento del valor de la impedancia en dos “puntos”: a una frecuencia determinada ( $10000\text{rad/s}$ ) y cuando la frecuencia tiende a infinito. Por tanto, no debería haber problema en resolver las dos incógnitas.

La forma de la impedancia será entonces,

$$Z(s) = A \frac{s(s^2 + \omega_{z_1}^2)(s^2 + \omega_{z_2}^2)}{(s^2 + \omega_{p_1}^2)(s^2 + \omega_{p_2}^2)} \quad \text{con} \quad \begin{cases} \omega_{z_1} = 4000\text{rad/s} \\ \omega_{z_2} = ? \\ \omega_{p_1} = 2000\text{rad/s} \quad (4.208) \\ \omega_{p_2} = 6000\text{rad/s} \\ A = ? \end{cases}$$

Está claro que a altas frecuencias,  $Z(s) \rightarrow As$ , por lo que deberá ser

$$A = 1\text{mH} \quad (4.209)$$

Antes de utilizar el valor de (la magnitud) de la impedancia a  $10000\text{rad/s}$  para determinar el valor de  $\omega_{z_2}$ , vamos a normalizar en frecuencia y en impedancia. Por simplicidad, y como es habitual, no introduciremos notación diferente para las variables normalizadas, por lo que será necesario estar atento en todo momento al significado de los símbolos a este respecto.

Elegimos como frecuencia de normalización, como es habitual, a la más baja de las frecuencias críticas, en este caso  $\omega_{p_1}$ , es decir,

$$\Omega_0 = 2000\text{rad/s} \quad (4.210)$$

La normalización en frecuencia resulta en,

$$Z(s) = A\Omega_0 \frac{s(s^2 + \omega_{z_1}^2)(s^2 + \omega_{z_2}^2)}{(s^2 + \omega_{p_1}^2)(s^2 + \omega_{p_2}^2)} \quad \text{con} \quad \begin{cases} \omega_{z_1} = 2 \\ \omega_{z_2} = ? \\ \omega_{p_1} = 1 \\ \omega_{p_2} = 3 \\ A = 1 \text{ mH} \end{cases} \quad (4.211)$$

en donde la variable  $s$  y los diferentes símbolos de las frecuencias críticas representan ya valores normalizados. La forma de esta expresión sugiere utilizar como impedancia de normalización<sup>181</sup>,

$$R_0 = A\Omega_0 = 1 \text{ mH} \cdot 2000 \text{ rad/s} = 2\Omega \quad (4.212)$$

que una vez utilizada lleva a,

$$Z(s) = \frac{s(s^2 + \omega_{z_1}^2)(s^2 + \omega_{z_2}^2)}{(s^2 + \omega_{p_1}^2)(s^2 + \omega_{p_2}^2)} = \frac{s(s^2 + 4)(s^2 + \omega_{z_2}^2)}{(s^2 + 1)(s^2 + 9)} \quad (4.213)$$

Vamos ahora a determinar el valor de  $\omega_{z_2}^2$ . Para ello, vamos a utilizar el conocimiento dado en el enunciado de que

$$|Z(j\omega)|_{\omega = 10000 \text{ rad/s}} = 4.9219\Omega \quad (4.214)$$

Pero estos valores no están normalizados, por lo que el primer paso será normalizarlos en frecuencia y en impedancia<sup>182</sup>, para obtener la siguiente expresión,

$$|Z(j\omega)|_{\omega = 5} = 2.46095 \quad (4.215)$$

que llevada a (4.213), resulta en,

181. Esto es una elección. Cualquier otro valor sería también válido.

182. Evidentemente, con las mismas constantes de normalización empleadas anteriormente.

$$\begin{aligned} |Z(j\omega)|_{\omega = 5} &= \left| \frac{5(-25 + 4)(-25 + \omega_{z_2}^2)}{(-25 + 1)(-25 + 9)} \right| = \\ &= \frac{105}{384} \left| \omega_{z_2}^2 - 25 \right| = 2.46095 \end{aligned} \quad (4.216)$$

es decir,

$$\left| \omega_{z_2}^2 - 25 \right| = 9.000 \quad (4.217)$$

Habrà dos<sup>183</sup> soluciones, una en la que  $\omega_{z_2}$  es mayor que 5, y otra en la que es menor,

$$\begin{aligned} \omega_{z_2} > 5 &\Rightarrow \left| \omega_{z_2}^2 - 25 \right| = \omega_{z_2}^2 - 25 = 9 \Rightarrow \omega_{z_2} = \sqrt{34} \\ \omega_{z_2} < 5 &\Rightarrow \left| \omega_{z_2}^2 - 25 \right| = 25 - \omega_{z_2}^2 = 9 \Rightarrow \omega_{z_2} = 4 \end{aligned} \quad (4.218)$$

Cualquiera de las dos soluciones es válida, pues respeta el que los polos y ceros estén intercalados. Por simplicidad, vamos a tomar aquí el valor  $\omega_{z_2} = 4$ . El alumno puede ensayar la otra solución.

Tenemos entonces ya la impedancia normalizada (en frecuencia y en impedancia),

$$Z(s) = \frac{s(s^2 + 4)(s^2 + 16)}{(s^2 + 1)(s^2 + 9)} \quad (4.219)$$

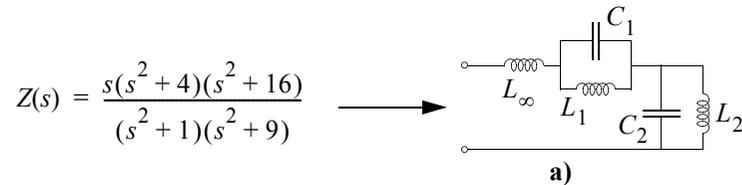
y falta por ver con cuáles de los circuitos propuestos en el enunciado se podría realizar, y en su caso realizarla.

En estos casos, una forma rápida de desechar algunas posibilidades es comparar los comportamientos asintóticos a frecuencias altas y bajas de la función de inmitancia y de los circuitos propuestos. Está claro que nuestra impedancia tiende a cero a frecuencias bajas, y a infinito a frecuencias altas.

183. En realidad hay cuatro, porque las soluciones aparecerán con doble signo. Sin embargo, nosotros estamos buscando en realidad la magnitud de un par de ceros imaginarios puros, por lo que cualquiera de los dos signos representa en realidad a la misma solución.

La aplicación de las reglas de comportamiento asintótico a los circuitos del enunciado demuestra que esto se corresponde con los circuitos a) y c), pero que el circuito b) tiene una impedancia que tiende a cero a frecuencias altas y a infinito a frecuencias bajas. Por tanto, el circuito b) queda descartado de entrada.

El circuito a) podría representar una realización Foster-1 de cualquier impedancia con un polo en infinito y dos polos finitos. Este es el caso de nuestra impedancia, por lo que seguro que nos servirá. Los cálculos son los siguientes,



$$Z(s) = k_{Z_\infty} s + \frac{K_{Z_1} s}{s^2 + \omega_{p_1}^2} + \frac{K_{Z_2} s}{s^2 + \omega_{p_2}^2}$$

$$k_{Z_\infty} = 1 \rightarrow L_\infty = 1$$

$$K_{Z_1} = 45/8 \rightarrow \begin{cases} C_1 = 1/K_{Z_1} = 8/45 \\ L_1 = K_{Z_1}/\omega_{p_1}^2 = 45/8 \end{cases} \quad (4.220)$$

$$K_{Z_2} = 35/8 \rightarrow \begin{cases} C_2 = 1/K_{Z_2} = 8/35 \\ L_2 = K_{Z_2}/\omega_{p_2}^2 = 35/72 \end{cases}$$

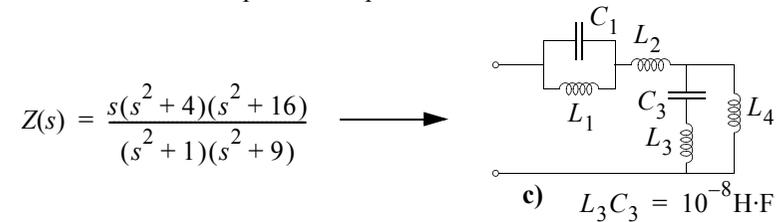
Estos valores de elementos son valores normalizados en frecuencia e impedancia. Para desnormalizarlos utilizamos,

$$\begin{aligned} R &= R_n R_0 \\ C &= C_n C_0 \\ L &= L_n L_0 \end{aligned} \quad \text{con} \quad \begin{cases} R_0 = 2\Omega \\ \Omega_0 = 2000\text{rad/s} \\ C_0 = \frac{1}{\Omega_0 R_0} = 250\mu\text{F} \\ L_0 = \frac{R_0}{\Omega_0} = 1\text{mH} \end{cases} \quad (4.221)$$

Lo que resulta en los siguientes valores,

|           | $L_\infty$ | $L_1$   | $C_1$   | $L_2$    | $C_2$   |
|-----------|------------|---------|---------|----------|---------|
| NORM.     | 1          | 45/8    | 8/45    | 35/72    | 8/35    |
| DES NORM. | 1mH        | 5.625mH | 44.44μF | 0.4861mH | 57.14μF |

En cuanto al circuito c), es muy parecido al a), ya que intercambiar el orden de eliminación de los polos de impedancia (uno finito y otro en infinito) no supone una diferencia real. La diferencia real es que el último polo finito se ha eliminado aquí “en dos pasos”.



El circuito c) no es canónico (emplea más elementos de los necesarios). Esto significa que se ha realizado alguna<sup>184</sup> eliminación parcial. Esto concuerda con la realización del último polo finito de impedancia “en dos pasos”, y también facilita el cumplimiento de la restricción que tenemos im-

184. Podemos saber más en realidad: la diferencia entre el número de elementos (6) y el orden de la inmitancia (5) significa que sólo se ha realizado una eliminación parcial y que ésta ha sido en cero ó en infinito.

puesta al valor de la frecuencia del polo finito de admitancia (rama paralelo constituida por  $L_3$  y  $C_3$  en serie).

Como primer paso, vamos a normalizar el valor de este producto,

$$\begin{aligned} L_3 C_3 &= L_0 L_{n3} C_0 C_{n3} = 10^{-8} \text{H}\cdot\text{F} \\ L_{n3} C_{n3} &= \frac{L_3 C_3}{L_0 C_0} = \frac{10^{-8} \text{H}\cdot\text{F}}{L_0 C_0} = 0.04 \end{aligned} \quad (4.222)$$

donde hemos utilizado los valores obtenidos previamente para  $C_0$  y  $L_0$ . Alternativamente podríamos haber hecho lo siguiente

$$\begin{aligned} \omega_3 &= \frac{1}{\sqrt{L_3 C_3}} = \omega_{n3} \Omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_{n3} C_{n3}}} \Omega_0 \\ L_{n3} C_{n3} &= L_3 C_3 \Omega_0^2 = 0.04 \end{aligned} \quad (4.223)$$

lo que concurda, lógicamente, con el hecho de que

$$\Omega_0 = 1/\sqrt{L_0 C_0} \quad (4.224)$$

La frecuencia de resonancia de la rama compuesta por  $C_3$  y  $L_3$  es

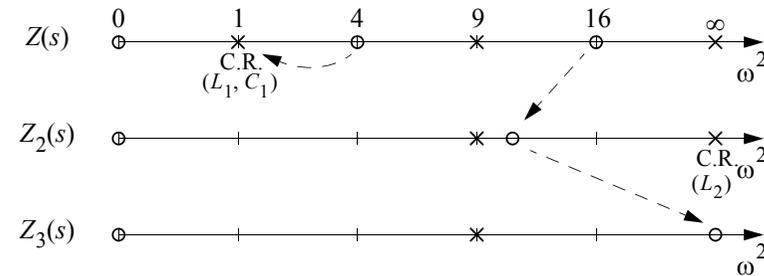
$$\begin{aligned} \omega_3 &= \frac{1}{\sqrt{L_3 C_3}} = \frac{1}{\sqrt{10^{-8} \text{H}\cdot\text{F}}} = 10000 \text{rad/s} \\ \omega_{n3} &= \frac{\omega_3}{\Omega_0} = \frac{10000 \text{rad/s}}{2000 \text{rad/s}} = 5 \end{aligned} \quad (4.225)$$

lo que lógicamente también concurda con

$$\omega_{n3} = \frac{1}{\sqrt{L_{n3} C_{n3}}} = \frac{1}{\sqrt{0.04}} = 5 \quad (4.226)$$

En definitiva, después de haber obtenido el valor normalizado de  $\omega_{n3}$ , podemos utilizar un diagrama polo cero para ver en qué forma podemos implementar nuestra impedancia siguiendo la topología del circuito c). En principio intentaremos hacer eliminaciones totales siempre que sea posible, sa-

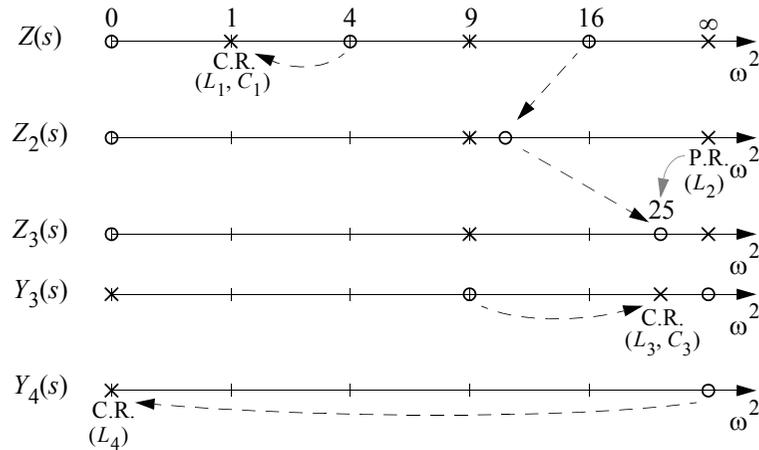
biendo ya que deberemos hacer una de ellas parciales, que utilizaremos para posicionar el cero correspondiente (que al invertir la inmitancia restante se convertirá en polo) en el valor calculado para  $\omega_{n3}$ . El eje de frecuencias no está dibujado a escala.



Se han realizado eliminaciones (totales) a una frecuencia finita ( $\omega^2 = 1$ ) y en infinito. Esto (las eliminaciones) está dictado por la forma del circuito c). pero no el que estas eliminaciones tengan que ser totales. Como puede observarse, al invertir la impedancia restante  $Z_3(s)$ , la admitancia restante no tendrá polo en  $\omega^2 = 5^2 = 25$  como nos exige el enunciado (a través de la exigencia de la rama compuesta por  $C_3$  y  $L_3$  y del valor de su producto). Por consiguiente, algo hemos hecho mal. El haber elegido la frecuencia finita  $\omega^2 = 1$  y no la otra ( $\omega^2 = 9$ ) para realizar la primera eliminación ha sido eso, una elección. Puede comprobarse que si se hace la otra elección, es decir, si se elimina el polo finito de impedancia en  $\omega^2 = 9$  y después el polo de impedancia en infinito, ambos totalmente, la situación a la que se llega es similar. No es esto lo que hemos hecho mal.

El cero en  $\omega^2 = 16$  se desplazó a un valor más bajo (hacia la izquierda) debido a la eliminación del polo de impedancia finito. A continuación se desplaza hasta infinito (hacia la derecha) por la eliminación del polo de impedancia en infinito. Si esta eliminación se hace parcial, en la medida oportuna, podremos situar el cero en  $\omega^2 = 25$ , lo que, al invertir la impedancia,

proporcionará el polo de admitancia que necesitamos. Veamos el correspondiente diagrama polo-cero.



Que como se ve, resuelve el problema satisfactoriamente. Puede comprobarse que el problema se podría resolver de forma idéntica si hubiéramos elegido empezar por la eliminación del polo finito de impedancia en  $\omega^2 = 9$ . Los cálculos asociados con nuestra elección son los siguientes.

$$Z(s) = \frac{s(s^2 + 4)(s^2 + 16)}{(s^2 + 1)(s^2 + 9)} = \frac{K_1 s}{s^2 + 1} + Z_2(s) \tag{4.227}$$

$$K_1 = 45/8 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} C_1 = 8/45 \\ L_1 = 45/8 \end{cases}$$

$$Z_2(s) = Z(s) - \frac{K_1 s}{s^2 + 1} = \frac{s(s^2 + 107/8)}{s^2 + 9} = k_\infty^\# s + Z_3(s)$$

$$Z_3(s) \Big|_{s^2 = -25} = [Z_2(s) - k_\infty^\# s] \Big|_{s^2 = -25} = 0 \tag{4.228}$$

$$k_\infty^\# = [Z_2(s)/s] \Big|_{s^2 = -25} = 93/128 \quad \rightarrow \quad L_2 = 93/128$$

$$Z_3(s) = Z_2(s) - k_\infty^\# s = \frac{35 s(s^2 + 25)}{128 s^2 + 9} \tag{4.229}$$

que tiene un cero en  $\omega^2 = 25$  como buscábamos. Seguimos,

$$Y_3(s) = \frac{128 s^2 + 9}{35 s(s^2 + 25)} = \frac{K_3 s}{s^2 + 25} + \frac{k_4}{s}$$

$$K_3 = \frac{2048}{875} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} C_3 = \frac{2048}{21875} \\ L_3 = \frac{875}{2048} \end{cases} \tag{4.230}$$

$$k_4 = \frac{1152}{875} \quad \rightarrow \quad L_4 = \frac{875}{1152}$$

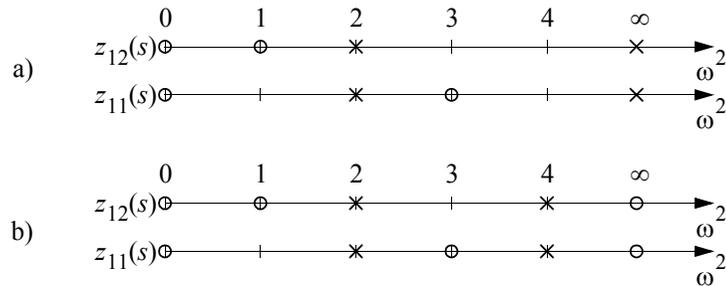
Donde hemos realizado en un sólo paso la eliminación de los dos polos de admitancia que faltaban. Esto (la eliminación simultánea en los cálculos) puede hacerse siempre que no hay alternancia en la forma de la inmitancia (es decir, siempre que los polos e eliminar en un sólo paso sean todos de impedancia o todos de admitancia).

Solo falta desnormalizar los valores de los elementos, para lo que utilizaremos los mismos valores empleados en la desnormalización de los elementos del circuito a). Los resultados se muestran en la siguiente tabla.

|          | $L_1$          | $C_1$          | $L_2$            | $L_3$              | $C_3$                | $L_4$              |
|----------|----------------|----------------|------------------|--------------------|----------------------|--------------------|
| NORM.    | $\frac{45}{8}$ | $\frac{8}{45}$ | $\frac{93}{128}$ | $\frac{875}{2048}$ | $\frac{2048}{21875}$ | $\frac{875}{1152}$ |
| DES NORM | 5.625mH        | 44.44µF        | 0.7266mH         | 0.4272mH           | 23.41µF              | 0.7595mH           |

**Ejercicio**

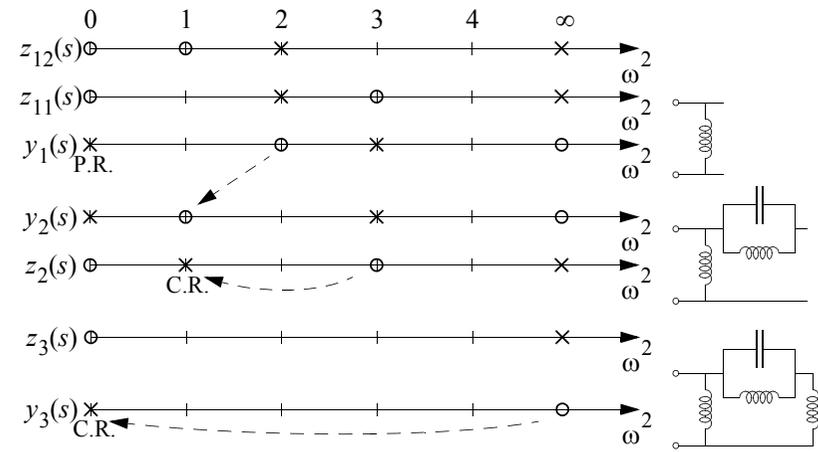
**4.9.** Esquematizar la topología de los filtros escalera LC doblemente terminada necesaria para implementar unos parámetros de impedancia que tienen los diagramas polo-cero que se muestran a continuación. Todos los polos de los parámetros de inmitancia prescritos son compartidos compactos.



**Solución detallada**

Puesto que todos los polos son compartidos y compactos, los únicos ceros de transmisión son los ceros de  $z_{12}(s)$ . Por tanto, sólo podremos realizar eliminaciones en aquellas frecuencias que sean ceros de  $z_{12}(s)$ , ya que cualquier eliminación desemboca de una u otra manera en la creación de un cero de transmisión a esa frecuencia.

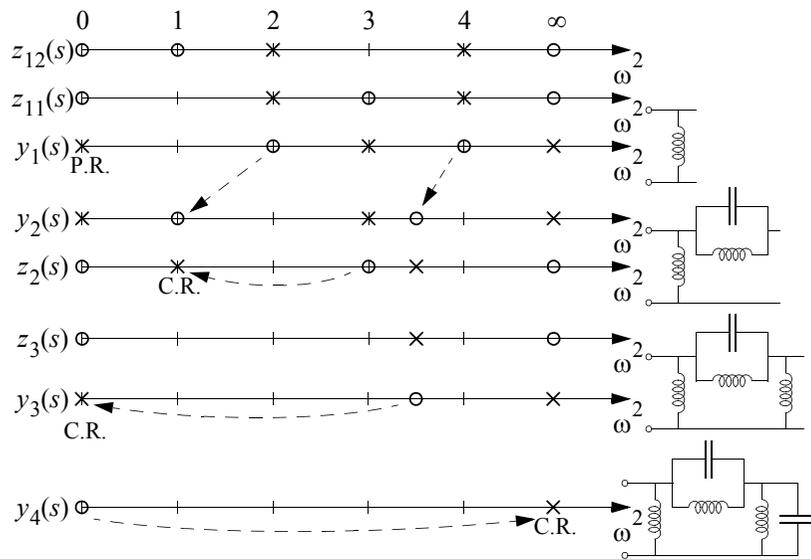
La Fig. 4.19 muestra como sería la realización en el caso a). Puesto que los polos de  $z_{11}(s)$  no coinciden con ningún cero de transmisión, era necesario comenzar por la admitancia inversa  $y_1(s) = 1/z_{11}(s)$ . La creación del cero de transmisión finito en  $\omega^2 = 1$  exigía la realización de una eliminación para situar un cero de la inmitancia de síntesis en esa posición, seguida de una inversión y de la eliminación completa del polo resultante. Finalmente, la eliminación completa en  $\omega^2 = 0$  crea el cero de transmisión en cero, haciendo además que la eliminación previa a esa frecuencia no lo cree (el cero de transmisión en cero será simple, no doble). La  $z_{11}(s)$  realizada es idéntica a la prescrita. Los polos y ceros de  $z_{12}(s)$  han sido realizados, por



**Figura 4.19: Diagrama polo-cero y circuito resultante correspondiente al caso a).**

lo que las  $z_{12}(s)$  realizadas y prescritas no pueden diferir más que en una constante. Esta eventual diferencia se resolvería mediante la utilización de un transformador. Tras esto, los residuos de las  $z_{12}(s)$  realizadas y prescritas son idénticos. Los de las  $z_{11}(s)$  ya lo eran. Por otra parte, puesto que se ha cumplido el teorema de bader,  $z_{22}(s)$  tiene todos sus polos compartidos compactos. De todo ello se deduce, por la condición de los residuos en el caso de polos compartidos compactos, que los residuos de las  $z_{22}(s)$  realizadas y prescritas también son iguales. Por tanto, se habrá terminado la síntesis de la escalera.

La Fig. 4.20 muestra como sería la realización del caso b). La única diferencia entre este caso y el anterior es la necesidad de una última eliminación total de un polo de admitancia en infinito, que por otra parte crea el cero de transmisión en infinito dado en el enunciado. Por tanto, los comentarios hechos antes al caso a) son aplicables también aquí en su totalidad.



**Figura 4.20: Diagrama polo-cero y circuito resultante correspondiente al caso b).**

**Ejercicio**

**4.10.** Diseñar un filtro paso de baja LC que tiene ceros de transmisión en  $f_1 = 1697.1\text{Hz}$  y  $f_2 = 2078.5\text{Hz}$ . La banda pasante se localiza en  $0 \leq f \leq 1200\text{Hz}$  y debe ser máximamente plana con 0.5dB de atenuación máxima. A altas frecuencias la atenuación debe aumentar a 20dB/década. Las resistencias terminales son  $R_S = R_L = 50\Omega$ .

**Solución detallada**

En primer lugar vamos a normalizar la frecuencia utilizando

$$f_0 = 1200\text{Hz} \tag{4.231}$$

$$\Omega_0 = 2\pi 1200\text{rad/s} = 7539.82\text{rad/s}$$

con lo que las frecuencias normalizadas de los ceros de transmisión son

$$\omega_1 = f_1/f_0 = 1.41425 = \sqrt{2} \tag{4.232}$$

$$\omega_2 = f_2/f_0 = 1.73208 = \sqrt{3}$$

También vamos a normalizar en impedancia utilizando el valor de las resistencias terminales como impedancia de normalización,

$$R_0 = 50\Omega \tag{4.233}$$

con lo que los nuevos valores normalizados en impedancia de las resistencias terminales normalizadas serán,

$$R_S = R_L = 1 \tag{4.234}$$

Nos dicen que la función debe ser máximamente plana, y por tanto,

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \frac{a_n \omega^{2n}}{|N(j\omega)|^2}} = \frac{|N(j\omega)|^2}{|N(j\omega)|^2 + a_n \omega^{2n}} \tag{4.235}$$

siguiendo el convenio habitual de que la constante de  $H(s)$  se asigna a su denominador  $D(s)$  y la de  $K(s)$  a su numerador  $\hat{F}(s)$  (de forma que la potencia de mayor orden de  $N(s)$  tiene coeficiente igual a 1), tendremos en nuestro caso,

$$|N(j\omega)|^2 = (\omega^2 - 2)^2 (\omega^2 - 3)^2 \tag{4.236}$$

ya que no hay razón para pensar que deba haber más ceros de transmisión que los mencionados en el enunciado (y el que debe haber en infinito según el enunciado, pero este no será una raíz<sup>185</sup> de  $N(s)$ ). El numerador será

185. Los polos y ceros en infinito no son raíces del denominador o numerador, sino que aparecen como consecuencia de la diferencia de grado entre ambos polinomios.

entonces<sup>186</sup>,

$$N(s) = (s^2 + 2)(s^2 + 3) \quad (4.237)$$

Según (4.235) y (4.236), la forma de  $|H(j\omega)|^2$  será

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{(\omega^2 - 2)^2 (\omega^2 - 3)^2}{(\omega^2 - 2)^2 (\omega^2 - 3)^2 + a_n \omega^{2n}} \quad (4.238)$$

El valor de la magnitud en el borde de la banda pasante será

$$|H(j1)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2} \quad (4.239)$$

con

$$\varepsilon = \sqrt{10^{A_p/10} - 1} = 0.349311 \quad (4.240)$$

Sustituyendo en (4.239) tendremos,

$$|H(j1)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2} = 10^{-A_p/10} = 0.891251 \quad (4.241)$$

y utilizando (4.238),

$$|H(j1)|^2 = \frac{4}{4 + a_n} \quad (4.242)$$

es decir,

$$a_n = \frac{4}{|H(j1)|^2} - 4 = 0.4880738 \quad (4.243)$$

Nos indican que la atenuación debe crecer a altas frecuencias a 20deb/década. Esto quiere decir que el orden del denominador de  $H(s)$  debe ser mayor en una unidad al orden de su numerador. Mirando a (4.238) y tenien-

186. También es válida la versión con un signo negativo. Esto es poco significativo porque no afecta a la magnitud, que es la especificación de la que partimos.

do en cuenta que esta expresión refleja la magnitud al cuadrado, vemos que es necesario que sea

$$n = 5 \quad (4.244)$$

y por tanto, tendremos ya,

$$\begin{aligned} |H(j\omega)|^2 &= H(j\omega)H^*(j\omega) = H(j\omega)H(-j\omega) = \\ &= \frac{(\omega^2 - 2)^2 (\omega^2 - 3)^2}{(\omega^2 - 2)^2 (\omega^2 - 3)^2 + 0.4880738\omega^{10}} \end{aligned} \quad (4.245)$$

Utilizando continuación analítica, es decir, haciendo  $\omega = s/j$ , o lo que es lo mismo,  $\omega^2 = -s^2$ ,

$$H(s)H(-s) = \frac{(s^2 + 2)^2 (s^2 + 3)^2}{(s^2 + 2)^2 (s^2 + 3)^2 - 0.4880738s^{10}} = \frac{N(s)N(-s)}{D(s)D(-s)} \quad (4.246)$$

$N(s)$  es conocido ya, y es par en nuestro caso<sup>187</sup>, por tanto,

$$\begin{aligned} D(s)D(-s) &= -0.4880738s^{10} + (s^2 + 2)^2 (s^2 + 3)^2 = \\ &= -0.4880738s^{10} + s^8 + 10s^6 + 37s^4 + 60s^2 + 36 \end{aligned} \quad (4.247)$$

Calculando las raíces de este polinomio ( $D(s)D(-s)$ ) mediante algún procedimiento (normalmente esto no se hace a mano, sino utilizando un algoritmo iterativo con un ordenador<sup>188</sup>) tenemos el siguiente conjunto,

$$\begin{aligned} s_{1,2,3,4} &= \pm 0.18448 \pm j1.14676 \\ s_{5,6,7,8} &= \pm 0.78759 \pm j1.33914 \\ s_{9,10} &= \pm 2.63759 \end{aligned} \quad (4.248)$$

187.  $N(s)$  siempre es par o impar, ya que todas las raíces están en el eje imaginario, y por tanto aparecen por pares complejos conjugados en la forma de factores del tipo  $(s^2 + \omega_z^2)$ , salvo si el cero está en el origen, en cuyo caso aparece como un factor  $s$ . El producto de factores de estos tipos siempre da lugar a un polinomio par o impar. Sin embargo, en los pasos de baja no puede haber ceros de transmisión en el origen, y por tanto, en los filtros paso de baja  $N(s)$  siempre es par (esto incluye a cualquier prototipo paso de baja),

Las raíces de  $(D(s)D(-s))$ , como era de esperar, tienen simetría respecto al origen, y aparecen siempre por pares conjugados. Es decir, las raíces reales aparecen por pares de igual magnitud y distinto signo, y las complejas por “cuartetos” constituidos por todas las posibles combinaciones de signo para ciertos valores absolutos de parte real e imaginaria. La separación de raíces entre  $D(s)$  y  $D(-s)$  podría en principio hacerse de muchas maneras. Para que se cumpla la simetría entre los dos polinomios y para que ambos tengan coeficientes reales, los pares complejos conjugados no deben separarse (deben asignarse a uno u otro polinomio), y de cada pareja de raíces reales o de cada cuarteto debe asignarse una raíz o una pareja, respectivamente, a cada polinomio. El seguimiento de estas reglas no lleva sin embargo a una separación única, pues para cada pareja de raíces reales o cada cuarteto tendremos que hacer una elección entre dos posibilidades. Sin embargo, debemos buscar un polinomio  $D(s)$  que sea un polinomio de Hurwitz, es decir, que todas sus raíces (polos del filtro) estén en el semiplano izquierdo abierto del plano complejo, para que el filtro cuya función de transferencia estamos buscando sea asintóticamente estable. Por tanto, tenemos ya marcada la elección que debemos hacer para cada par de raíces reales o cuarteto: las que tengan parte real negativa. De esta manera, si tenemos ya una distribución única (válida) de las raíces de  $(D(s)D(-s))$  entre las de  $D(s)$  y las de  $D(-s)$ .

En nuestro caso,

188. Existe la posibilidad de que la función máximamente plana con ceros de transmisión se corresponda con una realización chebishev inversa, lo que permitiría realizar los cálculos de forma analítica sin recurrir a un ordenador. Sin embargo, esto es poco probable cuando hay más de un cero de transmisión finito (un valor de frecuencia positiva: dos ceros de transmisión), pues la relación entre ellos deberá responderse con la existente entre los ceros de transmisión de los chebishev inversos (inversos de los ceros de reflexión del chebishev directo) y con la frecuencia borde de la banda pasante del chebishev inverso (que está normalizado respecto al borde de la banda de rechazo). Esto es más probable cuando sólo hay un cero de transmisión finito. El alumno puede comprobar si se da esa coincidencia en este caso.

$$D(s) = K \cdot (s - (-0.18448 + j1.14676)) \cdot (s - (-0.18448 - j1.14676)) \cdot (s - (-0.78759 + j1.33914)) \cdot (s - (-0.78759 - j1.33914)) \cdot (s - (-2.63759)) \quad (4.249)$$

o lo que es lo mismo,

$$D(s) = K \cdot (s + 0.18448 - j1.14676) \cdot (s + 0.18448 + j1.14676) \cdot (s + 0.78759 - j1.33914) \cdot (s + 0.78759 + j1.33914) \cdot (s + 2.63759) \quad (4.250)$$

y agrupando,

$$D(s) = K \cdot [(s + 0.18448)^2 + (1.14676)^2] \cdot [(s + 0.78759)^2 + (1.33914)^2] \cdot (s + 2.63759) \quad (4.251)$$

Es evidente que esta forma final puede escribirse directamente del conjunto de valores de las raíces.

En cuanto al valor de la constante, es fácil ver que debe ser igual a la raíz cuadrada del (valor absoluto<sup>189</sup>) del coeficiente de mayor orden de  $D(s)D(-s)$ . De (4.238) tendremos

$$K = \sqrt{0.4880738} = 0.6986228 \quad (4.252)$$

y por tanto<sup>190</sup>,

189. Si  $D(s)$  es de orden impar, el coeficiente de mayor orden de  $(D(s)D(-s))$  será negativo. Ocurrirá lo contrario si el orden es par.

190. Existen dos soluciones, diferentes sólo en el signo (independientemente de que el orden del denominador sea par o impar). Esto no es demasiado relevante, teniendo en cuenta que lo único que hemos especificado es la magnitud de la función de transferencia/característica.

$$D(s) = \pm 0.6986228 \cdot [(s + 0.18448)^2 + (1.14676)^2] \cdot [(s + 0.78759)^2 + (1.33914)^2] \cdot (s + 2.63759) \quad (4.253)$$

De (4.237) y (4.253), tendremos ya  $H(s)$  en la forma habitual,

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (4.254)$$

es decir,

$$H(s) = \frac{(s^2 + 2)(s^2 + 3)}{0.6986228(s + 2.63759)[(s + 0.18448)^2 + (1.14676)^2] \dots [(s + 0.78759)^2 + (1.33914)^2]} \quad (4.255)$$

Nos hará falta también la función característica  $H(s)$ , que vendrá dada por

$$K(s) = \frac{\hat{F}(s)}{N(s)} \quad (4.256)$$

De (4.235) y de la ecuación de Feldtkeller, es evidente que

$$|\hat{F}(j\omega)|^2 = a_n \omega^{2n} = 0.4880738 \omega^{10} \quad (4.257)$$

donde hemos usado los valores obtenidos previamente para  $n$  y  $a_n$ .

Utilizando de nuevo continuación analítica,

$$\hat{F}(s)\hat{F}(-s) = -0.4880738s^{10} \quad (4.258)$$

de donde<sup>191</sup>,

$$\hat{F}(s) = \pm 0.6986228s^5 \quad (4.259)$$

y por tanto,

191. Nótese que, al igual que ocurre con  $N(s)$ ,  $F(s)$  es siempre par o impar, por las mismas razones.  $F(s)$  sin embargo puede ser par o impar incluso en los pasos de baja. Nótese también que de nuevo aparece aquí una dualidad de signo, de poca relevancia por la misma razón de antes (no afecta a la magnitud, que es la especificación de la que partimos).

$$K(s) = \frac{\hat{F}(s)}{N(s)} = \frac{\pm 0.6986228s^5}{(s^2 + 2)(s^2 + 3)} \quad (4.260)$$

Una vez obtenidos los parámetros de transducción podemos obtener los parámetros de inmitancia utilizando las relaciones entre ellos. En nuestro caso,  $N(s)$  es par, y por tanto,

$$z_{11} = R_s \frac{D_p - \hat{F}_p}{D_i + \hat{F}_i} \quad z_{22} = R_L \frac{D_p + \hat{F}_p}{D_i + \hat{F}_i} \quad z_{12} = \frac{\sqrt{R_s R_L} N}{D_i + \hat{F}_i} \quad (4.261)$$

$$y_{11} = \frac{1}{R_s} \frac{D_p + \hat{F}_p}{D_i - \hat{F}_i} \quad y_{22} = \frac{1}{R_L} \frac{D_p - \hat{F}_p}{D_i - \hat{F}_i} \quad y_{12} = -\frac{1}{\sqrt{R_s R_L}} \frac{N}{D_i - \hat{F}_i}$$

Los polinomios que necesitamos están dados por (4.237), (4.253) y (4.259). Tomando los signos positivos para los tres polinomios<sup>192</sup>, tras desarrollar (4.253) para expresarlo en forma expandida como<sup>193</sup>

$$D(s) = 0.69862s^5 + 3.20090s^4 + 6.61715s^3 + 10.11110s^2 + 7.83157s + 6.00000 \quad (4.262)$$

y notando que  $\hat{F}(s)$  es impar, tendremos

$$N(s) = (s^2 + 2)(s^2 + 3)$$

$$\hat{F}_p(s) = 0$$

$$\hat{F}_i(s) = 0.6986228s^5 \quad (4.263)$$

$$D_p(s) = 3.20090s^4 + 10.11110s^2 + 6.00000$$

$$D_i(s) = 0.69862s^5 + 6.61715s^3 + 7.83157s$$

Sustituyendo esto en (4.261), y teniendo en cuenta la normalización en

192. Realmente sólo hay dos signos que elegir, porque la contante del numerador se ha hecho igual a +1 por convenio, dejando el asunto de la magnitud (y el signo) de la constante multiplicativa de H y de K a los polinomios D y F respectivamente.

193. ¿Es una casualidad que el último coeficiente de  $D(s)$  sea exactamente 6? Piénselo.

impedancia<sup>194</sup> (véase (4.234)), tendremos,

$$\begin{aligned} z_{11} &= \frac{D_p - \hat{F}_p}{D_i + \hat{F}_i} = \frac{3.20090s^4 + 10.11110s^2 + 6.00000}{1.39724s^5 + 6.61715s^3 + 7.83157s} \\ z_{22} &= \frac{D_p + \hat{F}_p}{D_i + \hat{F}_i} = \frac{3.20090s^4 + 10.11110s^2 + 6.00000}{1.39724s^5 + 6.61715s^3 + 7.83157s} \\ z_{12} &= \frac{N}{D_i + \hat{F}_i} = \frac{(s^2 + 2)(s^2 + 3)}{1.39724s^5 + 6.61715s^3 + 7.83157s} \end{aligned} \quad (4.264)$$

$$\begin{aligned} y_{11} &= \frac{D_p + \hat{F}_p}{D_i - \hat{F}_i} = \frac{3.20090s^4 + 10.11110s^2 + 6.00000}{6.61715s^3 + 7.83157s} \\ y_{22} &= \frac{D_p - \hat{F}_p}{D_i - \hat{F}_i} = \frac{3.20090s^4 + 10.11110s^2 + 6.00000}{6.61715s^3 + 7.83157s} \\ y_{12} &= -\frac{N}{D_i - \hat{F}_i} = -\frac{(s^2 + 2)(s^2 + 3)}{6.61715s^3 + 7.83157s} \end{aligned} \quad (4.265)$$

Puede observarse que, al ser  $\hat{F}(s)$  impar, y por tanto  $\hat{F}_p(s) = 0$ , (con  $N(s)$  par, y con  $R_S = R_L$ ) se tiene que

$$\begin{aligned} z_{11} &= z_{22} \\ y_{11} &= y_{22} \end{aligned} \quad (4.266)$$

y por tanto, es de esperar que el circuito sea simétrico.

Factorizando ahora las expresiones para los parámetros de inmitancia, tendremos,

194. En este caso, las resistencias terminales  $R_S$  y  $R_L$  son iguales, por lo que podemos normalizar “simultáneamente con respecto a ambas”. Cuando sea  $R_S \neq R_L$ , habrá que normalizar con respecto a una de ellas (o con respecto a otro valor, si se quiere), y tener en cuenta los factores resultantes en las expresiones de los parámetros de inmitancia normalizados.

$$\begin{cases} z_{11} = z_{22} = 2.29087 \frac{(s^2 + 0.79196)(s^2 + 2.36687)}{s(s^2 + 2.32226)(s^2 + 2.41361)} \\ z_{12} = 0.71570 \frac{(s^2 + 2)(s^2 + 3)}{s(s^2 + 2.32226)(s^2 + 2.41361)} \\ y_{11} = y_{22} = 0.48373 \frac{(s^2 + 0.79196)(s^2 + 2.36687)}{s(s^2 + 1.18353)} \\ y_{12} = -0.15112 \frac{(s^2 + 2)(s^2 + 3)}{s(s^2 + 1.18353)} \end{cases} \quad (4.267)$$

Nótese que era necesario que los ceros y polos de los parámetros de inmitancia fueran imaginarios puros. Si no hubiera sido así, sería signo de algún error en los cálculos.

Nótese que las impedancias y admitancias, que son realmente inmitancias LC, tienen sus ceros y polos intercalados, mientras que la transimpedancia o transadmitancia, que no son realmente inmitancias LC, no tienen porqué tenerlos (en este caso no los tienen).

Ahora debemos elegir un conjunto de parámetros de inmitancia para la síntesis, y una inmitancia de síntesis del conjunto seleccionado. Por regla general, es conveniente utilizar la inmitancia de síntesis de mayor orden<sup>195</sup> de entre las disponibles, por lo que elegiremos los parámetros de impedancia.

En lo que se refiere a la elección de la inmitancia de síntesis, dada la simetría de este caso da igual elegir  $z_{11}$  o  $z_{22}$ , pues sería únicamente una cuestión de nombre. Digamos que elegimos  $z_{11}$ .

El siguiente paso es examinar qué tipos de polos existen en los parámetros de inmitancia elegidos para la síntesis. En nuestro caso, no existen polos privados, es decir, todos los polos son compartidos. Veamos si son compartidos compactos ó compartidos no compactos. Para ello es necesario realizar 195. Esto no es necesario. El alumno puede practicar la resolución del problema a partir de los parámetros de admitancia.

el cálculo de los residuos, o lo que es lo mismo, la expansión en fracciones simples (en realidad, puesto que todos los ceros de transmisión son ceros de  $z_{12}$ , ya podemos anticipar los polos serán todos compartidos compactos. Si hubiéramos utilizado los parámetros de admitancia, podríamos anticipar que todos los polos son compartidos compactos salvo el polo en infinito, ya que todos los ceros de transmisión finitos son ceros de  $y_{12}$ , pero no el cero de transmisión en infinito, y además el polo en infinito es compartido.),

$$\begin{aligned} z_{11} = z_{22} &= 2.29087 \frac{(s^2 + 0.79196)(s^2 + 2.36687)}{s(s^2 + 2.32226)(s^2 + 2.41361)} = \\ &= \frac{k_{11,0}}{s} + \frac{K_{11,1}s}{s^2 + 2.32226} + \frac{K_{11,2}s}{s^2 + 2.41361} \end{aligned} \quad (4.268)$$

$$\begin{aligned} k_{11,0} &= [z_{11}(s)s] \Big|_{s=0} = 0.76613 \\ K_{11,1} &= \left[ z_{11}(s) \frac{s^2 + 2.32226}{s} \right] \Big|_{s^2 = -2.32226} = 0.73721 \\ K_{11,2} &= \left[ z_{11}(s) \frac{s^2 + 2.41361}{s} \right] \Big|_{s^2 = -2.41361} = 0.78754 \end{aligned} \quad (4.269)$$

donde lógicamente, los valores de los residuos serán idénticos para  $z_{22}$ . Nótese que los residuos son reales y positivos, como es necesario para que la impedancia sea realizable LC. Por otra parte, para  $z_{12}$  tendremos,

$$\begin{aligned} z_{12} &= 0.71570 \frac{(s^2 + 2)(s^2 + 3)}{s(s^2 + 2.32226)(s^2 + 2.41361)} = \\ &= \frac{k_{12,0}}{s} + \frac{K_{12,1}s}{(s^2 + 2.32226)} + \frac{K_{12,2}s}{(s^2 + 2.41361)} \end{aligned} \quad (4.270)$$

$$\begin{aligned} k_{12,0} &= [z_{12}(s)s] \Big|_{s=0} = 0.76613 \\ K_{12,1} &= \left[ z_{12}(s) \frac{s^2 + 2.32226}{s} \right] \Big|_{s^2 = -2.32226} = 0.73685 \\ K_{12,2} &= \left[ z_{12}(s) \frac{s^2 + 2.41361}{s} \right] \Big|_{s^2 = -2.41361} = -0.78729 \end{aligned} \quad (4.271)$$

Nótese ahora que, aunque los residuos son reales, no son todos positivos. Esto no es un problema, pues  $z_{12}$  no es una inmitancia sino una transinmitancia, por lo que no tiene porqué cumplir (todas) las propiedades de las inmitancias LC.

Vamos ahora a observar la condición de los residuos<sup>196</sup>. Es evidente que la condición debe cumplirse para que la escalera sea realizable. Lo que queremos observar es si se cumple con una igualdad o con una desigualdad.

$$\begin{aligned} k_{11,0}k_{22,0} - [k_{12,0}]^2 &= [k_{11,0}]^2 - [k_{12,0}]^2 = \\ &= 0.76613^2 - 0.76613^2 = 0 \\ k_{11,1}k_{22,1} - [k_{12,1}]^2 &= [k_{11,1}]^2 - [k_{12,1}]^2 = \\ &= 0.73721^2 - 0.73685^2 = 0.00053 \\ k_{11,2}k_{22,2} - [k_{12,2}]^2 &= [k_{11,2}]^2 - [k_{12,2}]^2 = \\ &= 0.78754^2 - (-0.78729)^2 = 0.00039 \end{aligned} \quad (4.272)$$

Nótese que respecto al polo en el origen, la condición de los residuos se “ha cumplido con una igualdad exacta”, mientras que para los dos polos finitos, aparentemente, “se ha cumplido con una desigualdad”. A este respecto, es necesario hacer las siguientes aclaraciones importantes.

196. Nótese que, aunque lo que hemos calculado para los casos de polos finitos (y no nulos) es en realidad el doble de los residuos, estos valores pueden usarse directamente en la condición de los residuos porque el factor 2 en los “residuos” de los tres parámetros de inmitancia no afecta a la desigualdad.

Debemos tener en cuenta que los valores numéricos empleados en la evaluación de la condición de los residuos son el resultado de sucesivas operaciones previas en las que se han ido despreciando decimales y redondeando los valores al último decimal mantenido. Por tanto, sería absurdo esperar que los valores obtenidos para los residuos de los diferentes parámetros de inmitancia fueran exactos, y de ahí, es necesario admitir que el resultado de la evaluación tendrá cierto margen de error. Esto quiere decir que el hecho de que la igualdad no se cumpla “exactamente” no significa necesariamente que el polo no sea compacto. Si el resultado de la evaluación de la condición es negativo, pero “pequeño” en valor absoluto, tampoco significa necesariamente que el sistema no sea realizable.

Se plantea ahora la necesidad de “decidir” lo que es pequeño y lo que no. Si el resultado es negativo y su valor absoluto es “no pequeño”, el sistema no será realizable. Si el resultado es positivo y “no pequeño”, el polo será no compacto. Si el resultado es positivo o negativo pero “pequeño” en valor absoluto, aunque no sepamos realmente, a ciencia cierta, cuál es el resultado exacto, será razonable suponer que el polo es compartido compacto, ya que parece poco probable en general que pequeñas variaciones en los valores de los residuos modifiquen las propiedades cualitativas de un sistema (ser o no realizable, tener o no un cero de transmisión a la frecuencia del polo) si estamos pensando en un sistema real razonablemente robusto frente a pequeñas variaciones en sus parámetros.

En cuanto a lo que es pequeño o no, debemos considerar el margen de error en nuestros cálculos, teniendo en cuenta cuántas cifras significativas hemos estado utilizando y cuántas veces hemos operado con ellas desde el comienzo a partir de los datos del problema. En definitiva, sería necesario calcular el margen de error de nuestro resultado. En la práctica, lo habitual es observar si el resultado es “del orden de los errores cometido al despreciar los decimales menos significativos<sup>197</sup>”.

En nuestro caso, el hecho de que la igualdad se cumpla exactamente en el caso del polo en el origen no es más que “una casualidad”. De la misma manera, el hecho de que los resultados de los dos polos finitos sea “ligeramente positivo” también es “una casualidad” en el sentido de que igual podrían haber sido “ligeramente negativos”. En cualquiera de los tres casos, el resultado es “del orden” de los decimales despreciados sistemáticamente en los cálculos.

Por tanto, podemos aceptar el resultado de que los tres<sup>198</sup> polos son compartidos compactos.

El siguiente paso será utilizar un diagrama polo-cero para “planear” la síntesis. Esto a veces no es trivial, como se puede observar a continuación.

La Fig. 4.21 muestra, en su parte superior, el diagrama polo-cero correspondiente a la inmitancia de síntesis y a la transinmitancia elegidas<sup>199</sup> ( $z_{11}$  y  $z_{12}$ ). En este caso, los polos son todos compartidos compactos<sup>200</sup>, por lo que no hay más ceros de transmisión<sup>201</sup> que los ceros de  $z_{12}$ .

Veamos el proceso que podríamos seguir.

Está claro que no podemos empezar eliminando ningún polo de la inmitancia de síntesis  $z_{11}$  porque ésta no tiene ningún polo en frecuencias que sean ceros de transmisión. Por tanto, invertimos la impedancia de síntesis,

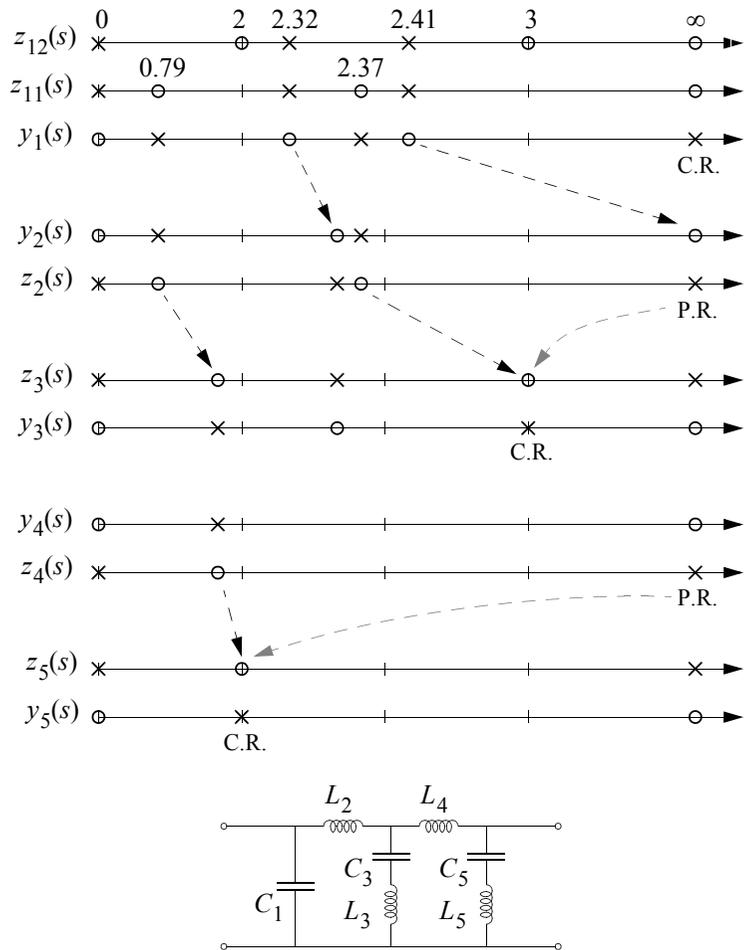
197. Realmente podría ser incluso uno o dos órdenes superiores, dependiendo de cuántos cálculos y de que tipo se hayan hecho previamente, con sus correspondientes errores que eventualmente se pueden acumular. Por este motivo, es conveniente en este tipo de problemas utilizar un número suficiente de dígitos significativos en los valores numéricos (digamos 5 ó 6, al menos). Un tratamiento más riguroso requeriría un análisis de errores en todas las operaciones realizadas.

198. En realidad son cinco polos. Los polos finitos, al aparecer por pares, suelen “contarse” como uno sólo.

199. Salvo que se indique lo contrario representaremos los diagramas en el eje de frecuencias al cuadrado  $\omega^2$ .

200. Esto significa que estamos obligados a cumplir las condiciones del primer teorema de Bader a todas las frecuencias. En la discusión que sigue no se cumplirán estas condiciones en algunos intentos, discutiéndose los efectos que resultan.

201. Cuando hay otros ceros debidos a polos privados o compartidos no compactos, es conveniente señalarlos de alguna manera en el diagrama para tenerlos en cuenta durante el proceso de síntesis.



**Figura 4.21: Diagrama polo-cero y topología de circuito correspondiente al “primer intento” (que no es válido).**

obteniendo una admitancia  $y_1$  que sí tiene un polo en infinito, en donde tenemos un cero de transmisión.

Eliminamos totalmente el polo en infinito para crear dicho cero de transmisión. Esto supone un condensador  $C_1$  en una rama paralelo<sup>202</sup>, y a la

admitancia restante la llamamos  $y_2$ . Esta admitancia no tiene polo a ninguna frecuencia que sea cero de transmisión, por lo que debemos volver a invertir obteniendo  $z_2$  que sí tiene polo en infinito. Debemos crear los otros ceros de transmisión, por lo que haremos una eliminación parcial del polo en infinito<sup>203</sup> para desplazar el cero interno en  $\omega^2 = 2.37$  a  $\omega^2 = 3$  (esto se lleva a cabo imponiendo que la impedancia restante  $z_3$  tenga un cero de transmisión en  $\omega^2 = 3$ ). Invertimos  $z_3$  para obtener  $y_3$  y eliminamos completamente el polo que resulta en  $\omega^2 = 3$ . Esto crea el cero de transmisión que debíamos crear en esa posición.

La admitancia restante  $y_4$  no tiene polo en infinito (pero sí un cero<sup>204</sup>) por lo que la invertimos para obtener  $z_4$ , realizando ahora una nueva eliminación parcial del polo resultante en infinito para desplazar el cero interno a  $\omega^2 = 2$ . Invertimos la impedancia restante  $z_5$  para obtener  $y_5$ , en la que realizamos una eliminación total del polo en  $\omega^2 = 2$ , que crea el cero de transmisión necesario en esa frecuencia, y con ello terminamos la realización de la impedancia de síntesis. Puesto que estamos utilizando parámetros de impedancia, la segunda puerta (en circuito abierto) se toma en los extremos de la rama correspondiente a la última eliminación, que deberá ser de admitancia.

Esta realización es incorrecta porque no hemos cumplido las condiciones del primer teorema de Bader en la frecuencia  $\omega^2 = \infty$ , y por tanto a esta frecuencia, que no es polo de la inmitancia de síntesis, la inmitancia de la otra puerta realizada  $z_{22r}$ , tendrá un polo privado en  $\omega^2 = \infty$ , que creará

- 202. En lo sucesivo no se irán comentando los elementos correspondientes a cada eliminación. El convenio que se seguirá es utilizar subíndices consecutivos para cada una de las inmitancias en las que se realiza eliminación. El elemento (o los elementos) correspondientes a una eliminación (parcial o total) de esa inmitancia tendrá(n) el mismo subíndice.
- 203. Teniendo un poco experiencia, en el futuro, se verá que esta eliminación no debe realizarse porque directa o indirectamente producirá un nuevo cero de transmisión en infinito, donde tenemos un cero de transmisión simple.
- 204. Esto no es una casualidad: recuérdese que las inmitancias LC siempre tienen o polo o cero en infinito.

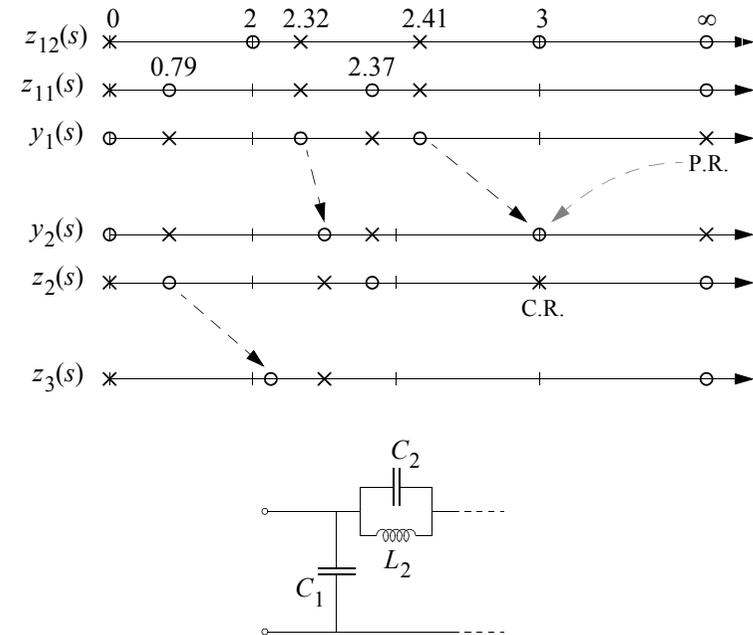
un cero de transmisión añadido al creado por la primera eliminación total en  $\omega^2 = \infty$  (que creó el cero de  $z_{12}$  en esa frecuencia, y por tanto un primer cero de transmisión). En definitiva, tendremos un cero de transmisión doble en infinito, en contra de lo prescrito.

Hay un aspecto que hemos pasado por alto, y es importante. Nótese que la eliminación parcial realizada en  $z_2$  para desplazar el cero interno en  $\omega^2 = 2.37$  a  $\omega^2 = 3$  también habrá desplazado el cero interno de  $z_2$  en  $\omega^2 = 0.79$  hacia la derecha. En principio, no podemos saber (hasta que no realicemos los cálculos) si lo habrá desplazado a una posición a la derecha de  $\omega^2 = 2$  o por el contrario habrá quedado a la izquierda<sup>205</sup>. En la Fig. 4.21 se supone que ha quedado a la izquierda, que es el caso más favorable. Si hubiera quedado a la derecha no podríamos seguir, porque la única posibilidad para desplazarlo hacia  $\omega^2 = 2$  sería la eliminación de algún polo a la izquierda (este tendría que ser el polo en cero de  $z_4$ ), pero esto crearía un cero de transmisión (en cero) que no tenemos.

En definitiva, esta aproximación no es válida. Busquemos otra procurando realizar sólo eliminaciones parciales del polo en infinito, para después realizar una total a la misma frecuencia, cumpliendo así las condiciones del primer teorema de Bader y evitar nuestro fallo anterior.

La Fig. 4.22 muestra un nuevo intento. Realizamos una eliminación parcial del polo en infinito de  $y_1$  para desplazar el cero interno en  $\omega^2 = 2.37$  a  $\omega^2 = 3$ , invertimos la inmitancia  $y_2$  resultante y eliminamos totalmente el polo resultante en  $\omega^2 = 3$  de la impedancia  $z_2$ , creando el cero de transmisión deseado y quedándonos una impedancia restante  $z_3$ . Al realizar la eliminación completa del polo en  $\omega^2 = 3$  de  $z_3$ , su cero en  $\omega^2 = 0.79$  se desplazará hacia la derecha, quedando a la derecha o a la izquierda de  $\omega^2 = 2$  (no lo podemos saber hasta que no realicemos los cálculos).

En la Fig. 4.22 se supone que ha quedado a la derecha. En este caso, no podemos hacer nada para desplazarlo hacia la izquierda (cualquier elimi-  
205. Sería una suerte que hubiera quedado justamente en  $\omega^2 = 2$ , pero estas casualidades no suelen ocurrir.



**Figura 4.22: Diagrama polo-cero y topología de circuito correspondiente al "segundo intento" (tampoco es no válido).**

nación debería ser por debajo de 2, y eso crearía un cero de transmisión indeseado). Invertiendo  $z_3$  tampoco arreglaríamos nada, porque el único cero interno disponible para ser desplazado sería el correspondiente al polo inicialmente en  $\omega^2 = 2.32$ , desplazado hacia la derecha por la eliminación parcial realizada en  $y_1$ , y por tanto situado a la derecha  $\omega^2 = 2$ . De nuevo haría falta una eliminación de un polo por debajo de  $\omega^2 = 2$ , que crearía un cero de transmisión indeseado.

Si, en contra de lo supuesto en la Fig. 4.22, el desplazamiento inicial del cero en  $\omega^2 = 0.79$  hubiera quedado a la izquierda de  $\omega^2 = 2$ , tampoco tenemos ninguna posibilidad, porque las únicas alternativas serían eliminar (parte de) el polo interno de  $z_3$  (creando un cero de transmisión no deseado),

o invertir  $z_3$  y eliminar (parte de) el polo interno de  $y_3$  (que ahora estaría a la izquierda de 2) para desplazar el cero interno que tendremos la derecha de 2 (esto también crea un cero de transmisión indeseado).

Vamos a realizar un tercer intento, procurando aprender de los errores anteriores. La Fig. 4.23 muestra el procedimiento, que comienza como en el intento anterior pero, en lugar de realizar una eliminación completa del polo en  $\omega^2 = 3$  conseguido en  $z_2$ , realizamos una eliminación parcial para desplazar el cero en  $\omega^2 = 0.79$  a  $\omega^2 = 2$  (esta eliminación tiene un “riesgo”<sup>206</sup>). Invertimos y eliminamos totalmente el polo en  $\omega^2 = 2$  de  $y_3$ . Esto crea el cero de transmisión necesario en  $\omega^2 = 2$ . También desplaza hacia la izquierda el cero que habíamos situado en  $\omega^2 = 3$ , pero podemos realizar una nueva eliminación parcial del polo en infinito de  $y_4$  para volverlo a poner en su sitio ( $\omega^2 = 3$ ). A continuación invertimos y eliminamos totalmente el polo en  $\omega^2 = 3$  de  $z_5$ . Esto crea<sup>207</sup> el cero de transmisión en  $\omega^2 = 3$  que estaba prescrito (y “cierra” las condiciones del primer teorema de Bader a esa frecuencia, que había sido “abierta” por una eliminación parcial anterior). Finalmente, la impedancia restante  $z_6$  tiene cero en infinito, por lo que la invertimos y eliminamos totalmente el polo en infinito de  $y_6$ , creando el cero de transmisión en infinito que estaba prescrito y “cerrando” las condiciones del primer teorema de Bader a esa frecuencia.

Esta realización sí es correcta. Hemos creado los ceros de transmisión que necesitábamos, y sólo los que necesitábamos. Los parámetros prescritos tienen todos sus polos compartidos compactos, y hemos cumplido las condiciones del primer teorema de Bader a todas las frecuencias. Por tanto, los parámetros realizados también tienen todos sus polos compartidos compactos. Cuando las eliminaciones parciales se hacen en base a ceros que no son adyacentes al polo parcialmente eliminado, se debe considerar que cabe la posibilidad de que ni siquiera la eliminación total del polo sea suficiente para llevar el cero a donde queremos, lo que significaría que la imposición de esa condición haría que la eliminación, en lugar de ser parcial, fuera más allá de la total, produciendo por tanto una inmitancia residual no realizable (nos habríamos “pasado” de residuo). Lo mismo puede ocurrir cuando se elimina parcialmente un polo interno y los dos ceros adyacentes son internos.

tos. Esto quiere decir que la realización es válida con certeza, y más aún, en este caso no hará falta añadir ninguna rama adicional para completar la inmitancia de la otra puerta. Lo que sí podría ser necesario es un transformador. Para comprobarlo debemos hacer antes algo que en cualquier caso debemos hacer para terminar la síntesis de la bipuerta: los cálculos. Siguiendo el orden de eliminaciones descrito en la Fig. 4.23, y la notación empleada en el circuito que aparece en la parte baja de la figura, tendremos los siguientes resultados.

$$z_{11} = 2.29087 \frac{(s^2 + 0.79196)(s^2 + 2.36687)}{s(s^2 + 2.32226)(s^2 + 2.41361)} \quad (4.273)$$

La invertimos,

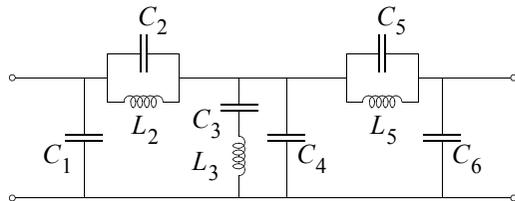
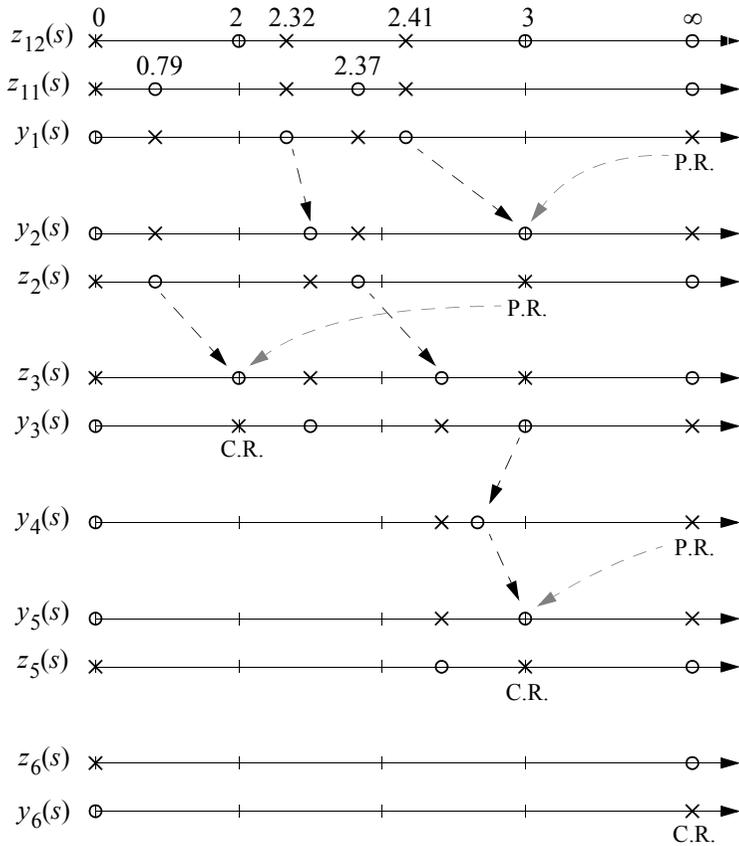
$$y_1 = \frac{1}{z_{11}} = 0.436515 \frac{s(s^2 + 2.32226)(s^2 + 2.41361)}{(s^2 + 0.79196)(s^2 + 2.36687)} \quad (4.274)$$

Y eliminamos parcialmente el polo en infinito para conseguir un cero de transmisión en  $\omega^2 = 3$  en la admitancia restante  $y_2$ . El residuo se obtiene de,

$$y_2 \Big|_{s^2 = -3} = [y_1 - k_1 s] \Big|_{s^2 = -3} = 0 \quad (4.275)$$

es decir,

207. La eliminaciones totales que “cierran” las condiciones del primer teorema de Bader a una determinada frecuencia crean un cero de transmisión, y hacen que las eliminaciones parciales previas no creen cero de transmisión. En cierta manera, el cero de transmisión creado ya existía, porque si no se hubiera realizado la eliminación total que “cierra” las condiciones, las eliminaciones parciales previas si crearían un cero de transmisión (por polo privado o compartido no compacto). Recuérdese: si realizamos alguna eliminación a alguna frecuencia (da igual que sea total o parcial), aparecerá siempre un cero de transmisión a esa frecuencia por una u otra razón. Por ese motivo, no podemos realizar eliminaciones a ninguna frecuencia a la que no haya cero de transmisión (ni tampoco a frecuencias en las que haya ceros de transmisión que ya han sido creados).



**Figura 4.23: Diagrama polo-cero y topología de circuito correspondiente al “tercer intento” (que sí es válido).**

$$k_1 = \frac{y_1}{s} \Big|_{s^2 = -3} = 0.436515 \frac{(s^2 + 2.32226)(s^2 + 2.41361)}{(s^2 + 0.79196)(s^2 + 2.36687)} \Big|_{s^2 = -3} = \quad (4.276)$$

$$= 0.436515 \frac{(2.32226 - 3)(2.41361 - 3)}{(0.79196 - 3)(2.36687 - 3)} = 0.124093$$

y ya tenemos el valor del primer elemento,

$$C_1 = k_1 = 0.124093 \quad (4.277)$$

Ahora calculamos  $y_2$ . Esta suele ser la parte más engorrosa,

$$y_2 = y_1 - k_1 s = \quad (4.278)$$

$$= 0.436515 \frac{s(s^2 + 2.32226)(s^2 + 2.41361)}{(s^2 + 0.79196)(s^2 + 2.36687)} - 0.124093 s = \quad (4.279)$$

$$= \frac{0.436515 s(s^2 + 2.32226)(s^2 + 2.41361) - 0.124093 s(s^2 + 0.79196)(s^2 + 2.36687)}{(s^2 + 0.79196)(s^2 + 2.36687)} = \quad (4.280)$$

$$= \frac{0.436515 s(s^4 + 4.73587 s^2 + 5.60503) - 0.124093 s(s^4 + 3.15883 s^2 + 1.87447)}{(s^2 + 0.79196)(s^2 + 2.36687)} = \quad (4.281)$$

$$= \frac{s(0.31242 s^4 + 1.67529 s^2 + 2.21407)}{(s^2 + 0.79196)(s^2 + 2.36687)} = \quad (4.282)$$

$$= 0.31242 \frac{s(s^4 + 5.36230 s^2 + 7.08684)}{(s^2 + 0.79196)(s^2 + 2.36687)} = \quad (4.283)$$

$$= 0.31242 \frac{s(s^2 + 3.00003)(s^2 + 2.36224)}{(s^2 + 0.79196)(s^2 + 2.36687)} \quad (4.284)$$

que efectivamente tiene<sup>208</sup> un cero de transmisión en  $\omega^2 = 3$ . Estos cálculos se han detallado para que se observe que requieren cierto trabajo. Esto es así sobre todo al principio, cuando el orden de la inmitancia restante

sigue siendo alto. Ahora invertimos para obtener  $z_2$ ,

$$z_2 = \frac{1}{y_2} = 3.20082 \frac{(s^2 + 0.79196)(s^2 + 2.36687)}{s(s^2 + 3)(s^2 + 2.36224)} \quad (4.285)$$

y eliminamos parcialmente su polo en  $\omega^2 = 3$  para situar un cero en  $\omega^2 = 2$ , es decir

$$z_3 \Big|_{s^2 = -2} = \left[ z_2 - \frac{K_2 s}{s^2 + 3} \right] \Big|_{s^2 = -2} = 0 \quad (4.286)$$

y el residuo valdrá,

$$\begin{aligned} K_2 &= z_2 \frac{s^2 + 3}{s} \Big|_{s^2 = -2} = \\ &= 3.20082 \frac{(s^2 + 0.79196)(s^2 + 2.36687)}{s^2(s^2 + 2.36224)} \Big|_{s^2 = -2} = \\ &= 3.20082 \frac{(0.79196 - 2)(2.36687 - 2)}{(-2)(2.36224 - 2)} = 1.95807 \end{aligned} \quad (4.287)$$

que corresponde a

$$\begin{aligned} C_2 &= \frac{1}{K_2} = \frac{1}{1.95807} = 0.51070 \\ L_2 &= \frac{K_2}{\omega_2^2} = \frac{1.95807}{3} = 0.65269 \end{aligned} \quad (4.288)$$

Ahora calculamos  $z_3$ ,

$$z_3 = z_2 - \frac{K_2 s}{s^2 + 3} = 3.20082 \frac{(s^2 + 0.79196)(s^2 + 2.36687)}{s(s^2 + 3)(s^2 + 2.36224)} - \frac{1.95807 s}{s^2 + 3} \quad (4.289)$$

208. Las pequeñas discrepancias son errores de redondeos en los cálculos. Estas discrepancias serán pequeñas o no, siempre, en sentido relativo al valor del polo (en las últimas cifras decimales). De nuevo, recuérdese que es conveniente tomar un número razonable (digamos que 5 ó 6) de cifras decimales en estos cálculos. Aunque, evidentemente, en la práctica, los componentes no tendrán esa precisión.

$$= \frac{(3.20082s^4 + 10.110846s^2 + 5.9998294) - (1.95807s^4 + 4.6254313s^2)}{s(s^2 + 3)(s^2 + 2.36224)} = \quad (4.290)$$

$$= \frac{1.24275s^4 + 5.485415s^2 + 5.9998294}{s(s^2 + 3)(s^2 + 2.36224)} = \quad (4.291)$$

$$= 1.24275 \frac{(s^4 + 4.4139328s^2 + 4.8278652)}{s(s^2 + 3)(s^2 + 2.36224)} = \quad (4.292)$$

$$= 1.24275 \frac{(s^2 + 1.999999)(s^2 + 2.413934)}{s(s^2 + 3)(s^2 + 2.36224)} = \quad (4.293)$$

$$= 1.24275 \frac{(s^2 + 2)(s^2 + 2.41393)}{s(s^2 + 3)(s^2 + 2.36224)} \quad (4.294)$$

que efectivamente tiene un cero en  $\omega^2 = 2$ . Ahora la invertimos,

$$y_3 = \frac{1}{z_3} = 0.804667 \frac{s(s^2 + 3)(s^2 + 2.36224)}{(s^2 + 2)(s^2 + 2.41393)} \quad (4.295)$$

y eliminamos totalmente el polo en  $\omega^2 = 2$ ,

$$K_3 = y_3 \frac{s^2 + 2}{s} \Big|_{s^2 = -2} = 0.704176 \quad (4.296)$$

que corresponde a

$$C_3 = \frac{K_3}{\omega_3^2} = \frac{0.704176}{2} = 0.352088 \quad (4.297)$$

$$L_3 = \frac{1}{K_3} = \frac{1}{0.704176} = 1.420099$$

La admitancia restante  $y_4$  será

$$y_4 = y_3 - \frac{K_3 s}{s^2 + 2} = 0.804667 \frac{s(s^2 + 3)(s^2 + 2.36224)}{(s^2 + 2)(s^2 + 2.41393)} - \frac{0.704176 s}{s^2 + 2} = \quad (4.298)$$

$$= \frac{(0.804667s^5 + 4.3148176s^3 + 5.7024497s) - (0.704176s^3 + 1.6998316s)}{(s^2 + 2)(s^2 + 2.41393)} = (4.299)$$

$$= \frac{0.804667s^5 + 3.6106416s^3 + 4.0026182s}{(s^2 + 2)(s^2 + 2.41393)} = (4.300)$$

$$= 0.804667 \frac{s(s^4 + 4.48712s^2 + 4.97425)}{(s^2 + 2)(s^2 + 2.41393)} = (4.301)$$

$$= 0.804667 \frac{s(s^2 + 2.00001)(s^2 + 2.48712)}{(s^2 + 2)(s^2 + 2.41393)} = (4.302)$$

$$= 0.804667 \frac{s(s^2 + 2.48712)}{(s^2 + 2.41393)} = (4.303)$$

Ahora eliminamos parcialmente el polo en infinito para volver a situar el cero en  $\omega^2 = 3$

$$y_5 \Big|_{s^2 = -3} = [y_4 - k_4 s] \Big|_{s^2 = -3} = 0 \quad (4.304)$$

es decir,

$$k_4 = \frac{y_4}{s} \Big|_{s^2 = -3} = 0.804667 \frac{(s^2 + 2.48712)}{(s^2 + 2.41393)} \Big|_{s^2 = -3} = 0.704178 \quad (4.305)$$

que corresponde a

$$C_4 = k_4 = 0.704178 \quad (4.306)$$

Ahora debemos calcular la admitancia restante,

$$y_5 = y_4 - k_4 s = 0.804667 \frac{s(s^2 + 2.48712)}{(s^2 + 2.41393)} - 0.704178 s = (4.307)$$

$$y_5 = y_4 - k_4 s = \frac{0.100489s(s^2 + 2.9999999)}{(s^2 + 2.41393)} = 0.100489 \frac{s(s^2 + 3)}{(s^2 + 2.41393)} \quad (4.308)$$

que efectivamente tiene un cero en  $\omega^2 = 3$ . Ahora la invertimos,

$$z_5 = \frac{1}{y_5} = 9.951338 \frac{s^2 + 2.41393}{s(s^2 + 3)} \quad (4.309)$$

y eliminamos totalmente el polo en  $\omega^2 = 3$ ,

$$K_5 = z_5 \frac{s^2 + 3}{s} \Big|_{s^2 = -3} = 1.944060 \quad (4.310)$$

que corresponde a

$$C_5 = \frac{1}{K_5} = \frac{1}{1.944060} = 0.51438 \quad (4.311)$$

$$L_5 = \frac{K_5}{\omega_5^2} = \frac{1.944060}{3} = 0.64802$$

Ahora calculamos la impedancia restante

$$z_6 = z_5 - \frac{K_5 s}{s^2 + 3} = 9.951338 \frac{s^2 + 2.41393}{s(s^2 + 3)} - \frac{1.944060s}{s^2 + 3} = (4.312)$$

$$= \frac{8.007278(s^2 + 2.9999999)}{s(s^2 + 3)} = \frac{8.007278}{s} \quad (4.313)$$

la invertimos,

$$y_6 = \frac{1}{z_6} = \frac{s}{8.007278} = 0.12489s \quad (4.314)$$

y eliminamos totalmente su polo en infinito,

$$k_6 = \frac{y_6}{s} \Big|_{s \rightarrow \infty} = 0.12489 \quad (4.315)$$

que corresponde a

$$C_6 = k_6 = 0.12489 \quad (4.316)$$

Las ecuaciones (4.277), (4.288), (4.297), (4.306), (4.311), y (4.316) reflejan los valores normalizados de los elementos del circuito de la Fig. 4.23. Para completar el filtro, bastaría añadir las resistencias terminales de valor

igual a 1 (ambas son iguales según el enunciado, y su valor se ha utilizado como impedancia de normalización). Estos valores se resumen en la siguiente tabla,

|       |          |
|-------|----------|
| $C_1$ | 0.12409  |
| $C_2$ | 0.51070  |
| $C_3$ | 0.35209  |
| $C_4$ | 0.70418  |
| $C_5$ | 0.51438  |
| $C_6$ | 0.12489  |
| $L_2$ | 0.65269  |
| $L_3$ | 1.42010  |
| $L_5$ | 0.64802  |
| $R_S$ | 1, 00000 |
| $R_L$ | 1, 00000 |

Nótese que dicho circuito es simétrico en su topología. La similitud en los valores de  $C_1$  y  $C_6$  por una parte, y entre los de las parejas ( $C_2, L_2$ ) y ( $C_5, L_5$ ) por otra parte, no es casualidad. De hecho, las diferencias se deben a errores de redondeo en los cálculos, como podría demostrarse fácilmente. Esto quiere decir que el circuito también es simétrico en los valores de los elementos.

Todo esto concuerda con el hecho de que, el haber elegido  $z_{11}$  y no  $z_{22}$  como impedancia de síntesis no deja de ser más que una cuestión de nombre, pues  $z_{11} = z_{22}$  en los parámetros prescritos, es decir, la bipuerta prescrita era ya simétrica.

Todo esto apunta a que no hará falta tampoco transformador (o si se prefiere, la constante del mismo será 1), pues si hiciera falta un transformador con constante distinta de la unidad se rompería la simetría de la bipuerta. Comprobémoslo en cualquier caso, para confirmar que no nos hemos equivocado, y para mostrar como se realiza este proceso cuando es necesario.

Vamos a realizar la comparación en DC, es decir, a bajas frecuencias. A partir de (4.264), es fácil ver que

$$z_{12_{\text{PRESCRITA}}}\Big|_{s \rightarrow 0} \rightarrow \frac{1}{1.30526s} \quad (4.317)$$

es decir,

$$\frac{V_2}{I_1}\Big|_{\substack{I_2=0, s \rightarrow 0 \\ \text{PRESCRITA}}} \rightarrow \frac{1}{1.30526s} \quad (4.318)$$

En la bipuerta de la Fig. 4.23, con una excitación en intensidad  $I_1$  en la puerta 1 (a la izquierda<sup>209</sup>), y midiendo la tensión  $V_2$  en la puerta 2 (que estará abierta) a frecuencias bajas tendremos lo siguiente. Entre  $C_5$  y  $L_5$ , que están en paralelo, domina  $L_5$ , es decir, podemos eliminar<sup>210</sup> a  $C_5$ . Por el mismo motivo podemos eliminar a  $C_2$ . Entre  $C_3$  y  $L_3$ , que están en serie, domina  $C_3$ , es decir, podemos eliminar<sup>211</sup> a  $L_3$ . En la (nueva) rama compuesta por  $L_5$  y  $C_6$ , conectados en serie, domina  $C_6$ , y por tanto eliminamos a  $L_5$ . Ahora  $C_3$ ,  $C_4$  y  $C_6$  están en paralelo por lo que equivalen a un único condensador que está en serie con  $L_2$ . Domina el condensador y por tanto eliminamos a  $L_2$ . Finalmente, nos han quedado los condensadores  $C_1$ ,  $C_3$ ,  $C_4$  y  $C_6$  en paralelo, en los que entra la intensidad  $I_1$  y cuya tensión es  $V_2$ . Por tanto,

209. Realmente daría igual, porque la bipuerta es simétrica, y aunque no lo fuera, porque todas las bipuertas pasivas son recíprocas.

210. A bajas frecuencias, eliminar un condensador significa sustituirlo por un abierto. Si fuera a altas frecuencias lo sustituiríamos por un corto.

211. A bajas frecuencias, eliminar un inductor significa sustituirlo por un corto. Si fuera a altas frecuencias lo sustituiríamos por un abierto.

$$\left. \frac{V_2}{I_1} \right|_{I_2=0, s \rightarrow 0} \xrightarrow{\text{REALIZADA}} \frac{1}{(C_1 + C_3 + C_4 + C_6)s} = \quad (4.319)$$

$$= \frac{1}{(0.12409 + 0.35209 + 0.70418 + 0.12489)s} = \frac{1}{1.30525s}$$

es decir, que

$$z_{12_{\text{REALIZADA}}} \Big|_{s \rightarrow 0} \rightarrow \frac{1}{1.30526s} \quad (4.320)$$

Puesto que estamos utilizando parámetros de impedancia (ver (4.88)),

$$K = \frac{z_{12_{\text{PRESCRITA}}}}{z_{12_{\text{REALIZADA}}}} = 0.99999234 = 1 \quad (4.321)$$

ya que la comparación entre ambas puede hacerse a cualquier frecuencia (en nuestro caso en  $s \rightarrow 0$ ) porque tenemos la certeza de que difieren, si acaso, en una constante multiplicativa independiente de la frecuencia, ya que sus conjuntos de polos y ceros si son iguales. Por tanto, hemos confirmado que no hace falta transformador.

Solo queda desnormalizar lo elementos, y para ello se ha de recurrir a las relaciones de los valores de normalización de cada tipo de elemento en función de la resistencia y la frecuencia de normalización, en nuestro caso, según (4.231) y (4.233),

$$\begin{aligned} \Omega_0 &= 7539.82 \text{ rad/s} \\ R_0 &= 50 \Omega \end{aligned} \quad (4.322)$$

con lo que,

$$\begin{aligned} R_0 &= 50 \Omega \\ C_0 &= \frac{1}{\Omega_0 R_0} = 2.65258 \mu\text{F} \\ L_0 &= \frac{R_0}{\Omega_0} = 6.63146 \text{ mH} \end{aligned} \quad (4.323)$$

y los valores desnormalizados de los elementos pueden expresarse en función de sus valores normalizados como

$$\begin{aligned} R_i &= R_{in} R_0 \\ C_i &= C_{in} C_0 \\ L_i &= L_{in} L_0 \end{aligned} \quad (4.324)$$

que aplicados a la tabla anterior resulta en<sup>212</sup>

| Elemento   | Valor Normalizado | Valor Real          |
|------------|-------------------|---------------------|
| $C_1, C_6$ | 0.12449           | 0.330 $\mu\text{F}$ |
| $C_2, C_5$ | 0.51254           | 1.340 $\mu\text{F}$ |
| $C_3$      | 0.35209           | 0.934 $\mu\text{F}$ |
| $C_4$      | 0.70418           | 1.868 $\mu\text{F}$ |
| $L_2, L_5$ | 0.65036           | 4.312 mH            |
| $L_3$      | 1.42010           | 9.417 mH            |
| $R_S, R_L$ | 1, 00000          | 50.00 $\Omega$      |

212. Se ha utilizado el valor medio para los elementos cuyos valores deben ser iguales por simetría.

**Ejercicio**

**4.11.** Una escalera LC doblemente terminada tiene ceros de transmisión en  $\omega_1 = 1/2$  y  $\omega_2 \rightarrow \infty$  y para su diseño se utiliza la admitancia de síntesis  $y_{11}(s) = (s^2 + 4)/s$ . Al tener un cero de transmisión en  $\omega_1 = 1/2$ ,  $y_{12}(s)$  tendrá en el numerador un factor  $(s^2 + 1/4)$  y al tener un cero de transmisión en  $\omega_2 \rightarrow \infty$  el denominador deberá tener orden 3. Por tanto,  $y_{12}(s)$  es de la forma  $y_{12}(s) = (s^2 + 1/4)/[s(s^2 + \omega_a^2)]$ . Ya que todos los polos de  $y_{12}(s)$  deben estar contenidos en  $y_{11}(s)$  e  $y_{22}(s)$  se deduce que  $y_{11}(s)$  debería tener también el factor  $(s^2 + \omega_a^2)$  en el denominador. ¿Es correcto el razonamiento realizado?

**Solución detallada**

El razonamiento no es válido porque los ceros de transmisión no tienen porqué ser, necesariamente, ceros de la transinmitancia  $y_{12}(s)$ , sino que también pueden ser originados por polos privados de alguna de las inmitancias o por un polo compartido no compacto. Veamos las posibles alternativas.

Supondremos que los ceros de transmisión en  $\infty$  y en  $s^2 = -1/4$  son simples<sup>213</sup>. En cualquier caso, tenemos que

$$y_{11}(s) = \frac{s^2 + 4}{s} \tag{4.325}$$

La siguiente tabla recoge y comenta las distintas posibilidades. Las explicaciones de las formas funcionales de  $y_{12}(s)$ , según los casos, son las siguientes:

(\*1) En este caso,  $y_{12}$  tiene que tener esta forma por los siguientes motivos. El numerador tiene que tener el factor  $(s^2 + 1/4)$  bajo la suposición de que el cero de transmisión es debido a un cero de  $y_{12}$ . No puede haber otros factores adicionales en el numerador porque aparecerían ceros de transmisión en sitios donde no los hay (si los factores son diferentes a  $(s^2 + 1/4)$ ) o un cero múltiple en  $s^2 = -1/4$  que tampoco tenemos). El denominador de 213. Si no se asume esto, las posibilidades son mucho más amplias.

**Tabla 4.3: Análisis de las posibles causas de los ceros de transmisión en  $s^2 = -1/4$  y  $s \rightarrow \infty$ .**

| Cero en $s^2 = -1/4$ | Cero en $s \rightarrow \infty$ | Forma de $y_{12}$       | EXPLICACIÓN  |
|----------------------|--------------------------------|-------------------------|--|
| PCNC                 |                                |                         | NO, porque 1/4 no es polo de $y_{11}$  |
| PP $y_{11}$          |                                |                         |  |
| Cero de $y_{12}$     | PP de $y_{11}$                 | $A \frac{s^2 + 1/4}{s}$ | NO, porque $y_{12}$ tiene polo en $\infty$ .   |
|                      | PP de $y_{22}$                 |                         | NO, porque $y_{12}$ no tiene cero en $\infty$ .  |
|                      | Cero de $y_{12}$               | (*1)                    | SI   |
|                      | PCNC                           |                         |  |
| PP de $y_{22}$       | PP de $y_{11}$                 | $A \frac{1}{s}$         | NO, porque $y_{12}$ tiene cero en $\infty$ (habría cero doble en $\infty$ )  |
|                      | PP de $y_{22}$                 |                         | NO, porque $y_{12}$ tiene cero en $\infty$ , y también $y_{11}$ tiene polo (privado) en $\infty$ (habría cero triple en $\infty$ ) |
|                      | Cero de $y_{12}$               |                         | NO, porque $y_{11}$ tiene polo (privado) en $\infty$ (habría cero doble en $\infty$ )  |
|                      | PCNC                           |                         | NO, porque $y_{12}$ no tiene polo en $\infty$  |

$y_{12}$  tiene que ser de orden 1 porque, puesto que  $y_{12}$  tiene que ser impar, y su denominador es par, su denominador tiene que ser impar. Además, sus polos están todos en el eje imaginario (es LC) y son simples, y por tanto, además de un factor  $s$ , sólo podrían aparecer factores del tipo  $(s^2 + \omega_p^2)$ , pero esto no es posible porque los polos de la transinmitancia tienen que estar en ambas inmitancias, y sabemos que  $y_{11}$  no tienen ningún polo interno.

(\*2) En este caso,  $y_{12}$  tiene que tener esta forma por los siguientes motivos. Puesto que el cero en  $s^2 = -1/4$  es debido a un polo privado de  $y_{22}$ , este factor no puede aparecer en el numerador de  $y_{12}$  (si apareciera, habría un cero doble en  $s^2 = -1/4$ ). El único otro cero que tenemos está en  $\infty$ , y los ceros de  $y_{12}$  tienen que ser todos imaginarios puros (por ser escalera LC). Por tanto el numerador de  $y_{12}$  no puede tener ningún factor (debe ser de or-

den cero). El denominador debe ser de orden 1 porque si no habría un cero de transmisión múltiple en  $\infty$ .

Por tanto, la única alternativa es que el cero de transmisión en  $s^2 = -1/4$  sea debido a un cero de  $y_{12}$  y el cero de transmisión en  $\infty$  sea debido a un polo compartido no compacto. La forma de  $y_{12}$  debe ser, según hemos razonado,

$$y_{12}(s) = A_{12} \frac{s^2 + \frac{1}{4}}{s} \quad (4.326)$$

La forma de  $y_{22}$  será

$$y_{22}(s) = A_{22} \frac{s^2 + \omega_a^2}{s} \quad (4.327)$$

ya que debe tener polo en infinito, que debe ser simple, y no debe tener ninguno que no esté en  $y_{12}$  porque sería un polo privado que crearía un cero de transmisión que no tenemos.

El polo en cero, que es compartido, debe ser compacto, para no crear un cero de transmisión en cero. Calculando los residuos,

$$\begin{aligned} k_{11,0} &= sy_{11}(s) \Big|_{s=0} = 4 \\ k_{12,0} &= sy_{12}(s) \Big|_{s=0} = A_{12}/4 \\ k_{22,0} &= sy_{22}(s) \Big|_{s=0} = A_{22}\omega_a^2 \end{aligned} \quad (4.328)$$

y debe cumplirse

$$k_{11,0}k_{22,0} = (k_{12,0})^2 \quad (4.329)$$

es decir,

$$4A_{22}\omega_a^2 = \frac{A_{12}^2}{16} \quad (4.330)$$

o lo que es lo mismo

$$A_{22} = \frac{A_{12}^2}{64\omega_a^2} \quad (4.331)$$

Por otra parte, el polo en infinito debe ser no compacto (pero debe cumplir la condición de los residuos). Los residuos son,

$$\begin{aligned} k_{11,\infty} &= \frac{y_{11}(s)}{s} \Big|_{s \rightarrow \infty} = 1 \\ k_{12,\infty} &= \frac{y_{12}(s)}{s} \Big|_{s \rightarrow \infty} = A_{12} \\ k_{22,\infty} &= \frac{y_{22}(s)}{s} \Big|_{s \rightarrow \infty} = A_{22} \end{aligned} \quad (4.332)$$

y debe cumplirse

$$k_{11,\infty}k_{22,\infty} > (k_{12,\infty})^2 \quad (4.333)$$

es decir,

$$A_{22} > A_{12}^2 \quad (4.334)$$

lo que implica, en base a (4.331),

$$\omega_a^2 < \frac{1}{64} \quad \Rightarrow \quad \omega_a < \frac{1}{8} \quad (4.335)$$

**Ejercicio**

4.12. Supongamos que en el proceso de síntesis de un filtro LC se han obtenido los siguientes parámetros de admitancia:

$$y_{11} = \frac{3s\left(s^2 + \frac{7}{3}\right)}{(s^2 + 2)(s^2 + 5)} \quad y_{22} = \frac{s(s^2 + 3)}{(s^2 + 2)(s^2 + 5)} \quad (4.336)$$

$$y_{12} = -\frac{s(s^2 + 1)}{(s^2 + 2)(s^2 + 5)}$$

Implementar el filtro LC.

**Solución detallada**

Los tres parámetros tienen polos en  $s^2 = -2$  y en  $s^2 = -5$ , y sólo en esas posiciones. Por tanto, todos los polos son compartidos (no hay polos privados). Veamos si todos los polos son compactos. Para ello calculamos los residuos,

$$K_{11,1} = \left[ y_{11}(s) \frac{s^2 + 2}{s} \right] \Bigg|_{s^2 = -2} = \frac{1}{3}$$

$$K_{12,1} = \left[ y_{12}(s) \frac{s^2 + 2}{s} \right] \Bigg|_{s^2 = -2} = \frac{1}{3} \quad (4.337)$$

$$K_{22,1} = \left[ y_{22}(s) \frac{s^2 + 2}{s} \right] \Bigg|_{s^2 = -2} = \frac{1}{3}$$

y por tanto el polo en  $s^2 = -2$  es compacto. Veamos el otro,

$$K_{11,2} = \left[ y_{11}(s) \frac{s^2 + 5}{s} \right] \Bigg|_{s^2 = -5} = \frac{8}{3}$$

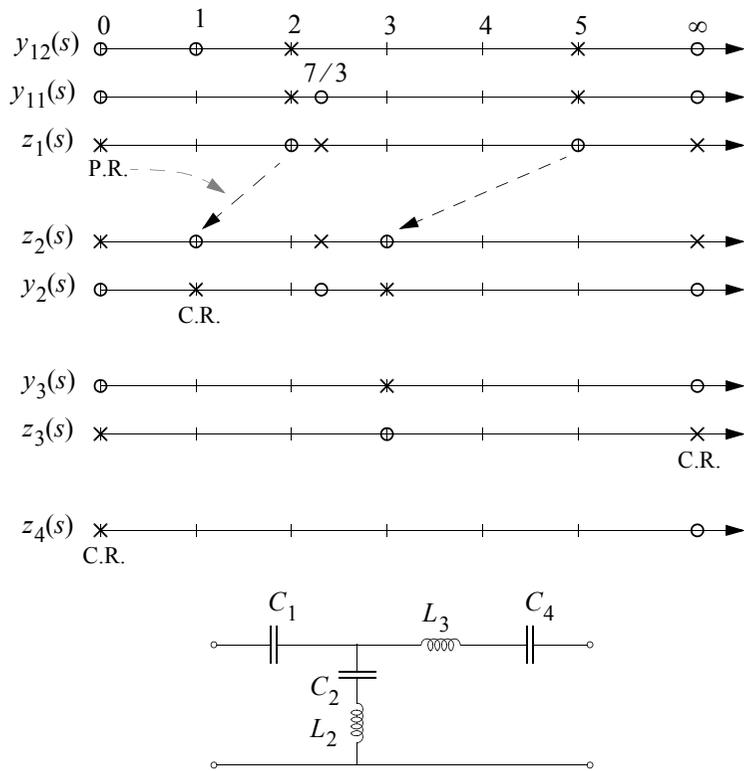
$$K_{12,2} = \left[ y_{12}(s) \frac{s^2 + 5}{s} \right] \Bigg|_{s^2 = -5} = -\frac{4}{3} \quad (4.338)$$

$$K_{22,2} = \left[ y_{22}(s) \frac{s^2 + 5}{s} \right] \Bigg|_{s^2 = -5} = \frac{2}{3}$$

que por tanto, también es compacto. Esto quiere decir que los únicos ceros de transmisión que habrá son los creados por los ceros de  $y_{12}(s)$ . También significa que estamos obligados a cumplir las condiciones del primer teorema de Bader en todas las frecuencias. Las dos admitancias tienen el mismo orden, y ninguna tiene polos privados: podemos elegir cualquiera de ellas como inmitancias de síntesis. Elijamos, por ejemplo,  $y_{11}(s)$ . La Fig. 4.24 muestra el correspondiente diagrama polo-cero.

No podemos empezar con la inmitancia de síntesis  $y_{11}$  porque ésta no tiene polo en ninguna frecuencia que sea cero de transmisión. La invertimos y obtenemos  $z_1$ , que tiene polos en cero y en infinito. Nuestro único cero interno<sup>214</sup> está en  $\omega^2 = 1$ , así que debemos eliminar parcialmente el polo en cero (el que está a la izquierda de la posición que queremos alcanzar, teniendo a la derecha de dicha posición un cero interno) para desplazar el cero que hay en  $\omega^2 = 7/3$  a  $\omega^2 = 1$ . La impedancia restante será  $z_2$ , que se invertida para obtener  $y_2$ , a la que se le realiza una eliminación completa del polo en  $\omega^2 = 1$  que crea el cero de transmisión deseado. La admitancia restante será  $y_3$ , que tiene ceros en cero y en infinito. La invertimos para obtener  $z_3$  con polos en cero y en infinito. Eliminamos totalmente el polo en infinito,

214. Los ceros de transmisión en cero o en infinito se crean siempre por eliminación de un polo en cero o en infinito, que estuviera ahí desde el principio, o que resulte de la eliminación completa de un polo en cero o en infinito. Esto es así porque no se pueden desplazar ceros internos a cero o a infinito salvo por eliminaciones completas.



**Figura 4.24: Diagrama polo-cero y topología de circuito correspondiente. El eje es de frecuencias al cuadrado.**

creando el cero de transmisión en cero, y nos queda una impedancia restante  $z_4$  con polo en cero. A continuación<sup>215</sup> eliminamos totalmente el polo en cero, cerrando las condiciones del primer teorema de Bader a esa frecuencia, y creando el cero de transmisión en cero.

215. Nótese que se eliminan consecutivamente dos polos de impedancia. No es necesario alternar siempre entre impedancia y admitancia. Por otra parte, como es obvio, cuando se realizan eliminaciones consecutivas de polos de impedancia o de admitancia (sin alternar), el orden de estas eliminaciones no afecta al resultado.

La alternativa es correcta. Hemos cumplido las condiciones del primer teorema de Bader a todas las frecuencias. Los parámetros prescritos y los realizados tienen todos sus polos compartidos compactos. Por tanto es seguro que no hará falta añadir residuos de la inmitancia de la otra puerta  $y_{22}(s)$ .

Aparte de realizar los cálculos, sólo nos falta ver si hace falta transformador, y en su caso, utilizarlo y eventualmente pasar la resistencia de carga a la izquierda del transformador para eliminarlo (aceptando el cambio en la ganancia en tensión y en el valor de la resistencia de entrada del circuito atacado por el filtro (la resistencia de carga)). Veamos los cálculos,

$$y_{11} = \frac{3s\left(s^2 + \frac{7}{3}\right)}{(s^2 + 2)(s^2 + 5)} \quad (4.339)$$

$$z_1 = \frac{(s^2 + 2)(s^2 + 5)}{3s\left(s^2 + \frac{7}{3}\right)} \quad (4.340)$$

$$k_1 = sz_1 \Big|_{s^2 = -1} = 1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{1}{k_1} = 1 \quad (4.341)$$

$$z_2 = z_1 - \frac{k_1}{s} = \frac{(s^2 + 1)(s^2 + 3)}{3s\left(s^2 + \frac{7}{3}\right)} \quad (4.342)$$

que efectivamente tiene un cero en  $\omega^2 = 1$ .

$$y_2 = \frac{3s\left(s^2 + \frac{7}{3}\right)}{(s^2 + 1)(s^2 + 3)} \quad (4.343)$$

$$K_2 = y_2 \frac{s^2 + 1}{s} \Big|_{s^2 = -1} = 2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} C_2 = \frac{K_2}{\omega_2^2} = 2 \\ L_2 = \frac{1}{K_2} = \frac{1}{2} \end{cases} \quad (4.344)$$

$$y_3 = y_2 - \frac{K_2 s}{s^2 + 1} = \frac{s}{s^2 + 3} \quad (4.345)$$

$$z_3 = \frac{s^2 + 3}{s} = s + \frac{1}{s} = k_3 s + \frac{1}{k_4 s} \quad (4.346)$$

$$k_3 = 1 \quad k_4 = \frac{1}{3}$$

$$L_3 = k_3 = 1 \quad C_4 = k_4 = \frac{1}{3}$$

En resumen, los valores de los elementos de la bipuerta de la Fig. 4.24 son,

$$C_1 = 1 \quad C_2 = 2 \quad L_2 = \frac{1}{2} \quad L_3 = 1 \quad C_4 = \frac{1}{3} \quad (4.347)$$

Veamos ahora la constante del transformador. Vamos a estudiar el comportamiento asintótico a altas frecuencias. En los referente a la transinmitancia prescrita,

$$y_{12_{\text{PRESCRITA}}} \Big|_{s \rightarrow \infty} \rightarrow -\frac{1}{s} \quad (4.348)$$

mientras que mirando el circuito, con excitación en tensión en la puerta 1 (izquierda), la puerta 2 (derecha) cortocircuitada, y a alta frecuencia, tendremos que en las asociaciones en serie de  $L_3$  y  $C_4$ , y de  $L_2$  y  $C_2$  dominan los inductores (los condensadores se sustituyen por cortos). La asociación en paralelo de  $L_3$  y  $L_2$ , que será un inductor, está en serie con  $C_1$ , de donde

resulta que de nuevo domina el inductor, y por tanto, tenemos la fuente de tensión  $V_1$  en paralelo con los inductores  $L_2$  y  $L_3$  (también en paralelo). La intensidad  $I_2$  de la segunda puerta es la que pasa por  $L_3$ , en sentido contrario al marcado por la fuente de tensión (entrando en la bipuerta), es decir, que

$$y_{12_{\text{REALIZADA}}} \Big|_{s \rightarrow \infty} = \frac{I_2}{V_1} \Big|_{V_2 = 0, s \rightarrow \infty} = -\frac{1}{sL_3} = -\frac{1}{s} \quad (4.349)$$

y por tanto, la constante del transformador es igual a 1:

$$K = \frac{y_{12_{\text{REALIZADA}}}}{y_{12_{\text{PRESCRITA}}}} = 1 \quad (4.350)$$

que significa que no necesitamos transformador, y por tanto el problema está acabado<sup>216</sup> (ya que no podemos desnormalizar los elementos).

## Ejercicio

**4.13.** Implementar una bipuerta LC doblemente terminada con polos de atenuación en  $\omega_1 = \frac{1}{3\sqrt{2}}$  y  $\omega_2 \rightarrow \infty$  y los siguientes parámetros de admitancia:

$$y_{11}(s) = \frac{21s^2 + 1}{3s} \quad y_{22}(s) = \frac{72s^2 + 3}{s} \quad (4.351)$$

## Solución detallada

Un polo de atenuación es lo mismo que un cero de transmisión. Por tanto, tenemos ceros de transmisión en  $s^2 = -1/18$  y en  $s \rightarrow \infty$ . Puesto que ni  $y_{11}(s)$  ni  $y_{22}(s)$  tienen polo en  $s^2 = -1/18$ , este cero de transmisión será

216. Recuérdese que no necesitábamos añadir residuos a la inmitancia de la otra puerta porque los parámetros prescritos tienen todos sus polos compartidos compactos y hemos cumplido las condiciones del primer teorema de Bader en todas las frecuencias.

debido a un cero de  $y_{12}(s)$  (no puede ser debido a polo privado ni a polo compartido no compacto). Por tanto,  $y_{12}(s)$  debe tener en su numerador el factor  $(s^2 + 1/18)$ . Por otra parte, puesto que todos los polos de  $y_{12}(s)$  deben estar incluidos en los polos de  $y_{11}(s)$  y en los de  $y_{22}(s)$ , y éstas tienen polos sólo en cero y en infinito, los polos de  $y_{12}(s)$  sólo pueden estar en cero y/o en infinito. Esto quiere decir que la forma de  $y_{12}(s)$  será necesariamente,

$$y_{12}(s) = A \frac{s^2 + 1/18}{s} \quad (4.352)$$

El polo en infinito es compartido, y por tanto, para que haya cero de transmisión en infinito, este polo debe ser compartido no compacto. Por otra parte, el enunciado no menciona ningún cero de transmisión en cero, por lo que este polo deberá ser compartido compacto. De este hecho podemos obtener el valor de la constante multiplicativa de  $y_{12}(s)$ ,

$$(k_{12,0})^2 = k_{11,0} k_{22,0} \quad (4.353)$$

$$(y_{12}s|_{s=0})^2 = y_{11}s|_{s=0} y_{22}s|_{s=0} \quad (4.354)$$

$$\left(\frac{A}{18}\right)^2 = 1 \quad (4.355)$$

$$A = \pm 18 \quad (4.356)$$

Tomaremos la solución negativa<sup>217</sup>, y por tanto,

$$y_{12}(s) = -\frac{18s^2 + 1}{s} \quad (4.357)$$

La Fig. 4.25 muestra el correspondiente diagrama polo-cero y el circuito asociado. Se ha elegido  $y_{11}(s)$  como inmitancia de síntesis. Ambas 217. La utilización de la otra solución resultaría en el mismo circuito, con la segunda puerta definida con un criterio de signo inverso al habitual. En realidad, ambas soluciones son la misma.

tienen el mismo orden y ninguna tiene polos privados, por lo que podíamos haber elegido cualquiera de las dos<sup>218</sup>. Nótese que hemos cumplido las condiciones del primer teorema de Bader a todas las frecuencias salvo en infinito, donde teníamos un polo compartido no compacto (y por tanto un cero de transmisión como se indica en la Fig. 4.25). Puesto que infinito sí es polo de la inmitancia de síntesis, los parámetros de inmitancia realizados tendrán también un polo compartido no compacto en infinito. No podemos saber si la realización es válida hasta que hagamos los cálculos de la inmitancia de la otra puerta realizada y la comparemos con la prescrita justamente a esa frecuencia (es decir, que comparemos sus residuos en infinito). Si “hay suerte” podremos añadir una rama de admitancia en la puerta 2 para hacer el polo en infinito realizado “igual de no-compacto” que el prescrito.

Los cálculos son los siguientes,

$$y_{11}(s) = \frac{21s^2 + 1}{3s} \quad (4.358)$$

$$k_1 = \frac{y_{11}}{s} \Big|_{s^2 = -1/18} = 1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 1 \quad (4.359)$$

$$y_2 = y_{11} - k_1 s = \frac{18s^2 + 1}{3s} \quad (4.360)$$

que efectivamente tiene cero en  $s^2 = -1/18$ .

$$z_2 = \frac{3s}{18s^2 + 1} \quad (4.361)$$

$$z_2 = \frac{3s}{18s^2 + 1} = \frac{\frac{3}{18}s}{s^2 + \frac{1}{18}} \quad (4.362)$$

218. En realidad, se puede elegir cualquiera de las dos aunque haya diferencia de orden y polos privados (ambas cosas ocurren juntas).

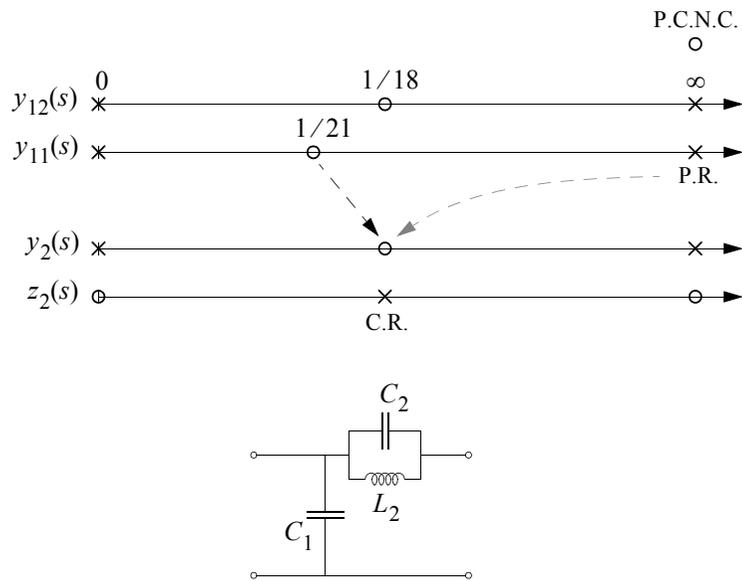


Figura 4.25: Diagrama polo-cero y topología de circuito correspondiente. El eje es de frecuencias al cuadrado.

$$\begin{aligned}
 K_2 = \frac{3}{18} \\
 \omega_2^2 = \frac{1}{18}
 \end{aligned}
 \Rightarrow
 \begin{cases}
 C_2 = \frac{1}{K_2} = 6 \\
 L_2 = \frac{K_2}{\omega_2^2} = 3
 \end{cases}
 \quad (4.363)$$

En resumen, los elementos valen,

$$C_1 = 1 \quad C_2 = 6 \quad L_2 = 3 \quad (4.364)$$

Veamos ahora si hace falta transformador. Vamos a evaluar, por ejemplo, a altas frecuencias. La transadmitancia prescrita valdrá

$$y_{12_{\text{PRESCRITA}}} \Big|_{s \rightarrow \infty} \rightarrow -18s \quad (4.365)$$

mientras que la realizada, es fácil ver que coincide con la admitancia de  $C_2$

(cambiada de signo), es decir,

$$y_{12_{\text{REALIZADA}}} \Big|_{s \rightarrow \infty} \rightarrow -C_2s = -6s \quad (4.366)$$

lo que quiere decir que en este caso sí hace falta transformador, de constante<sup>219</sup>

$$K = \frac{y_{12_{\text{REALIZADA}}}}{y_{12_{\text{PRESCRITA}}}} = \frac{-6s}{-18s} = \frac{1}{3} \quad (4.367)$$

El resultado se muestra en la Fig. 4.26. Veamos ahora si la realización es válida. Para ello calculamos la  $y_{22}(s)$  realizada y la comparamos con la prescrita. Basta con que lo hagamos a la frecuencia del polo no compacto, es decir, en infinito.

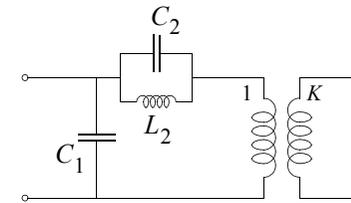


Figura 4.26: Topología de la bipuerta tras añadir el transformador.

A la izquierda del transformador, la admitancia vista desde la (antigua) segunda puerta con la primera cortocircuitada es la del circuito paralelo compuesto por  $C_2$  y  $L_2$ . A alta frecuencia domina  $C_2$ , por lo que tendríamos una admitancia de la otra puerta (antigua) dada por

$$y_{22} \Big|_{\text{ANTIGUA}, s \rightarrow \infty} = sC_2 = 6s \quad (4.368)$$

219. Recuérdese que nuestro convenio es que la constante siempre corresponde a la ganancia en tensión de la segunda puerta del transformador (la que quedará mirando hacia fuera de la bipuerta, constituyendo la nueva segunda bipuerta) respecto a la primera puerta del transformador (la que queda mirando hacia adentro, conectada a la antigua puerta 2 de la bipuerta).

Esta admitancia, vista desde la derecha del transformador (la nueva y verdadera  $y_{22}(s)$  realizada) será

$$y_{22}|_{\text{REALIZADA}, s \rightarrow \infty} = \frac{1}{K^2} y_{22}|_{\text{ANTIGUA}, s \rightarrow \infty} = \frac{sC_2}{K^2} = 54s \quad (4.369)$$

En cuanto a la prescrita,

$$y_{22}|_{\text{PRESCRITA}, s \rightarrow \infty} = \left. \frac{72s^2 + 3}{s} \right|_{s \rightarrow \infty} = 72s \quad (4.370)$$

y por tanto,

$$\begin{aligned} \Delta y_{22}(s) &= y_{22}|_{\text{PRESCRITA}, s \rightarrow \infty} - y_{22}|_{\text{REALIZADA}, s \rightarrow \infty} = \\ &= 72s - 54s = 18s \end{aligned} \quad (4.371)$$

que afortunadamente tiene residuo positivo, por lo que la realización sí es válida. Para añadir la admitancia restante de la segunda puerta bastará por tanto añadir un condensador de valor

$$C_3 = 18 \quad (4.372)$$

en paralelo con la segunda puerta, tal como se muestra en la Fig. 4.27. Esta misma figura muestra el resultado que se obtendría al pasar las admitancias que están a la derecha del transformador, a la izquierda. Es fácil obtener los nuevos valores,

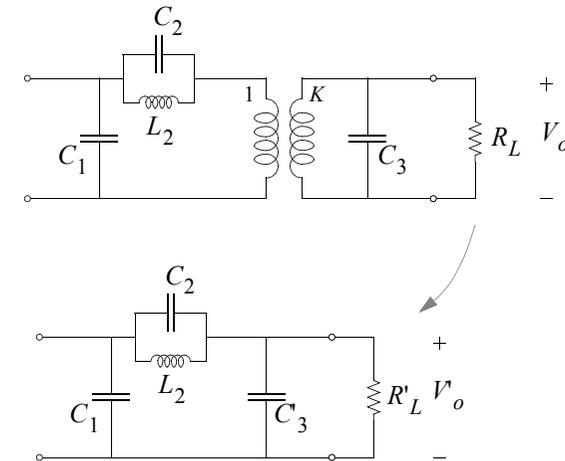
$$C'_3 = K^2 C_3 = \frac{18}{9} = 2 \quad (4.373)$$

$$R'_L = \frac{1}{K^2} R_L = 9R_L \quad (4.374)$$

$$V'_o = \frac{1}{K} V_o = 3V_o \quad (4.375)$$

lo que supondría en este caso ( $K < 1$ ) un aumento de la resistencia de carga y de la ganancia en tensión. El transformador, que quedaría en circuito abi-

erto tras pasar todas las ramas paralelo a su izquierda, no tiene ningún efecto y puede ser eliminado (este era el objetivo). Con esto queda terminado el problema.



**Figura 4.27: Topología de la bipuerta tras añadir la inmitancia de la otra puerta restante, y tras eliminar el transformador.**

### Ejercicio

**4.14.** Diseñar una escalera LC que implemente un filtro paso de banda con las especificaciones siguientes. La banda pasante es máximamente plana y está comprendida en  $900\text{Hz} \leq f \leq 1200\text{Hz}$  con  $A_p \leq 3\text{dB}$ . Tiene al menos un cero de transmisión en  $f_{z1} = 1582.48\text{Hz}$ . La atenuación a altas frecuencias crece al menos con  $20\text{dB/década}$ . Las resistencias de

fuerza y de carga son  $R_S = R_L = 3K\Omega$ .

Obtener el filtro paso de banda a partir de la transformación de la escalera LC que implementa el filtro paso de baja prototipo. Transformar la escalera resultante de forma que los ceros de transmisión del filtro paso de banda se puedan controlar independientemente

### Solución detallada

Los pasos a seguir son los siguientes: obtener las especificaciones del paso de baja prototipo (normalizadas), obtener (aproximar) la función de transferencia del LPP y también su función característica, obtener los parámetros de inmitancia de la bipuerta del LPP, sintetizar la bipuerta del LPP, transformar la bipuerta del LPP en la bipuerta normalizada del filtro BP, modificando lo necesario para poder controlar de forma independiente los ceros, y finalmente, desnormalizar los elementos del filtro RLC paso de banda.

Tomamos como frecuencia central del filtro paso de banda,

$$f_0 = \sqrt{900 \cdot 1200} \text{Hz} = 1039.2305 \text{Hz} \quad (4.376)$$

$$\omega_0 = 2\pi\sqrt{900 \cdot 1200} \text{rad/s} = 6529.6777 \text{rad/s}$$

y como ancho de banda

$$\Delta f = 1200 \text{Hz} - 900 \text{Hz} = 300 \text{Hz} \quad (4.377)$$

$$B = 2\pi(1200 - 900) \text{rad/s} = 1884.9556 \text{rad/s}$$

Como no nos especifican el valor de los límites de las bandas de rechazo, ni mínimos de atenuación en ellas, no hay necesidad de redefinir las especificaciones. Si nos indican la frecuencia de un cero de transmisión en la banda de rechazo superior. Podemos calcular su posición en el prototipo paso de baja normalizado utilizando la transformación en frecuencia de LPP a BP (desnormalizada en frecuencia),

$$s = \frac{p^2 + \omega_0^2}{pB} \quad (4.378)$$

o lo que es lo mismo, haciendo  $s = j\omega$  y  $p = j\Omega$ ,

$$j\omega = \frac{-\Omega^2 + \omega_0^2}{j\Omega B} \Rightarrow \omega = \frac{\Omega^2 - \omega_0^2}{\Omega B} \quad (4.379)$$

que para  $\Omega_z = 2\pi 1582.48 \text{rad/s} = 9943.0151 \text{rad/s}$ , resulta en

$$\omega_z = 3.0000 \quad (4.380)$$

Necesitamos por tanto un LPP máximamente plano en la banda pasante, con  $A_p \leq 3 \text{dB}$  y un cero de transmisión en  $\omega_z = 3$ . La atenuación a altas frecuencias debe crecer al menos con  $20 \text{dB/dec}$ . No nos especifican ni el borde de la banda ni la atenuación mínima en la banda de rechazo.

Puesto que tenemos (al menos) un cero de transmisión finito, y una atenuación a altas frecuencias de  $20 \text{dB/dec}$ , el orden debe ser como mínimo

$$n = 3 \quad (4.381)$$

Si intentamos una aproximación máximamente plana genérica, nos encontraremos con la necesidad de encontrar las raíces de un polinomio de 6 orden (de tercer orden en  $s^2$ ) para separar  $D(s)$  y  $D(-s)$ . Una alternativa es recurrir a la utilización de un chebishev inverso, que es un caso particular de aproximaciones máximamente planas con cero(s) de transmisión finitos, y que además podemos resolver analíticamente. El crecimiento de la atenuación a altas frecuencias ( $20 \text{dB/dec}$ ) es compatible con filtros chebishev inversos de orden impar, lo que se corresponde bien con el orden mínimo determinado previamente. Buscaremos por tanto un chebishev inverso de orden 3.

Las funciones de transferencia de los filtros chebishev inversos, en la forma habitual, están normalizadas respecto al borde de la banda de rechazo, mientras que la posición del cero de transmisión  $\omega_z = 3$  ha sido calculada para un LPP normalizado respecto al borde de la banda de paso, como es ha-

bitual. Por tanto, la posición del cero de transmisión en el filtro chebishev inverso será

$$\omega_{z_{CI}} = \frac{\omega_{z_{LPP}}}{\omega_s} = \frac{3}{\omega_s} \quad (4.382)$$

donde  $\omega_s$  es el factor de selectividad del filtro chebishev inverso (que es el mismo que el del LPP o del PB que buscamos).

La posición de los ceros de transmisión de los chebishev inversos (normalizados respecto al borde de la banda de rechazo) es la inversa de los ceros de reflexión de los chebishev directos (normalizados respecto al borde de la banda de paso) de los que se derivan. La posición de estos ceros de reflexión está dada por

$$\omega_{r_k} = \cos\left(\frac{2k+1}{n}\pi\right) \quad k = 0, \dots, n-1 \quad (4.383)$$

en nuestro caso, con  $n = 3$ ,

$$\begin{aligned} \omega_{r_0} &= \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \omega_{r_1} &= \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \\ \omega_{r_2} &= \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned} \quad (4.384)$$

y los ceros de transmisión del chebishev inverso,

$$\begin{aligned} \omega_{z_{0,2}} &= \frac{1}{\omega_{r_{0,2}}} = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \\ \omega_{z_1} &= \frac{1}{\omega_{r_1}} = \infty \end{aligned} \quad (4.385)$$

Igualando el único valor finito con (4.382), tenemos

$$\omega_s = \frac{3\sqrt{3}}{2} = 2.5980762 \quad (4.386)$$

Este valor será necesario, aparte de para conseguir que el cero de transmisión esté en la posición especificada, para renormalizar la función de transferencia del chebishev inverso de manera que quede normalizado respecto al borde de la banda pasante, como es habitual en los prototipos paso de baja.

Ahora debemos obtener la función de transferencia del filtro chebishev inverso. Lo primero es obtener los polos del chebishev directo del que deriva, para lo que necesitamos conocer su  $\varepsilon$ , que llamaremos ( $\varepsilon_{CD}$ ). Este se obtiene, como sabemos, de

$$\varepsilon_{CD} = \frac{1}{\varepsilon_{CI} C_3(\omega_s)} \quad (4.387)$$

donde  $\varepsilon_{CI}$  es el correspondiente a nuestro filtro objetivo (que es chebishev inverso),

$$\varepsilon_{CI} = \varepsilon_{\text{Objetivo}} = \sqrt{10^{\frac{A_p}{10}} - 1} = \sqrt{10^{0.3} - 1} = 0.9976283 \quad (4.388)$$

Por otra parte<sup>220</sup>,

$$C_3(\omega) = 4\omega^3 - 3\omega \quad (4.389)$$

y evaluando en  $\omega_s$ ,

$$C_3(\omega_s) = 62.353829 \quad (4.390)$$

De donde,

$$\varepsilon_{CD} = \frac{1}{\varepsilon_{CI} C_3(\omega_s)} = 0.01607563 \quad (4.391)$$

220. La obtención de este polinomio puede hacerse de múltiples maneras: a partir de una tabla, a partir de la expresión de los ceros de reflexión del chebishev directo y de la constante del coeficiente, o a partir de la ley recursiva en función de los dos polinomios de chebishev de orden inmediatamente inferior.

Ahora, los polos del chebishev directo están dados por

$$s_k = -\alpha \sin\left(\frac{2k+1}{n} \frac{\pi}{2}\right) + j\beta \cos\left(\frac{2k+1}{n} \frac{\pi}{2}\right) \quad (4.392)$$

$$k = 0, 1, 2$$

con

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(\xi - \frac{1}{\xi}\right) \quad \beta = \frac{1}{2}\left(\xi + \frac{1}{\xi}\right) \quad (4.393)$$

$$\xi(\epsilon, n) = \left(\frac{1}{\epsilon} + \sqrt{\frac{1}{\epsilon^2} + 1}\right)^{\frac{1}{n}}$$

donde lógicamente  $\epsilon = \epsilon_{CD}$ . En nuestro caso,

$$\xi(\epsilon, n) = 4.9922537 \quad (4.394)$$

y

$$\alpha = 2.3959717 \quad \beta = 2.596282 \quad (4.395)$$

Los polos son, entonces

$$s_0 = -\alpha \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + j\beta \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$s_1 = -\alpha \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + j\beta \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\alpha \quad (4.396)$$

$$s_2 = -\alpha \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) + j\beta \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\alpha \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) - j\beta \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

dónde se ha utilizado que <sup>221</sup>

$$\cos(\pi - x) = -\cos(x) \quad (4.397)$$

y finalmente,

221. De aquí se deduce que sólo es necesario calcular la mitad (uno más o menos, según sea de orden par o impar) de los polos, ya que aparecen siempre por pares complejos conjugados.

$$s_{0,2} = -1.1979858 \pm j2.2484462$$

$$s_1 = -2.3959717 \quad (4.398)$$

Los polos del chebishev inverso son los inversos,

$$s'_{0,2} = -0.18457015 \pm j0.34641148$$

$$s'_1 = -0.4173672 \quad (4.399)$$

y el denominador del chebishev inverso será

$$D(s) = K \prod_{i=1}^3 (s - s'_i) = \quad (4.400)$$

$$= K((s + 0.18457015)^2 + 0.34641148^2)(s + 0.4173672) =$$

$$= K(s^3 + 0.7865075s^2 + 0.30813411s + 0.06430254)$$

El numerador tendrá el cero de transmisión finito, que como hemos visto estará situado (normalizado respecto al borde de la banda de rechazo) en

$$\omega_{z_{Cl}} = \frac{\omega_{z_{LPP}}}{\omega_s} = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad (4.401)$$

es decir que,

$$N(s) = s^2 + 4/3 \quad (4.402)$$

La función de transferencia será, obviamente

$$D(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (4.403)$$

La constante multiplicativa (el coeficiente de la potencia de mayor orden) del denominador la podemos obtener de

$$H(0) = 1 = \frac{4/3}{K0.06430254} \Rightarrow K \quad K = 20.735315 \quad (4.404)$$

de donde,

$$D(s) = 20.735315s^3 + 16.308481s^2 + 6.3892578s + 4/3 \quad (4.405)$$

La función característica será,

$$K(s) = \frac{\hat{F}(s)}{N(s)} \quad (4.406)$$

En nuestro caso, tenemos tres ceros de reflexión en cero, y el orden de  $\hat{F}(s)$  es mayor que el de  $N(s)$ , por lo que el coeficiente de mayor orden de  $\hat{F}(s)$  es igual al de  $D(s)$ . Por tanto<sup>222</sup>,

$$\hat{F}(s) = 20.735315s^3 \quad (4.407)$$

Ahora normalizamos las funciones respecto al borde de la banda pasante, que es como suelen emplearse los paso de baja prototipo<sup>223</sup>

$$H_{LPP}(s') = H_{CI}(s) \Big|_{s = \frac{s'}{\omega_s}} \quad (4.408)$$

usando  $\omega_s = (3\sqrt{3})/2 = 2.5980762$ , y cambiando ya la notación de la variable de frecuencia compleja,

$$H_{LPP}(s) = \frac{s^2 + 9}{7.9810265s^3 + 16.308481s^2 + 16.599779s + 9} \quad (4.409)$$

de la misma manera

$$K_{LPP}(s') = K_{CI}(s) \Big|_{s = \frac{s'}{\omega_s}} = \frac{7.9810265s'^3}{s'^2 + 9} \quad (4.410)$$

y cambiando la notación

$$K_{LPP}(s) = \frac{7.9810265s^3}{s^2 + 9} \quad (4.411)$$

Es decir, que los polinomios del prototipo paso de baja (normalizado respec-

222. Aquí hay una doble opción de signo para  $F(s)$ , que resulta en circuitos duales.

Tomamos aquí el signo positivo, por tomar alguno. Puede hacerse el ejercicio de tomar el contrario para obtener el circuito dual.

223. No es necesario hacer aquí este paso, que podría realizarse al final junto con la transformación de la escalera.

to al borde de la banda de paso) son<sup>224</sup>

$$N(s) = s^2 + 9 \quad (4.412)$$

$$D(s) = 7.9810265s^3 + 16.308481s^2 + 16.599779s + 9 \quad (4.413)$$

$$\hat{F}(s) = 7.9810265s^3 \quad (4.414)$$

Descomponiendo los polinomios en partes par e impar,

$$N(s) = N_p(s) = s^2 + 9 \quad (4.415)$$

$$D_p(s) = 16.308481s^2 + 9 \quad (4.416)$$

$$D_i(s) = 7.9810265s^3 + 16.599779s \quad (4.417)$$

$$\hat{F}(s) = \hat{F}_i(s) = 7.9810265s^3 \quad (4.418)$$

Nótese que  $N(s)$  es par (como en todos los paso de baja), y que  $\hat{F}(s)$  es impar (paridad contraria a  $N(s)$ ), lo que quiere decir, junto con el hecho de que  $R_S = R_L$  en nuestro caso, que la bipuerta será simétrica (además de recíproca).

Los parámetros de inmitancia, que vamos a normalizar en impedancia respecto a

$$R_o = R_S = R_L = 3K\Omega \quad (4.419)$$

están dados por las expresiones obtenidas previamente, que tras realizar la normalización en impedancia resultan en

224. Una buena medida para detectar errores en este momento es comprobar que  $|D(j\omega)|^2$  y  $|N(j\omega)|^2 + |\hat{F}(j\omega)|^2$  coinciden.

$$z_{11}(s) = z_{22}(s) = \frac{D_p(s)}{D_i(s) + \hat{F}_i(s)} = 1.0217032 \frac{s^2 + 0.55186011}{s(s^2 + 1.0399526)} \quad (4.420)$$

$$z_{12}(s) = \frac{N(s)}{D_i(s) + \hat{F}_i(s)} = 0.06264858 \frac{s^2 + 9}{s(s^2 + 1.0399526)}$$

$$y_{11}(s) = y_{22}(s) = \frac{D_p(s)}{D_i(s) - \hat{F}_i(s)} = 0.9824517 \frac{s^2 + 0.55186011}{s} \quad (4.421)$$

$$y_{12}(s) = -\frac{N(s)}{D_i(s) - \hat{F}_i(s)} = -0.06024177 \frac{s^2 + 9}{s}$$

En ambos casos, los polos son todos compartidos. En los parámetros de impedancia, la transinmitancia tiene cero tanto en  $s^2 = -9$  como en infinito, por lo que es de esperar que todos los polos sean compartidos compactos, ya que los ceros de transmisión han sido ya creados por ceros de la transinmitancia. En los parámetros de admitancia, la transinmitancia sólo tiene cero en  $s^2 = -9$ , por lo que es de esperar que el polo en infinito sea no compacto.

Hagamos la comprobación. Para los parámetros de impedancia,

$$k_{z_{11},0} = k_{z_{22},0} = [z_{11}(s)s] \Big|_{s=0} = 0.5421759 \quad (4.422)$$

$$k_{z_{12},0} = [z_{12}(s)s] \Big|_{s=0} = 0.5421759$$

$$K_{z_{11},1} = K_{z_{22},1} = \left[ z_{11}(s) \frac{s^2 + 1.0399526}{s} \right] \Big|_{s^2 = -1.0399526} = 0.47952731 \quad (4.423)$$

$$K_{z_{12},1} = \left[ z_{12}(s) \frac{s^2 + 1.0399526}{s} \right] \Big|_{s^2 = -1.0399526} = -0.47952732$$

es decir, que efectivamente, ambos polos son compartidos compactos. En cuanto a los parámetros de admitancia,

$$k_{y_{11},0} = k_{y_{22},0} = [y_{11}(s)s] \Big|_{s=0} = 0.5421759 \quad (4.424)$$

$$k_{y_{12},0} = [y_{12}(s)s] \Big|_{s=0} = -0.5421759$$

$$k_{y_{11},\infty} = k_{y_{22},\infty} = \frac{y_{11}(s)}{s} \Big|_{s \rightarrow \infty} = 0.9824517 \quad (4.425)$$

$$k_{y_{12},\infty} = \frac{y_{12}(s)}{s} \Big|_{s \rightarrow \infty} = -0.06024177$$

es decir, que como esperábamos el polo en cero es compacto, pero el polo en infinito es compartido no compacto.

En general, se recomienda elegir para la síntesis los parámetros de impedancia que tengan mayor orden, por lo que elegiremos los parámetros de impedancia<sup>225</sup>. Las dos impedancias son iguales (la bipuerta es simétrica), por lo que da igual cual de las dos escoger como impedancia de síntesis (es únicamente una cuestión de nombre). Digamos que elegimos  $z_{11}(s)$ .

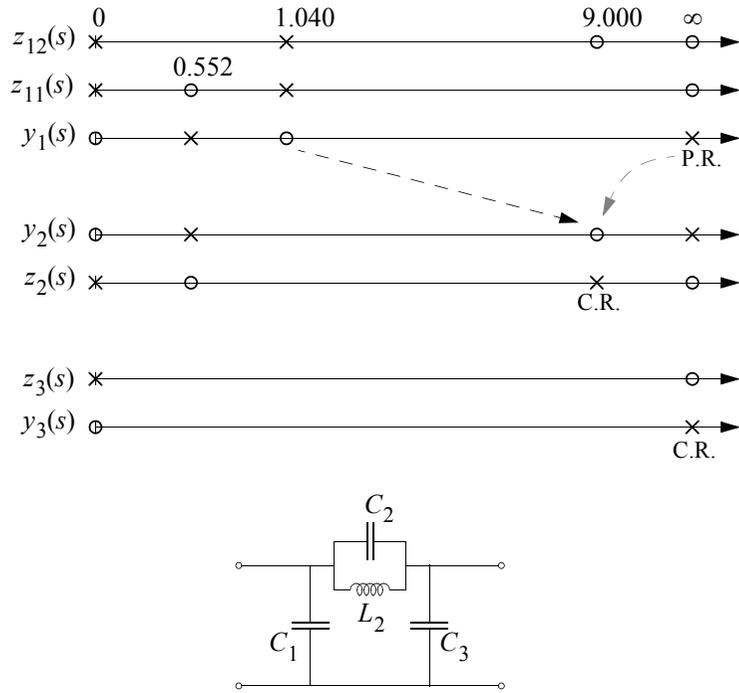
La Fig. 4.28 muestra el diagrama polo-cero que resulta y la topología de la bipuerta correspondiente con los nombres de los elementos. Nótese que se han cumplido las condiciones del primer teorema de Bader a todas las frecuencias, y los polos prescritos eran todos compartidos compactos. Por tanto, sólo nos falta hacer los cálculos y comprobar si necesitamos o no un transformador (poco probable, por ser la bipuerta simétrica).

Veamos los cálculos.

$$z_{11}(s) = 1.0217032 \frac{s^2 + 0.55186011}{s(s^2 + 1.0399526)} \quad (4.426)$$

$$y_1(s) = 0.97875781 \frac{s(s^2 + 1.0399526)}{s^2 + 0.55186011} \quad (4.427)$$

225. Un buen ejercicio sería repetir la síntesis utilizando los parámetros de admitancia.



**Figura 4.28: Diagrama polo-cero y topología de circuito correspondiente al prototipo paso de baja. Eje de frecuencias al cuadrado.**

$$k_1 = \left. \frac{y_1(s)}{s} \right|_{s^2 = -9} = 0.92220994 \quad (4.428)$$

$$C_1 = k_1 = 0.92220994 \quad (4.429)$$

$$y_2(s) = y_1(s) - k_1 s = 0.05654787 \frac{s(s^2 + 9)}{s^2 + 0.55186011} \quad (4.430)$$

$$z_2(s) = \frac{1}{0.05654787} \frac{s^2 + 0.55186011}{s(s^2 + 9)} \quad (4.431)$$

$$K_2 = \left[ z_2(s) \frac{s^2 + 9}{s} \right] \Big|_{s^2 = -9} = 16.599779 \quad (4.432)$$

$$C_2 = \frac{1}{K_2} = \frac{1}{16.599779} = 0.06024177 \quad (4.433)$$

$$L_2 = \frac{K_2}{\omega_2^2} = \frac{16.599779}{9} = 1.8444199$$

$$z_3(s) = z_2(s) - \frac{K_2 s}{s^2 + 9} = \frac{1.0843518}{s} \quad (4.434)$$

$$y_3(s) = \frac{1}{1.0843518} s = 0.92220991 s \quad (4.435)$$

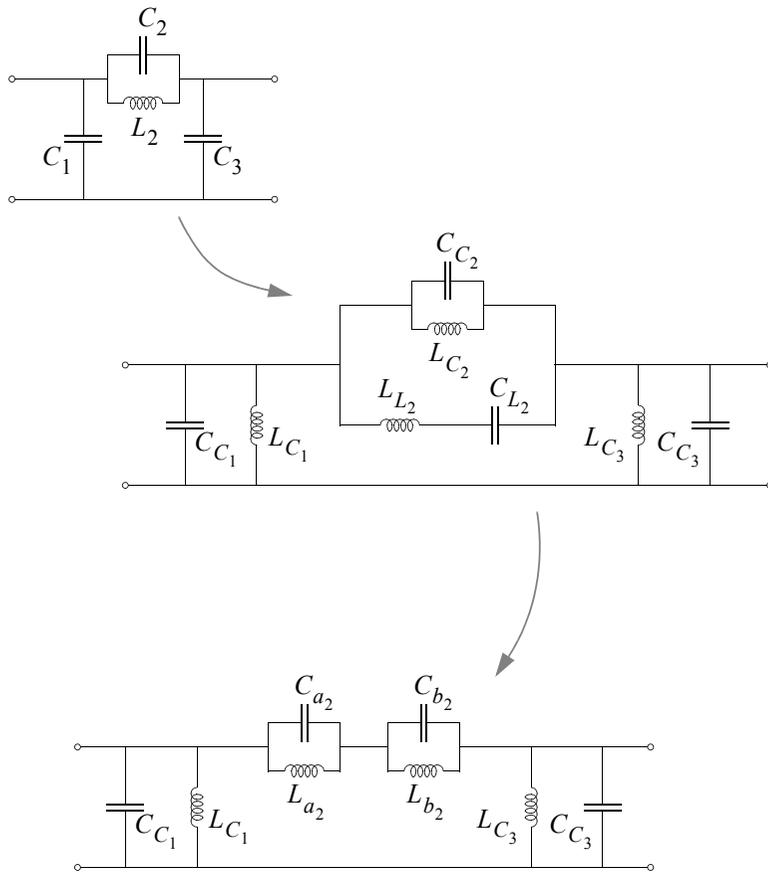
$$k_3 = \left. \frac{y_3(s)}{s} \right|_{s \rightarrow \infty} = 0.92220991 \quad (4.436)$$

$$C_3 = k_3 = 0.92220991 \quad (4.437)$$

La red también es simétrica en cuanto a valores de los elementos, por tanto, no hará falta transformador (se rompería la simetría).

Veamos la transformación a paso de banda. La Fig. 4.29 muestra la transformación de la bipuerta correspondiente al LPP en la bipuerta correspondiente al paso de banda, introduciendo la notación para los nuevos elementos. Para obtener sus valores, debemos obtener el valor del “factor de calidad” del filtro paso de banda,

$$Q = \frac{\omega_0}{B} = \frac{6529.6777 \text{ rad/s}}{1884.9556 \text{ rad/s}} = 3.4641016 \quad (4.438)$$



**Figura 4.29: Transformación de la bipuerta LPP a la BP, y modificación para control independiente de los ceros de transmisión.**

Los valores de los elementos son por tanto,

$$\begin{aligned} C_{C_1} &= QC_1 = 3.1946289 \\ L_{C_1} &= \frac{1}{QC_1} = 0.3130254 \end{aligned} \quad (4.439)$$

$$\begin{aligned} C_{C_2} &= QC_2 = 0.20868361 \\ L_{C_2} &= \frac{1}{QC_2} = 4.7919431 \end{aligned} \quad (4.440)$$

$$C_{L_2} = \frac{1}{QL_2} = 0.1565127 \quad (4.441)$$

$$L_{L_2} = QL_2 = 6.3892579$$

$$C_{C_3} = QC_3 = 3.1946288$$

$$L_{C_3} = \frac{1}{QC_3} = 0.31302541 \quad (4.442)$$

Estos elementos están normalizados en impedancia respecto a  $R_o = R_S = R_L = 3\text{K}\Omega$  y en frecuencia respecto a  $\omega_0 = 6529.6777\text{rad/s}$ .

Sólo faltaría calcular los valores de los “elementos de normalización” y desnormalizar los valores de cada uno de elementos, si no fuera porque nos piden que hagamos la realización en escalera del filtro paso de banda de manera que se puedan controlar los ceros de transmisión (finitos) de forma independiente.

Esto puede conseguirse modificando la estructura de la “rama serie” que implementa los ceros de transmisión en la bipuerta obtenida tras la transformación a BP (parte central de la Fig. 4.29). Es fácil ver que es esta rama la que crea ambos ceros de transmisión finitos (uno en cada banda de rechazo) porque esta estructura es la transformada de la rama serie del LPP compuesta por la asociación en paralelo de  $C_2$  y  $L_2$  (parte alta de la Fig. 4.29). La bipuerta reflejada en la parte inferior de la Fig. 4.29 muestra la topología que se quiere obtener, en la que sólo cambia la “rama serie” en cuestión. Cada uno de los circuitos resonantes LC en paralelo será responsable de uno de los ceros de transmisión, que podrán así ser “ajustados” de forma independiente con facilidad.

El cálculo de los valores de los nuevos elementos puede hacerse de varias maneras. Todas ellas se basan en comparar las expresiones de las impedancias de las dos topologías de la rama serie encargada de realizar ambos ceros de transmisión internos, en función de los valores de sus elementos. Además, podemos utilizar el conocimiento sobre los valores de las frecuencias de los ceros de transmisión.

La impedancia de la rama serie en la forma en que resulta de la transformación LPP a BP es,

$$Z_1(s) = \frac{1}{sC_{C_2} + \frac{1}{sL_{C_2}} + \frac{1}{sL_{L_2} + \frac{1}{sC_{L_2}}} \quad (4.443)$$

mientras que la impedancia de la topología que permite el control independiente de los ceros es

$$\begin{aligned} Z_2(s) &= \frac{1}{sC_{a_2} + \frac{1}{sL_{a_2}}} + \frac{1}{sC_{b_2} + \frac{1}{sL_{b_2}}} = \\ &= \frac{\frac{1}{C_{a_2}}s}{s^2 + \frac{1}{L_{a_2}C_{a_2}}} + \frac{\frac{1}{C_{b_2}}s}{s^2 + \frac{1}{L_{b_2}C_{b_2}}} \end{aligned} \quad (4.444)$$

Evidentemente, ambas expresiones deben ser iguales para mantener las características de la bipuerta, y con ellas las del filtro diseñado.

Una posibilidad es igualar ambas expresiones, igualando coeficientes del mismo orden y resolver el sistema de ecuaciones. Esta forma es engorrosa. Otra alternativa es calcular el valor de los polos y sus residuos en la expresión de  $Z_1(s)$  e igualarlos con los que tenemos directamente en la expresión de  $Z_2(s)$ . Esta forma también es algo engorrosa, sobre todo en lo referente al cálculo de las frecuencias de los polos de impedancia. Sin embargo,

estos polos de impedancia deben coincidir con los ceros de transmisión internos, cuyos valores podemos obtener fácilmente. Recordemos que, tras la aplicación de la transformación LPP a BP, el nuevo circuito está normalizado en frecuencia (también en impedancia) con respecto a la frecuencia central (geoméricamente) de la banda pasante  $\omega_0 = 6529.6777 \text{ rad/s}$ , es decir,  $f_0 = 1039.2305 \text{ Hz}$ , por lo que el valor de la frecuencia del cero de transmisión de la banda de rechazo superior puede obtenerse a partir de  $\Omega_{z_2} = 9943.0151 \text{ rad/s}$ , es decir,  $f_{z_2} = 1582.48 \text{ Hz}$ , como<sup>226</sup>

$$\omega_{z_2} = \frac{\Omega_{z_2}}{\omega_0} = \frac{f_{z_2}}{f_0} = 1.5227421 \quad (4.445)$$

El valor de la frecuencia del otro cero de transmisión, el de la banda de rechazo inferior, podemos obtenerlo por simetría geométrica,

$$\Omega_{z_1} = \frac{\omega_0^2}{\Omega_{z_2}} = \frac{f_0^2}{f_{z_2}} \quad (4.446)$$

normalizando después, o directamente en las frecuencias normalizadas,

$$\omega_{z_1} = \frac{1}{\omega_{z_2}} = 0.65671003 \quad (4.447)$$

Tendremos por tanto que, por ejemplo,<sup>227</sup>

$$\begin{aligned} \frac{1}{L_{a_2}C_{a_2}} = \omega_{z_1}^2 &\Rightarrow L_{a_2}C_{a_2} = \frac{1}{\omega_{z_1}^2} \\ \frac{1}{L_{b_2}C_{b_2}} = \omega_{z_2}^2 &\Rightarrow L_{b_2}C_{b_2} = \frac{1}{\omega_{z_2}^2} \end{aligned} \quad (4.448)$$

y

226. Hay varias formas alternativas de calcular los valores de estos ceros de transmisión. Otra de ellas es a partir del valor del cero de transmisión finito en el LPP y la expresión de la transformación LPP a BP normalizada en frecuencia.

227. La asignación de cada uno de los ceros al primer o segundo circuito resonante es arbitraria.

$$K_1 = \left[ Z_2(s) \frac{s^2 + \omega_{z_1}^2}{s} \right] \Big|_{s^2 = -\omega_{z_1}^2} = \frac{1}{C_{a_2}} \quad (4.449)$$

$$K_2 = \left[ Z_2(s) \frac{s^2 + \omega_{z_2}^2}{s} \right] \Big|_{s^2 = -\omega_{z_2}^2} = \frac{1}{C_{b_2}}$$

Ahora podemos calcular los valores de los residuos a partir de las expresiones de  $Z_1(s)$ . Pero antes conviene expresar  $Z_1(s)$  como

$$Z_1(s) = \frac{1}{\frac{1}{C_{C_2}} + \frac{1}{L_{L_2} \left( s^2 + \frac{1}{L_{L_2} C_{C_2}} \right)}} = \frac{1}{\frac{1}{C_{C_2}} + \frac{1}{L_{L_2} \left( s^2 + \frac{1}{L_{L_2} C_{C_2}} \right)}} \quad (4.450)$$

$$= \frac{1}{C_{C_2} \left( s^2 + \frac{1}{L_{L_2} C_{C_2}} \right) + L_{L_2}} = \frac{1}{C_{C_2} \left( s^2 + \frac{1}{L_{L_2} C_{C_2}} \right) + L_{L_2}}$$

o también

$$Z_1(s) = \frac{1}{C_{C_2} s^2 + s^2 (2 + C_{L_2} L_{C_2}) + 1} = \frac{L_{C_2} (s^2 + 1)s}{(s^2 + \omega_{z_1}^2)(s^2 + \omega_{z_2}^2)} \quad (4.451)$$

donde se ha utilizado el hecho de que, tal como resultan de la transformación LPP a BP normalizada, el producto de la bobina y el condensador provenientes de un mismo elemento del LPP es igual a la unidad, y también el conocimiento de que los polos de  $Z_1(s)$  y de  $Z_2(s)$  deben ser los mismos<sup>228</sup>. Ahora podemos calcular fácilmente el valor de los residuos a partir de la ex-228. La comprobación puede hacerse resolviendo la ecuación de segundo grado en  $s^2$  del denominador, del que se conocen todos los valores numéricos.

presión de  $Z_1(s)$

$$K_1 = \left[ Z_1(s) \frac{s^2 + \omega_{z_1}^2}{s} \right] \Big|_{s^2 = -\omega_{z_1}^2} = \frac{L_{C_2} (s^2 + 1)s}{(s^2 + \omega_{z_1}^2)(s^2 + \omega_{z_2}^2)} \Big|_{s^2 = -\omega_{z_1}^2} = \frac{L_{C_2} (s^2 + 1)}{(s^2 + \omega_{z_2}^2)} \Big|_{s^2 = -\omega_{z_1}^2} = L_{C_2} \frac{(1 - \omega_{z_1}^2)}{(\omega_{z_2}^2 - \omega_{z_1}^2)} = 1.4439028 \quad (4.452)$$

y de la misma manera,

$$K_2 = \left[ Z_1(s) \frac{s^2 + \omega_{z_2}^2}{s} \right] \Big|_{s^2 = -\omega_{z_2}^2} = L_{C_2} \frac{(1 - \omega_{z_2}^2)}{(\omega_{z_1}^2 - \omega_{z_2}^2)} = 3.3480403 \quad (4.453)$$

Ahora ya, igualando con (4.449) y a partir de (4.448) tenemos,

$$C_{a_2} = \frac{1}{K_1} = \frac{1}{1.4439028} = 0.69256738$$

$$C_{b_2} = \frac{1}{K_2} = \frac{1}{3.3480403} = 0.29868219$$

$$L_{a_2} = \frac{1}{C_{a_2} \omega_{z_1}^2} = \frac{K_1}{\omega_{z_1}^2} = \frac{1.4439028}{0.43126806} = 3.3480403 \quad (4.454)$$

$$L_{b_2} = \frac{1}{C_{b_2} \omega_{z_2}^2} = \frac{K_2}{\omega_{z_2}^2} = \frac{3.3480403}{2.3187435} = 1.4439028$$

En definitiva, ya tenemos todos los valores de los elementos de la bi-puerta mostrada en la parte inferior de la Fig. 4.29. Sólo falta desnormalizarlos, para lo que recordamos que estos elementos están normalizados en impedancia respecto a

$$R_o = R_S = R_L = 3\text{K}\Omega \quad (4.455)$$

y en frecuencia respecto a la frecuencia central del filtro paso de banda objetivo,

$$\omega_0 = 6529.6777\text{rad/s} \quad (4.456)$$

y por tanto, los elementos de normalización son

$$R_0 = 3\text{K}\Omega$$

$$C_0 = \frac{1}{\Omega_0 R_0} = 51.048972\text{nF} \quad (4.457)$$

$$L_0 = \frac{R_0}{\Omega_0} = 459.44075\text{mH}$$

y los valores desnormalizados de los elementos pueden expresarse en función de sus valores normalizados como

$$R_i = R_{in} R_0$$

$$C_i = C_{in} C_0 \quad (4.458)$$

$$L_i = L_{in} L_0$$

Los resultados finales se muestran en la siguiente tabla,

| Elemento           | Valor Normalizado | Valor Real  |
|--------------------|-------------------|-------------|
| $C_{C_1}, C_{C_3}$ | 3.1946289         | 163.08252nF |
| $C_{a_2}$          | 0.6925674         | 35.354853nF |

|                    |           |             |
|--------------------|-----------|-------------|
| $C_{b_2}$          | 0.2986822 | 15.247419nF |
| $L_{C_1}, L_{C_3}$ | 0.3130254 | 143.81662mH |
| $L_{a_2}$          | 3.3480403 | 1538.2261mH |
| $L_{b_2}$          | 1.4439028 | 663.3878mH  |
| $R_S, R_L$         | 1.0000000 | 3K $\Omega$ |

### Otros Problemas

4.15. La forma general de una impedancia físicamente realizable con elementos pasivos es:

$$Z(s) = \frac{1}{|I_1(s)|^2} \left[ F_o(s) + \frac{1}{s} V_o(s) + s M_o(s) \right] \quad (4.459)$$

Utilice dicha expresión para deducir las localizaciones en el plano  $s$  que deben tener polos y ceros de impedancias LC.

4.16. Utilice los resultados anteriores para deducir para qué valores de  $a$  y  $b$  las siguientes impedancias son realizables LC:

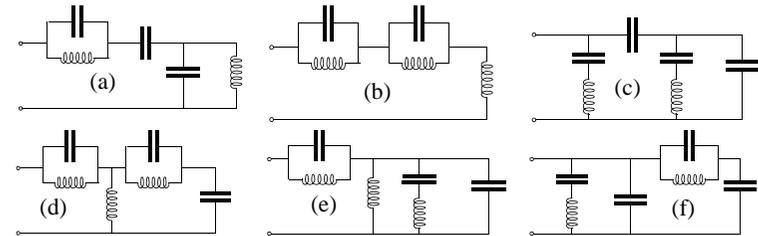
$$Z_1(s) = \frac{s^2 + a}{2s^3 + 8s} \quad Z_2(s) = \frac{s^4 + bs^2 + 9}{2s^3 + 8s} \quad (4.460)$$

4.17. Implemente una impedancia LC que satisfaga las siguientes especificaciones:

- a) Nula en DC
- b) Infinita en  $\omega_1=900$  rad/s,  $\omega_2=1125$  rad/s y  $\omega_3=1350$  rad/s.
- c)  $j75\Omega$  en  $\omega_0=1000$  rad/s
- d)  $Z(s)=1/sC$  para  $\omega \rightarrow \infty$  donde  $C=10\mu\text{F}$ .

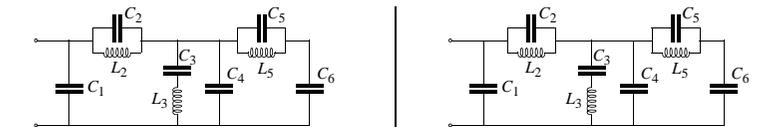
4.18. Indique con cuáles de los circuitos de la figura se puede implementar la impedancia LC:

$$Z(s) = \frac{(s^2 + 2)(s^2 + 8)}{s(s^2 + 5)(s^2 + 20)} \quad (4.461)$$



4.19. Se desea sintetizar una impedancia LC que sea nula para  $\omega = \sqrt{1200}$  rad/s y  $\omega = \sqrt{4800}$  rad/s e infinita para  $\omega = 0$ ,  $\omega = \sqrt{3600}$  rad/s y  $\omega = \sqrt{6000}$  rad/s. A altas frecuencias la impedancia debe comportarse como un condensador de 100nF. Determinar si alguno de los circuitos de la figura puede utilizarse para sintetizar dicha impedancia. Sintetizar la impedancia con el/los circuitos que sea posible.

Nota: Utilice normalización en impedancia y frecuencia para la resolución del problema.



$$\begin{aligned} L_2 C_2 &= 1.388888 \times 10^{-4} \text{ H} \cdot \text{F} \\ L_3 C_3 &= 4.166666 \times 10^{-4} \text{ H} \cdot \text{F} \\ L_5 C_5 &= 1.388888 \times 10^{-4} \text{ H} \cdot \text{F} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_2 C_2 &= 1.388888 \times 10^{-4} \text{ H} \cdot \text{F} \\ L_3 C_3 &= 6.666666 \times 10^{-4} \text{ H} \cdot \text{F} \\ L_5 C_5 &= 1.388888 \times 10^{-4} \text{ H} \cdot \text{F} \end{aligned}$$

**4.20.** Demostrar que los polos no compactos de los parámetros de impedancia de una bipuerta crean ceros de transmisión de su función de transferencia.

**4.21.** Demostrar que en las bipuertas LC cualquier polo del parámetro de impedancia  $z_{12}$  está contenido en los parámetros  $z_{11}$  y  $z_{22}$ .

**4.22.** Realice una escalera LC doblemente terminada cuyos parámetros de impedancia son,

$$z_{11} = \frac{6s^2 + 5}{6s} \quad z_{12} = \frac{2s^2 + 1}{s} \quad z_{22} = \frac{16s^2 + 6}{s} \quad (4.462)$$

Utilice  $z_{11}$  como inmitancia de síntesis.

**4.23.** Una aproximación elíptica tiene los siguientes ceros de transmisión:  $s=\infty, \pm j1.864643, \pm j2.868343$ . Su implementación como escalera LC conduce a la siguiente impedancia de síntesis:

$$z_{11} = \frac{[s^2 + (0.50305)^2][s^2 + (1.08729)^2]}{1.1584s[s^2 + (1.15180)^2][s^2 + (0.852618)^2]} \quad (4.463)$$

Terminar la implementación de la escalera.

**4.24.** La magnitud al cuadrado de una función de transferencia paso de baja viene dada por:

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{(1 - \omega^2/4)^2}{(1 - \omega^2/4)^2 + 0,1456455\omega^6} \quad (4.464)$$

- ¿Cuál es el tipo de función de transferencia?
- ¿Cuál es la atenuación para  $\omega=1$ , la frecuencia límite normalizada de la banda pasante?
- Encontrar los parámetros de impedancia y admitancia, e implementar  $H(s)$  como una escalera LC terminada en  $R_S=R_L=1$ .

**4.25.** Diseñar un filtro escalera LC paso de baja Chebishev de cuarto orden. El rizado en la banda pasante es 0.1dB y el ancho de banda del rizado es 1000rad/s.

**4.26.** Obtener una realización como escalera pasiva LC doblemente terminada en resistencias unitarias de un filtro Butterworth de segundo orden cuya función de transferencia es:

$$H(s) = 1/(s^2 + 1.414s + 1) \quad (4.465)$$

**4.27.** Realizar un filtro escalera LC de tercer orden paso de alta que cumpla las siguientes especificaciones:

- Resistencias de fuente y carga de  $600\Omega$ .
- Banda pasante máximamente plana en  $f \geq 32\text{KHz}$  con  $A_p \leq 2\text{dB}$ .
- Cero de transmisión en  $f_o = 10\text{KHz}$ .

**4.28.** Diseñar un filtro pasa todo LC que tenga un retraso máximamente plano  $\tau(0) = 90\mu\text{s}$  y un error de retraso menor del 0.8% para frecuencias  $f \leq 9.2\text{KHz}$ . La resistencia de carga del filtro es  $R_L = 1.3\text{K}\Omega$ .

**4.29.** Implementar un filtro LC todo-polo paso de baja máximamente plano de quinto orden cuya frecuencia de 3dB es  $\omega_{3dB} = 1$ . Sus resistencias de fuente y carga son  $R_S = R_L = 1$ .

**4.30.** Sintetice una escalera LC doblemente terminada con  $R_S = R_L = 1.2\text{K}\Omega$  que responda a las siguientes funciones de transferencia y característica, en las que la frecuencia está normalizada respecto a 60KHz.

$$H(s) = \frac{0.30982[s^2 + (3.2)^2]}{s^3 + 2.85071s^2 + 4.01527s + 3.17260} \quad (4.466)$$

$$K(s) = \frac{s^3}{0.30982[s^2 + (3.2)^2]}$$

**4.31.** Diseñar un filtro LC paso de baja todo-polo con banda pasante máximamente plana tal que la frecuencia de 3dB es  $f = 10^4$  Hz y la atenuación crece a altas frecuencias al menos con 30 dB/octava. Las resistencias terminales son  $R_s = R_L = 1K\Omega$ .

### Apéndice 4.1: Teorema de Tellegen e inmitancias RLCM

Consideremos un circuito genérico tal como el de la Fig. 4.30. Utilizando la notación que aparece en dicha figura las leyes de Kirchoff pueden escribirse como:

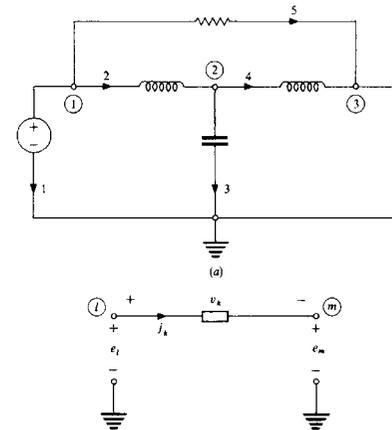
$$\begin{aligned} A\mathbf{j} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{v} &= \mathbf{A}^T \mathbf{e} \end{aligned} \quad (4.467)$$

Consideremos la suma de las potencias de cada rama  $v_k j_k$  para todas las ramas del circuito:

$$\sum_{k=1}^N v_k j_k = \mathbf{v}^T \mathbf{j} = (\mathbf{A}^T \mathbf{e})^T \mathbf{j} = \mathbf{e}^T (\mathbf{A} \mathbf{j}) = 0 \quad (4.468)$$

Esto no expresa más que la conservación de energía en el circuito.

Veamos cómo el teorema de Tellegen en su forma especial permite obtener la forma general de impedancias y admitancias. Consideremos la



**Figura 4.30:** (a) Circuito lineal; (b) Notación a utilizar.

monopuerta lineal pasiva RLCM (constituida por resistencias, inductores, condensadores e inductores mutuos) de la Fig. 4.31.

Utilizando transformada de Laplace sobre la ecuación (4.467):

$$V(s) = A^T E(s) \tag{4.469}$$

y aplicando la transformada de Laplace sobre (4.467) y tomando complejo conjugado.

$$AJ^*(s) = 0 \tag{4.470}$$

Por tanto,

$$V^T J^* = E^T AJ^* = 0 \tag{4.471}$$

o lo que es lo mismo

$$\sum_{k=1}^N V_k(s) J_k^*(s) = 0 \tag{4.472}$$

Ya que la impedancia se define con la intensidad  $i_1$ , de sentido contrario a la corriente de la excitación, podemos expresar (4.472) como:

$$-V_1(s) J_1^*(s) = V_1(s) I_1^*(s) = \sum_{k=2}^N V_k(s) J_k^*(s) \tag{4.473}$$

Ya que la impedancia de la monopuerta es el cociente de  $V_1(s)$  e  $I_1(s)$ :

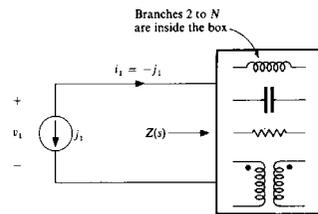


Figura 4.31: Monopuerta RLCM.

$$Z(s) = \frac{V_1(s)}{I_1(s)} = \frac{V_1(s) I_1^*(s)}{I_1(s) I_1^*(s)} = \frac{V_1(s) I_1^*(s)}{|I_1(s)|^2} = \frac{1}{|I_1(s)|^2} \sum_{k=2}^N V_k(s) J_k^*(s) \tag{4.474}$$

La Fig. 4.32 muestra la rama más general de un circuito RLCM. En ella:

$$V_k = \left( R_k + sL_k + \frac{1}{sC_k} \right) J_k + \sum_{\substack{l=2 \\ l \neq k}}^N sM_{kl} J_l \tag{4.475}$$

Sustituyendo en (4.474) se obtiene:

$$Z(s) = \frac{1}{|I_1(s)|^2} \left[ \sum_{k=2}^N R_k |J_k|^2 + \frac{1}{s} \sum_{k=2}^N \frac{1}{C_k} |J_k|^2 + s \sum_{k=2}^N J_k^* \left( L_k J_k + \sum_{\substack{l=2 \\ l \neq k}}^N M_{kl} J_l \right) \right] \tag{4.476}$$

Suelen utilizarse unos símbolos especiales para estos sumatorios:

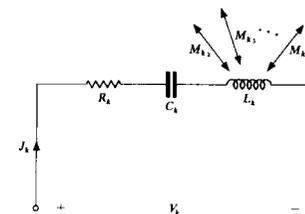


Figura 4.32: Rama genérica de una monopuerta RLCM.

$$\begin{aligned}
 F_o(s) &\equiv \sum_{k=2}^N R_k |J_k|^2 \geq 0 \\
 V_o(s) &\equiv \sum_{k=2}^N \frac{1}{C_k} |J_k|^2 \geq 0 \\
 M_o &\equiv \sum_{k=2}^N L_k J_k J_k^* + \sum_{\substack{l=2 \\ l \neq k}}^N M_{kl} J_k^* J_l \geq 0
 \end{aligned} \tag{4.477}$$

Por tanto,

$$Z(s) = \frac{1}{|I_1(s)|^2} \left[ F_o(s) + \frac{1}{s} V_o(s) + s M_o(s) \right] \tag{4.478}$$

Una derivación análoga para la admitancia conduce a:

$$Y(s) = \frac{I_1(s)}{V_1(s)} = \frac{1}{|V_1(s)|^2} \sum_{k=2}^N V_k^*(s) J_k(s) \tag{4.479}$$

y a

$$Y(s) = \frac{1}{|V_1(s)|^2} \left[ F_o(s) + \frac{1}{s^*} V_o(s) + s^* M_o(s) \right] \tag{4.480}$$

donde los símbolos tienen la misma definición de (4.477)

## Apéndice 4.2: Propiedades de inmitancias LC

En las monopuertas LC  $R_k=0$  y por tanto  $F(s)=0$ . Por tanto, la forma general de impedancias y admitancias es:

$$Z(s) = \frac{1}{|I_1|^2} \left[ \frac{V_o(s)}{s} + s M_o(s) \right] \tag{4.481}$$

$$Y(s) = \frac{1}{|V_1|^2} \left[ \frac{V_o(s)}{s^*} + s^* M_o(s) \right]$$

donde  $|I_1|^2$ ,  $|V_1|^2$ ,  $V_o$  y  $M_o$  son funciones de  $s$ , reales y no negativas para cualquier valor de  $s$ , real o complejo.

Veamos las propiedades de los ceros de  $Z(s)$ . Si suponemos que  $I_1$  es finito, en un cero  $s_z$ :

$$\frac{V_o(s_z)}{s_z} + s_z M_o(s_z) = 0 \tag{4.482}$$

luego

$$s_z^2 = -\frac{V_o(s_z)}{M_o(s_z)} \tag{4.483}$$

Dado que  $V_o \geq 0$  y  $M_o \geq 0$ ,  $s_z^2$  es un número real no positivo por lo que *los ceros son imaginarios puros* (complejo conjugados para dar coeficientes reales). Las únicas excepciones son ceros en  $\omega=0$  y  $\omega \rightarrow \infty$ . Además, dado que los ceros de  $Z(s)$  son polos en el eje  $j\omega$  de  $Y(s)$ , que es una función real positiva, *todos los ceros de  $Z(s)$  deben ser simples*.

Puede hacerse un argumento similar para los ceros de  $Y(s)$  (o polos de  $Z(s)$ ). Por tanto, numerador  $N(s)$  y denominador  $D(s)$  tienen la forma general:

$$P(s) = s(s^2 + \omega_1^2)(s^2 + \omega_2^2) \dots \tag{4.484}$$

donde el factor  $s$ , que representa un cero en  $\omega=0$ , puede estar o no presente.

Puede observarse que estos polinomios contienen únicamente potencias pares o impares de  $s$ . Potencias pares de  $s$  se hacen reales cuando  $s=j\omega$  y potencias impares se hacen imaginarias. Por tanto, si  $N(s)$  y  $D(s)$  contienen solamente potencias impares o solamente potencias pares  $Z(j\omega)$  es real. Pero de (4.481) se deduce que  $Z(j\omega)$  debe ser imaginaria pura. Por tanto,  $N(s)$  y  $D(s)$  no pueden ser impares o pares al mismo tiempo; uno debe ser par y el otro debe ser impar. Las dos posibilidades son:

$$Z(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{s(s^2 + \omega_{z_1}^2)(s^2 + \omega_{z_2}^2)\dots}{(s^2 + \omega_{p_1}^2)(s^2 + \omega_{p_2}^2)\dots} \quad (4.485)$$

$$Z(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{(s^2 + \omega_{z_1}^2)(s^2 + \omega_{z_2}^2)\dots}{s(s^2 + \omega_{p_1}^2)(s^2 + \omega_{p_2}^2)\dots}$$

Luego  $Z(s)$  es una función impar de  $s$ :  $Z(-s) = -Z(s)$ .

Consideremos la expansión parcial en fracciones de  $Z(s)$ :

$$Z(s) = k_1 s + \frac{k_{-1}}{s} + \frac{k_{p1}}{s - j\omega_{p1}} + \frac{k'_{p1}}{s + j\omega_{p1}} + \frac{k_{p2}}{s - j\omega_{p2}} + \frac{k'_{p2}}{s + j\omega_{p2}} + \dots \quad (4.486)$$

No puede haber términos en  $s$  de orden mayor ya que no puede haber polos múltiples para  $s \rightarrow \infty$  y no puede existir un término sin  $s$  ya que destruiría el carácter impar de  $Z(s)$ .

Si consideramos la suma de los términos correspondientes a polos complejos conjugados:

$$\frac{k_{pi}}{s - j\omega_{pi}} + \frac{k'_{pi}}{s + j\omega_{pi}} = \frac{(k_{pi} + k'_{pi})s + j\omega_{pi}(k_{pi} - k'_{pi})}{s^2 + \omega_{pi}^2} \quad (4.487)$$

Los residuos de los polos imaginarios de las funciones reales positivas son reales y positivos. Por tanto, puede escribirse  $Z(s)$  como:

$$Z(s) = k_1 s + \frac{k_{-1}}{s} + \frac{2k_{p1}s}{s^2 + \omega_{p1}^2} + \frac{2k_{p2}s}{s^2 + \omega_{p2}^2} + \dots \quad (4.488)$$

y cambiando la notación:

$$Z(s) = K_\infty s + \frac{K_0}{s} + \frac{K_1 s}{s^2 + \omega_1^2} + \frac{K_2 s}{s^2 + \omega_2^2} + \dots + \frac{K_n s}{s^2 + \omega_n^2} \quad (4.489)$$

donde  $K_\infty$ ,  $K_0$  y  $K_i$  también deben ser no negativos. Si hacemos  $s=j\omega$ :

$$Z(j\omega) = j \left[ K_\infty \omega - \frac{K_0}{\omega} + \frac{K_1 \omega}{\omega_1^2 - \omega^2} + \frac{K_2 \omega}{\omega_2^2 - \omega^2} + \dots \right] \quad (4.490)$$

La función entre corchetes se denomina reactancia de la monopuerta LC:

$$X(\omega) \equiv K_\infty \omega - \frac{K_0}{\omega} + \frac{K_1 \omega}{\omega_1^2 - \omega^2} + \frac{K_2 \omega}{\omega_2^2 - \omega^2} + \dots \quad (4.491)$$

La derivada muestra que  $X(\omega)$  es una función creciente monótona de  $\omega$ :

$$\frac{\partial}{\partial \omega} X(\omega) = K_\infty + \frac{K_0}{\omega^2} + \frac{K_1(\omega_1^2 + \omega^2)}{(\omega_1^2 - \omega^2)^2} + \frac{K_2(\omega_2^2 + \omega^2)}{(\omega_2^2 - \omega^2)^2} + \dots \quad (4.492)$$

donde todos los términos son positivos para cualquier valor finito de  $\omega$ :

$$\frac{\partial}{\partial \omega} X(\omega) > 0 \quad \omega < \infty \quad (4.493)$$

$$\frac{\partial}{\partial \omega} X(\omega) \rightarrow K_\infty \geq 0 \quad \omega \rightarrow \infty$$

Sabemos que todos los polos y ceros de  $Z(s)$ , y por tanto de  $X(\omega)$  están en el eje  $j\omega$ . Si suponemos dos ceros consecutivos sin un polo entre ellos, se tiene la situación de la Fig. 4.33a, que viola la condición (4.493). Análogamente ocurre si suponemos dos polos consecutivos sin un cero entre ellos, como se muestra en la Fig. 4.33b. Luego la única posibilidad es que *polos* y

ceros de  $X(\omega)$  se encuentren entrelazados tal como se muestra en la Fig. 4.33c.

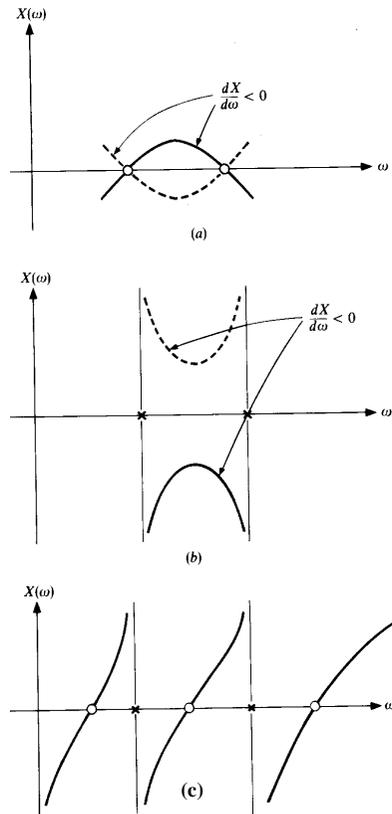


Figura 4.33: (a), (b) situaciones imposibles; (c) característica posible.

### Apéndice 4.3: Caracterización de bipuertas mediante parámetros de inmitancia

Una bipuerta se compone de una puerta de entrada y una puerta de salida, como se muestra en la Fig. 4.34. En nuestro contexto, la puerta de entrada se excita normalmente con un generador con impedancia de salida  $R_s$ , y la puerta de salida se “termina” con una impedancia de carga  $R_L$ . Para que el circuito de cuatro terminales de la figura se considere una bipuerta se deben cumplir las condiciones:

$$I_1 = I_1 \quad I_2 = I_2 \tag{4.494}$$

Si se cumplen estas condiciones, por el teorema de sustitución se puede sustituir la circuitería externa por dos fuentes de intensidad equivalentes, como se muestra en la Fig. 4.35. Si la bipuerta contiene únicamente elementos lineales y no contiene fuentes independientes se puede utilizar el teorema de superposición para hallar la tensión en cada puerta. Considerando primero la excitación  $I_1$ , por linealidad la tensión en cada puerta será proporcional a la intensidad  $I_1$ :

$$V_1^1 = z_{11}I_1 \quad V_2^1 = z_{21}I_1 \tag{4.495}$$

Debido a la fuente de intensidad en la otra puerta:

$$V_1^2 = z_{12}I_2 \quad V_2^2 = z_{22}I_2 \tag{4.496}$$

La tensión en cada puerta será la suma de la debida a cada excitación:

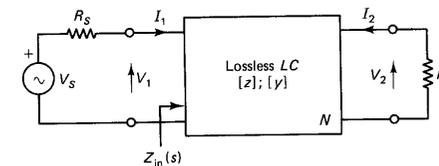


Figura 4.34: Bipuerta LC doblemente terminada.

$$V_1 = V_1^1 + V_1^2 = z_{11}I_1 + z_{12}I_2 \tag{4.497}$$

$$V_2 = V_2^1 + V_2^2 = z_{21}I_1 + z_{22}I_2$$

Es evidente que si la bipuerta es recíproca debe ser:

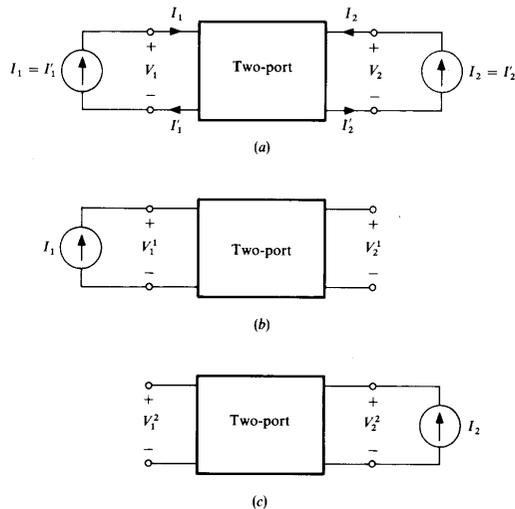
$$z_{12} = z_{21} \tag{4.498}$$

Los parámetros se denominan parámetros de impedancia en circuito abierto y la matriz

$$\mathbf{Z}(s) = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \tag{4.499}$$

se denomina matriz de impedancia en circuito abierto. La ecuación (4.497) se puede escribir en forma matricial como:

$$\mathbf{V} = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{I} \tag{4.500}$$



**Figura 4.35: Bipuerta (a) con dos fuentes equivalentes de intensidad, (b) con excitación únicamente en la puerta de entrada, (c) con excitación únicamente en la puerta de salida.**

La sustitución de la circuitería exterior a la bipuerta por dos fuentes de tensión en lugar de intensidad conduce a la ecuación:

$$\mathbf{I} = \mathbf{Y} \cdot \mathbf{V} \tag{4.501}$$

donde

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \tag{4.502}$$

es la matriz de admitancia en cortocircuito y  $y_{ij}$  son los parámetros de admitancia en cortocircuito.

Por comparación de (4.500) y (4.501) se deduce que

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Y}^{-1} \tag{4.503}$$

por lo que pueden obtenerse fácilmente una de la otra si el determinante de la matriz es no nulo.

## Apéndice 4.4: Condiciones de realizabilidad de bipuertas pasivas y condiciones sobre los residuos

Consideremos el circuito de la Fig. 4.35. Definiendo  $J_1$  y  $J_2$  como intensidades en sentido contrario a  $I_1$  e  $I_2$  respectivamente podemos escribir según el teorema de Tellegen:

$$\sum_{k=1}^N V_k(s)J_k^*(s) = V_1J_1^* + V_2J_2^* + \sum_{k=3}^N V_k(s)J_k^*(s) = 0 \quad (4.504)$$

Los dos primeros términos:

$$V_1I_1^* + V_2I_2^* = \mathbf{V}^T \mathbf{I}^* = \mathbf{I}^T \mathbf{Z}^T \mathbf{I}^* \quad (4.505)$$

Si la bipuerta contiene únicamente elementos pasivos:

$$\sum_{\text{ramas internas}} V_k(s)J_k^*(s) = F_o(s) + \frac{V_o(s)}{s} + sM_o(s) \quad (4.506)$$

$F_o$ ,  $V_o$  y  $M_o$  son reales y no negativas y (4.506) es una función real positiva. Por tanto, (4.505) debe ser también una función real positiva. Escribiendo las intensidades en función de su parte real e imaginaria:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}^T \mathbf{Z}^T \mathbf{I}^* &= \begin{bmatrix} a_1 + jb_1 & a_2 + jb_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{12} & z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 - jb_1 \\ a_2 - jb_2 \end{bmatrix} = \\ &= z_{11}(a_1^2 + b_1^2) + 2z_{12}(a_1a_2 + b_1b_2) + z_{22}(a_2^2 + b_2^2) \end{aligned} \quad (4.507)$$

Esta expresión debe ser una función real positiva para todo valor de  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$ ,  $b_2$ . En particular para  $b_1=b_2=0$ :

$$z_{11}a_1^2 + 2z_{12}a_1a_2 + z_{22}a_2^2 \quad (4.508)$$

debe ser real positiva para todo  $a_1$  y  $a_2$ .

Las condiciones de realizabilidad de la matriz de impedancia  $\mathbf{Z}$  de una bipuerta son:

a) Todos los elementos  $z_{ij}$  de  $\mathbf{Z}$  deben ser funciones racionales reales de  $s$  con  $z_{12}=z_{21}$ .

b) La expresión

$$Z(s) = z_{11}a_1^2 + 2z_{12}a_1a_2 + z_{22}a_2^2 \quad (4.509)$$

debe ser una función real positiva para todo  $a_1$  y  $a_2$ .

Una condición análoga se obtiene para  $Y(s)$ .

Haciendo  $a_1=0$  o  $a_2=0$  se deduce que  $z_{11}$ ,  $z_{22}$ ,  $y_{11}$ ,  $y_{22}$  deben ser reales positivas, lo cual es lógico ya que son funciones de inmitancia de una puerta con la otra puerta cortocircuitada o en circuito abierto.

Un conjunto alternativo de condiciones de realizabilidad son:

a) Igual que la condición a) anterior.

b) Si denominamos  $r_{ij}=\text{Re } z_{ij}$ :

$$\text{Re } Z(j\omega) = r_{11}a_1^2 + 2r_{12}a_1a_2 + r_{22}a_2^2 \geq 0 \quad (4.510)$$

c) Todos los polos de  $Z(s)$  están en el semiplano izquierdo cerrado del plano  $s$ . Los que están en el eje  $j\omega$  deben ser simples y con residuos reales positivos.

Si en (4.510) hacemos  $a_1=0$  o  $a_2=0$  está claro que debe ser  $r_{11} \geq 0$  y  $r_{22} \geq 0$ . Por tanto sólo se podría violar esa condición si  $2r_{12}a_1a_2$  es negativo y su valor absoluto:

$$-2r_{12}a_1a_2 > r_{11}a_1^2 + r_{22}a_2^2 > 0 \quad (4.511)$$

Pero

$$(a_1\sqrt{r_{11}} - a_2\sqrt{r_{22}})^2 = r_{11}a_1^2 - 2\sqrt{r_{11}r_{22}}a_1a_2 + r_{22}a_2^2 \geq 0 \quad (4.512)$$

Luego

$$r_{11}a_1^2 + r_{22}a_2^2 \geq 2\sqrt{r_{11}r_{22}}a_1a_2 \quad (4.513)$$

Por tanto, si se cumple que

$$2\sqrt{r_{11}r_{22}}a_1a_2 \geq -2r_{12}a_1a_2 \quad (4.514)$$

(4.511) será falso como queremos. Por tanto,

$$r_{11}r_{22} \geq r_{12}^2 \quad (4.515)$$

y las condiciones de las partes reales equivalentes a (4.510) son:

$$r_{11}(j\omega) \geq 0 \quad r_{22}(j\omega) \geq 0 \quad r_{11}(j\omega)r_{22}(j\omega) - r_{12}^2(j\omega) \geq 0 \quad (4.516)$$

$z_{12}$  no puede tener polos en el semiplano derecho ya que aparecerían en  $Z$ ,  $z_{11}$ , o  $z_{22}$  y esas son funciones reales positivas. Cualquier polo en el eje  $j\omega$  será simple por lo que se pueden expandir en fracciones:

$$Z(s) = \frac{k}{s-j\omega_1} + \text{otros terminos} \quad (4.517)$$

$$z_{ij}(s) = \frac{k_{ij}}{s-j\omega_1} + \text{otros terminos}$$

Sustituyendo en (4.509) y multiplicando por  $s-j\omega_1$  resulta:

$$\begin{aligned} & k + (s-j\omega_1)(\text{otros terminos}) = \\ & = k_{11}a_1^2 + 2k_{12}a_1a_2 + k_{22}a_2^2 + (s-j\omega_1)(\text{otros terminos}) \end{aligned} \quad (4.518)$$

Para  $s=j\omega_1$  se obtiene:

$$k = k_{11}a_1^2 + 2k_{12}a_1a_2 + k_{22}a_2^2 \geq 0 \quad (4.519)$$

que por analogía a (4.510) conduce a las *condiciones de los residuos*:

$$k_{11} \geq 0 \quad k_{22} \geq 0 \quad k_{11}k_{22} - k_{12}^2 \geq 0 \quad (4.520)$$

que debe cumplirse para todos los polos del eje  $j\omega$  de  $z_{ij}$ .

## Apéndice 4.5: Teorema de máxima transferencia de potencia

El teorema de máxima transferencia de potencia establece cuál es la potencia máxima transferible por un generador (supuesto conocido, por ejemplo mediante su equivalente Thévenin: fuente de tensión e impedancia de salida) a una carga arbitraria (es sobre el conjunto de cargas posibles, con el generador fijo, sobre el que se calcula el máximo), y en qué condiciones se produce (para qué carga).

En nuestro caso, la impedancia de salida es resistiva e igual a  $R_S$ . La impedancia de carga del generador es la impedancia  $Z_{in}(j\omega)$  vista a la entrada de la bipuerta cuando en su otra puerta se ha conectado la carga  $R_L$ .

En este caso, la potencia a la entrada es:

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{|V_S|^2}{|R_S + Re\{Z_{in}(j\omega)\} + Im\{Z_{in}(j\omega)\}|^2} Re\{Z_{in}(j\omega)\} = \\ &= \frac{|V_S|^2 Re\{Z_{in}(j\omega)\}}{R_S^2 + 2R_S Re\{Z_{in}(j\omega)\} + (Re\{Z_{in}(j\omega)\})^2 + (Im\{Z_{in}(j\omega)\})^2} \end{aligned} \quad (4.521)$$

Está claro que la potencia máxima se producirá para  $Im\{Z_{in}(j\omega)\}=0$ . Veamos para qué valor de la parte real haciendo la derivada de  $P_1$  respecto a la parte real e igualando a 0:

$$\frac{dP_1}{dRe\{Z_{in}\}} = \frac{(R_S^2 - (Re\{Z_{in}\})^2)|V_S|^2}{(R_S + Re\{Z_{in}(j\omega)\})^2} = 0 \quad (4.522)$$

luego  $R_S = Re\{Z_{in}(j\omega)\}$ , y la potencia máxima será

$$P_{\max} = \frac{|V_S|^2}{4R_S} \quad (4.523)$$

## Apéndice 4.6: Relaciones entre parámetros de transducción del filtro y parámetros de inmitancia de la bipuerta

Las propiedades de transmisión de una bipuerta doblemente terminada suele especificarse en términos de los parámetros de transducción  $H(s)$  y  $K(s)$ . Sin embargo, veremos que la realización toma los parámetros de inmitancia de la bipuerta como punto de partida. Por tanto, es imprescindible establecer la relación entre ellos y ser capaz de obtener los parámetros de inmitancia a partir de  $H(s)$  y  $K(s)$ .

Si consideramos de nuevo el circuito de la Fig. 4.34 podemos escribir:

$$\begin{aligned} V_1 &= V_s - I_1 R_s \\ V_2 &= -I_2 R_L \end{aligned} \quad (4.524)$$

Sustituyendo en (4.497) se obtiene:

$$z_{11} I_1 + z_{12} I_2 = V_s - I_1 R_s \quad z_{12} I_1 + z_{22} I_2 = -I_2 R_L \quad (4.525)$$

Resolviendo estas dos ecuaciones para  $I_1$  e  $I_2$  se obtiene:

$$I_1 = V_s \frac{z_{22} + R_L}{(z_{11} + R_s)(z_{22} + R_L) - z_{12}^2} \quad (4.526)$$

$$I_2 = -V_s \frac{z_{12}}{(z_{11} + R_s)(z_{22} + R_L) - z_{12}^2}$$

Por tanto,

$$H(s) = 2 \sqrt{\frac{R_s}{R_L}} \frac{V_2}{V_s} = 2 \sqrt{\frac{R_s - I_2 R_L}{R_L}} \frac{1}{V_s} = \frac{2 \sqrt{R_s R_L} z_{12}}{(z_{11} + R_s)(z_{22} + R_L) - z_{12}^2} \quad (4.527)$$

La impedancia de entrada es:

$$Z_{in} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{V_s - I_1 R_s}{I_1} = \frac{V_s}{I_1} - R_s \quad (4.528)$$

Sustituyendo (4.526) se obtiene:

$$Z_{in} = \frac{(z_{11} + R_s)(z_{22} + R_L) - z_{12}^2}{z_{22} + R_L} - R_s = z_{11} - \frac{z_{12}^2}{z_{22} + R_L} \quad (4.529)$$

El coeficiente de reflexión es:

$$\rho(s) = \pm \frac{R_s - Z_{in}}{R_s + Z_{in}} = \pm \frac{(R_s - z_{11})(R_L + z_{22}) + z_{12}^2}{(R_s + z_{11})(R_L + z_{22}) - z_{12}^2} \quad (4.530)$$

Con el coeficiente de reflexión y la función de transferencia puede obtenerse la función característica:

$$K = \frac{\rho}{H} = \frac{(R_s - z_{11})(R_L + z_{22}) + z_{12}^2}{2 \sqrt{R_s R_L} z_{12}} \quad (4.531)$$

Las ecuaciones anteriores expresan los parámetros de transducción en función de los parámetros de impedancia. Obtener los parámetros de impedancia en función de los parámetros de transducción  $H(s)$  y  $K(s)$  requiere resolver dos ecuaciones con tres incógnitas. Pero sabemos que las  $z_{ij}$  son funciones impares de  $s$ , por lo que podemos separar  $1/H(s)$  y  $K(s)$  en sus partes impar y par:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{H}\right)_p &= \frac{R_s z_{22} + R_L z_{11}}{2 \sqrt{R_s R_L} z_{12}} & \left(\frac{1}{H}\right)_i &= \frac{(z_{11} z_{22} - z_{12}^2) + R_s R_L}{2 \sqrt{R_s R_L} z_{12}} \\ K_p &= \frac{R_s z_{22} - R_L z_{11}}{2 \sqrt{R_s R_L} z_{12}} & K_i &= \frac{-(z_{11} z_{22} - z_{12}^2) + R_s R_L}{2 \sqrt{R_s R_L} z_{12}} \end{aligned} \quad (4.532)$$

Tenemos ahora 4 ecuaciones y 3 incógnitas. Vamos a sumar y restar las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{H}\right)_i + K_i &= \frac{\sqrt{R_s R_L}}{z_{12}} \\ \left(\frac{1}{H}\right)_i - K_i &= \frac{z_{11} z_{22} - z_{12}^2}{\sqrt{R_s R_L} z_{12}} \\ \left(\frac{1}{H}\right)_p + K_p &= \sqrt{\frac{R_s z_{22}}{R_L z_{12}}} \\ \left(\frac{1}{H}\right)_p - K_p &= \sqrt{\frac{R_L z_{11}}{R_s z_{12}}} \end{aligned} \quad (4.533)$$

De la primera ecuación se obtiene:

$$z_{12} = \frac{\sqrt{R_s R_L}}{\left(\frac{1}{H}\right)_i + K_i} \quad (4.534)$$

Sustituyendo en la tercera y cuarta ecuación en (4.533) se obtiene:

$$z_{11} = R_s \frac{\left(\frac{1}{H}\right)_p - K_p}{\left(\frac{1}{H}\right)_i + K_i} \quad z_{22} = R_L \frac{\left(\frac{1}{H}\right)_p + K_p}{\left(\frac{1}{H}\right)_i + K_i} \quad (4.535)$$

Si se sustituyen estos valores en la segunda ecuación de (4.533) concuerda perfectamente.

De forma análoga se obtiene para los parámetros de admitancia:

$$y_{12} = -\frac{1}{\sqrt{R_s R_L}} \frac{1}{\left(\frac{1}{H}\right)_i - K_i} \quad (4.536)$$

$$y_{11} = \frac{1}{R_s} \frac{\left(\frac{1}{H}\right)_p + K_p}{\left(\frac{1}{H}\right)_i - K_i} \quad y_{22} = \frac{1}{R_L} \frac{\left(\frac{1}{H}\right)_p - K_p}{\left(\frac{1}{H}\right)_i - K_i} \quad (4.537)$$

Pueden escribirse de forma alternativa estas expresiones teniendo en cuenta que el numerador de  $H(s)$  y denominador de  $K(s)$  debe ser una función racional impar o par de  $s$  (puesto que hemos elegido tener todos los ceros de transmisión en el eje imaginario). Por tanto, si  $N(s)$  es par:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{H}\right)_p &= \frac{D_p(s)}{N(s)} & \left(\frac{1}{H}\right)_i &= \frac{D_i(s)}{N(s)} \\ K_p(s) &= \frac{\hat{F}_p(s)}{N(s)} & K_i(s) &= \frac{\hat{F}_i(s)}{N(s)} \end{aligned} \quad (4.538)$$

y por tanto,

$$\begin{aligned} z_{11} &= R_s \frac{D_p - \hat{F}_p}{D_i + \hat{F}_i} & z_{22} &= R_L \frac{D_p + \hat{F}_p}{D_i + \hat{F}_i} & z_{12} &= \frac{\sqrt{R_s R_L} N}{D_i + \hat{F}_i} \\ y_{11} &= \frac{1}{R_s} \frac{D_p + \hat{F}_p}{D_i - \hat{F}_i} & y_{22} &= \frac{1}{R_L} \frac{D_p - \hat{F}_p}{D_i - \hat{F}_i} & y_{12} &= -\frac{1}{\sqrt{R_s R_L}} \frac{N}{D_i - \hat{F}_i} \end{aligned} \quad (4.539)$$

y análogamente, si  $N(s)$  es impar:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{H}\right)_p &= \frac{D_i(s)}{N(s)} & \left(\frac{1}{H}\right)_i &= \frac{D_p(s)}{N(s)} \\ K_p(s) &= \frac{\hat{F}_i(s)}{N(s)} & K_i(s) &= \frac{\hat{F}_p(s)}{N(s)} \end{aligned} \quad (4.540)$$

y por tanto,

$$\begin{aligned} z_{11} &= R_s \frac{D_i - \hat{F}_i}{D_p + \hat{F}_p} & z_{22} &= R_L \frac{D_i + \hat{F}_i}{D_p + \hat{F}_p} & z_{12} &= \frac{\sqrt{R_s R_L} N}{D_p + \hat{F}_p} \\ y_{11} &= \frac{1}{R_s} \frac{D_i + \hat{F}_i}{D_p - \hat{F}_p} & y_{22} &= \frac{1}{R_L} \frac{D_i - \hat{F}_i}{D_p - \hat{F}_p} & y_{12} &= -\frac{1}{\sqrt{R_s R_L}} \frac{N}{D_p - \hat{F}_p} \end{aligned} \quad (4.541)$$