

## TEMA 2

# CONCEPTOS FUNDAMENTALES EN EL DISEÑO DE FILTROS

### 2.1 Filtros: concepto y especificaciones

Un filtro eléctrico es un sistema (circuito) cuya función es modificar, deformar o manipular en general, el espectro en frecuencia de una señal de entrada (excitación) de acuerdo con unos determinados requerimientos (especificaciones). Los filtros se emplean para atenuar o amplificar componentes de la entrada con frecuencias dentro de un determinado rango, o para rechazar o aislar componentes en frecuencias específicas. Puesto que un filtro puede considerarse un sistema de transmisión de señales con la habilidad de dejar pasar ciertas frecuencias y de rechazar ciertas otras, podemos definir las

- Banda (o bandas) pasante o banda de paso (passband ó PB): Conjunto de frecuencias o rangos de frecuencias para las cuales el filtro deja pasar la entrada hasta la salida. Cualquier componente de la entrada cuya frecuencia pertenezca a dicho conjunto va a ser transmitida hacia la salida del filtro (no sin cierta modificación de la amplitud y de la fase).
- Banda (o bandas) de rechazo o banda rechazada (stopband ó SB): Conjunto de frecuencias o rangos de frecuencias que el filtro no deja pasar. Cualquier componente de la entrada cuya frecuencia pertenezca a dicho conjunto va a ser rechazada.
- Banda (o bandas) de transición: Conjunto de frecuencias entre la

banda de paso y la banda de rechazo.

Las especificaciones del filtro consistirán entonces en:

- Bordes de las bandas de paso y de rechazo: frecuencias en las que teóricamente comienza o termina cada una de las bandas.
- Atenuaciones en cada una de las bandas. Tendremos una *atenuación máxima permitida en la banda de paso* y una *atenuación mínima exigida en la banda de rechazo*.
- Otras características que pueden estar relacionadas con la forma de la función de transferencia, su magnitud, fase, el retraso de grupo, etc.

### 2.2 Clasificación de filtros

#### Filtros paso de baja

La función básica de un filtro *paso de baja (LP)* es pasar las frecuencias bajas con muy pocas pérdidas y atenuar las altas frecuencias. La Fig. 2.1 muestra un esquema típico de especificaciones de un filtro paso de baja. El filtro LP debe pasar las señales entre DC y la *frecuencia de corte*  $\omega_p$ , con una atenuación máxima de  $A_p$  dB. La banda de frecuencias entre DC y  $\omega_p$  se conoce como *banda de paso*. Las frecuencias por encima de  $\omega_s$  deben tener al menos  $A_s$  dB de atenuación. La banda de frecuencias entre  $\omega_s$  y infinito se denomina *banda de rechazo* y  $\omega_s$  se denomina *frecuencia límite de la banda de rechazo*. La banda de frecuencias entre  $\omega_p$  y  $\omega_s$  se denomina *banda de transición*. Los parámetros  $\omega_p$ ,  $\omega_s$ ,  $A_p$ , y  $A_s$  describen completamente las especificaciones del filtro LP.

Una función de transferencia de segundo orden que implementa una característica paso de baja es:

$$\text{Ganancia} = \frac{V_o}{V_i} = \frac{b}{s^2 + as + b} = \frac{\omega_o^2}{s^2 + \frac{\omega_o}{Q}s + \omega_o^2} \quad (2.1)$$

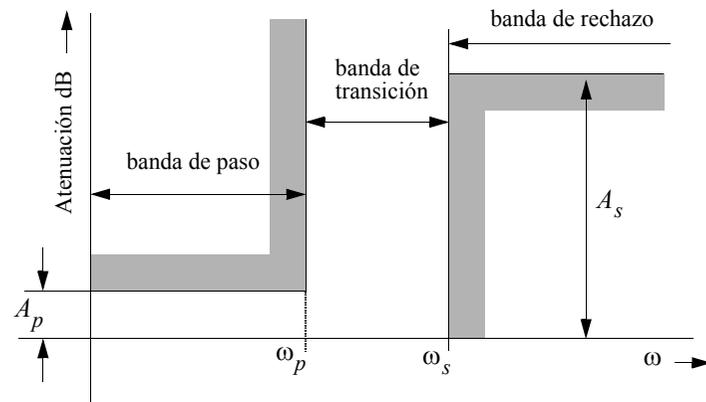


Figura 2.1: Especificaciones de filtro paso de baja.

Como se muestra en la Fig. 2.2 la atenuación a bajas frecuencias se aproxima a la unidad (0dB) mientras que a altas frecuencias aumenta como  $s^2$ , es decir 40dB/década. La función de transferencia tiene dos polos, como se muestra en la Fig. 2.2(b). La localización de los polos determina el aspecto de la respuesta del filtro en la banda de paso. Para polos de alta  $Q$ , el pico de la banda de paso ocurre a la frecuencia del polo  $\omega_p$ . A medida que aumenta la  $Q$  del polo, el pico será más alto y más estrecho.

Una aplicación bastante común de filtros LP es el control del tono de amplificadores de alta fidelidad.

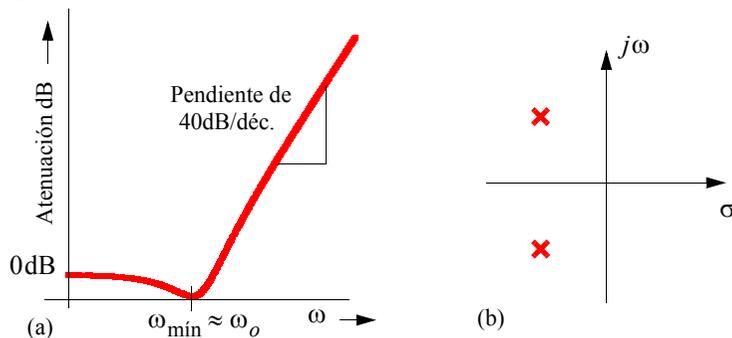


Figura 2.2: Función LP de segundo orden: (a) Atenuación; (b) Posición de polos y ceros en el plano  $s$ .

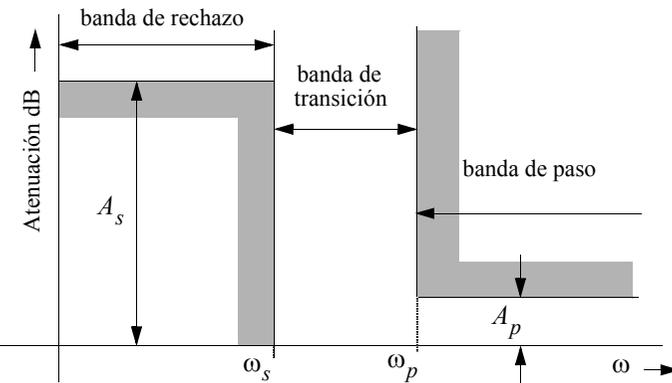


Figura 2.3: Especificaciones de filtro paso de alta.

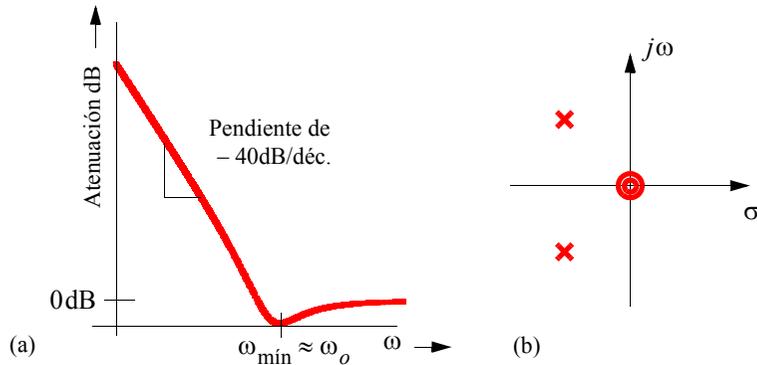
### Filtros paso de alta

Un filtro *paso de alta* (HP) pasa las frecuencias por encima de una frecuencia dada denominada frecuencia de corte. Tal como se muestra en la Fig. 2.3 la banda de paso se extiende desde  $\omega_p$  a  $\infty$  y la banda de rechazo desde 0 hasta  $\omega_s$ . Los parámetros  $\omega_s$ ,  $\omega_p$ ,  $A_p$  y  $A_s$  caracterizan completamente las especificaciones del filtro HP.

Una función de transferencia de segundo orden con característica paso de alta es

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{s^2}{s^2 + as + b} = \frac{s^2}{s^2 + \frac{\omega_o}{Q}s + \omega_o^2} \tag{2.2}$$

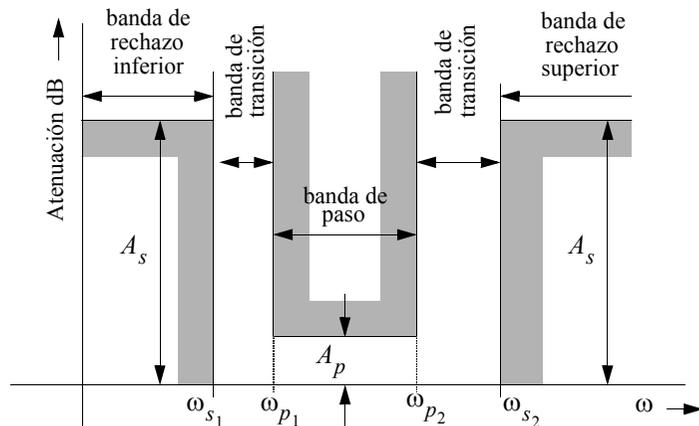
La ganancia tiene un par de polos complejos y un cero doble en el origen como se muestra en la Fig. 2.4(a). La atenuación a alta frecuencia se aproxima a la unidad mientras que a baja frecuencia aumenta a 40dB/década, como aparece en la Fig. 2.4(b).



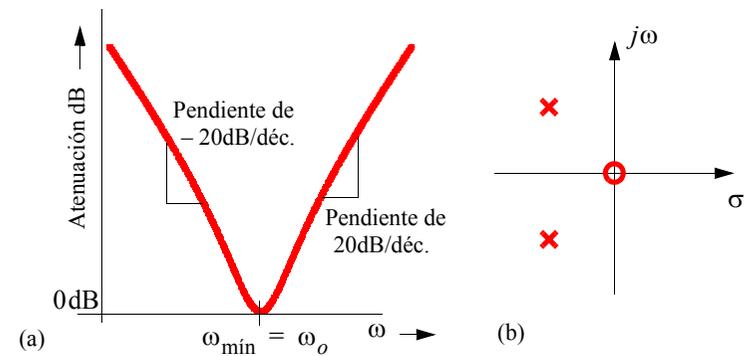
**Figura 2.4: Filtro HP de 2º orden: (a) Atenuación; (b) Posición de polos y ceros en el plano  $s$ .**

**Filtros paso de banda**

Un filtro paso de banda (BP) pasa las señales en una banda de frecuencias con atenuación muy baja mientras que rechaza las frecuencias a ambos lados de esta banda, como se muestra en la Fig. 2.5. La banda de paso de  $\omega_{p1}$  a  $\omega_{p2}$  tiene una atenuación máxima de  $A_p$  dB y las bandas de



**Figura 2.5: Especificaciones típicas de filtro paso de banda.**



**Figura 2.6: Filtro BP de segundo orden: (a) Atenuación; (b) Posición de polos y ceros en el plano  $s$ .**

rechazo, de DC a  $\omega_{s1}$  y de  $\omega_{s2}$  a  $\infty$ , tienen una atenuación mínima de  $A_s$  dB.

Una función de transferencia de segundo orden con característica paso de banda es

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{\omega_o^2 s}{s^2 + \frac{\omega_o}{Q}s + \omega_o^2} \tag{2.3}$$

Esta función tiene un par de polos complejos en el semiplano izquierdo del plano  $s$  y un cero en el origen (Fig. 2.6(a)). A bajas frecuencias y a altas frecuencias la atenuación aumenta como  $s$ , es decir, 20dB/década. A la frecuencia de polo  $\omega_o$  la atenuación es la unidad (Fig. 2.6(b)).

**Filtros rechazo de banda**

Los filtros rechazo de banda (BR) se usan para rechazar una banda de frecuencias de una señal, como se muestra en la Fig. 2.7. La banda de frecuencias a rechazar es la banda de rechazo entre  $\omega_{s1}$  y  $\omega_{s2}$ . La banda de paso se extiende por debajo de  $\omega_{p1}$  y por encima de  $\omega_{p2}$ .

Una función de segundo orden con característica rechazo de banda es

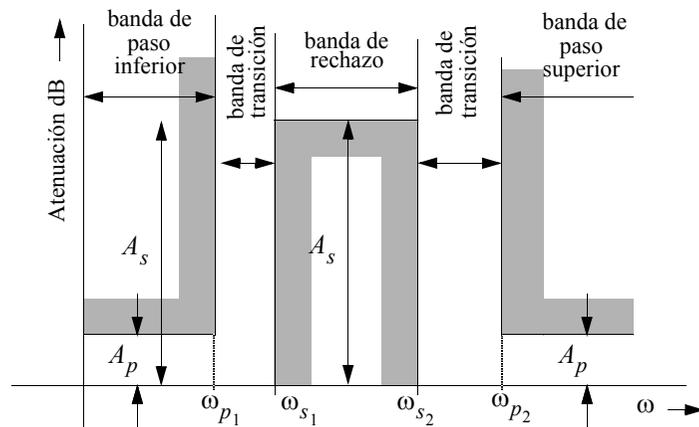


Figura 2.7: Especificaciones de filtro rechazo de banda.

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{s^2 + \omega_z^2}{s^2 + \frac{\omega_o}{Q}s + \omega_o^2} \quad (2.4)$$

Esta función tiene polos complejos en el semiplano izquierdo del plano  $s$  y ceros complejos en el eje  $j\omega$ . Si  $\omega_z = \omega_o$  la frecuencia de los polos es igual que la frecuencia de los ceros (Fig. 2.8(a)). La atenuación a bajas frecuencias y altas frecuencias se aproxima a la unidad mientras que la atenuación a la

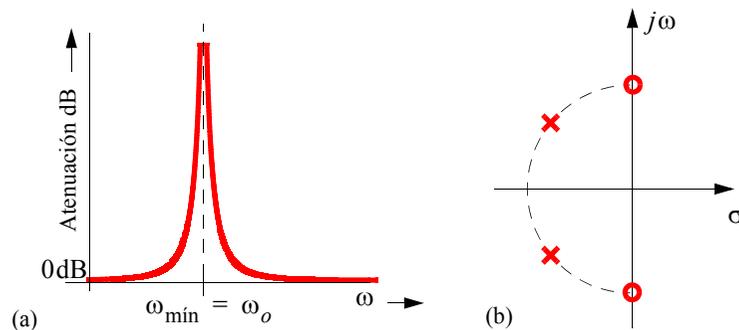


Figura 2.8: Filtro BR de segundo orden: (a) Atenuación; (b) Posición de polos y ceros en el plano  $s$ .

frecuencia de cero  $s = j\omega_z$  es infinita (Fig. 2.8(b)). Este caso se denomina "symmetrical notch".

Si  $\omega_z > \omega_o$ , (2.4) representa una función paso de baja con un cero en la banda de rechazo, como se muestra en la Fig. 2.9(a). En este caso la atenuación a altas frecuencias es mayor que a bajas frecuencias. Esta característica de filtro se denomina corte de paso de baja ("low-pass-notch"). Si  $\omega_z < \omega_o$  la función obtenida se denomina corte de paso de alta ("high-pass-notch").

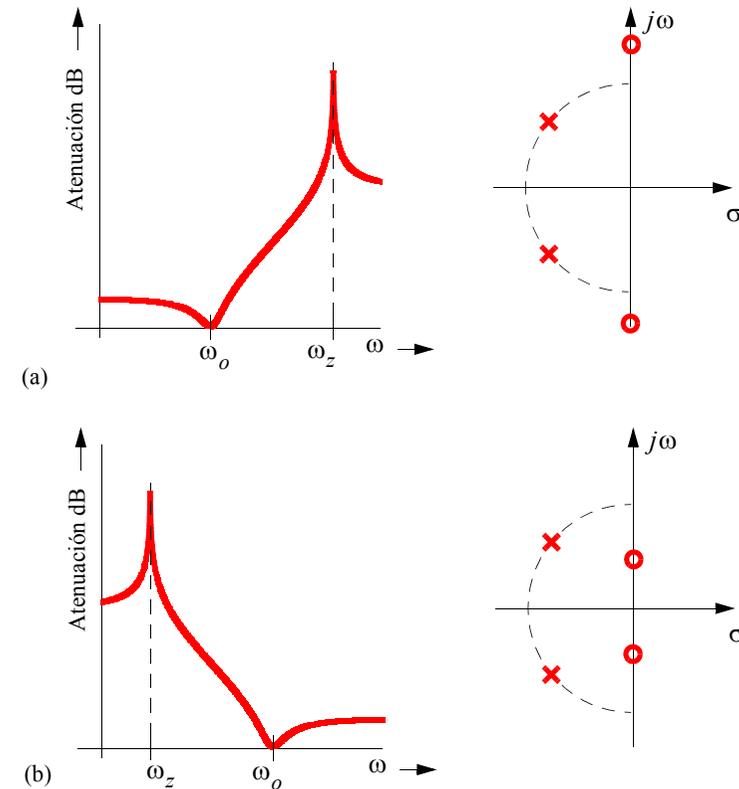


Figura 2.9: (a) Low-Pass-notch; (b) High-pass notch.

### Ecualesadores de retraso

Hasta ahora se han discutido características de ganancia de los filtros pero no se ha prestado atención a las características de fase. Para realizar las especificaciones de magnitud más eficientemente (función de sistema  $H(s)$  con el menor orden posible) normalmente se ponen todos los ceros de transmisión (raíces de  $N(s)$ ) en el eje  $j\omega$ . La función de sistema resultante tiene fase mínima. Se puede demostrar que en esta función de fase mínima, magnitud y fase no son independientes.

Si el retraso ha de ser corregido se introduce un ecualizador de retraso detrás del filtro. Los ecualizadores de retraso se usan para compensar las distorsiones de retraso introducidas por otros filtros u otras partes del sistema de transmisión. El propósito del ecualizador de retraso es introducir la modificación de retraso necesaria para hacer el retraso total (filtro+ecualizador) tan plano como sea posible. Además, el ecualizador de fase no debe perturbar la característica de atenuación del filtro.

En situaciones en las que se especifican la magnitud y la fase, la función de sistema no puede ser de fase mínima, es decir,  $H(s)$  debe tener ceros en el semiplano derecho. Esta función se separa en dos componentes:

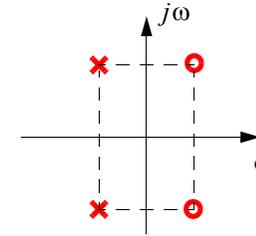
$$H_{NMP}(s) = H_{MP}(s)H_{AP}(s) \quad (2.5)$$

donde el subíndice  $NMP$  significa "non-minimum phase",  $MP$  "minimum phase" y  $AP$  "all-pass".

Esta separación se consigue añadiendo un polo y un cero a  $H_{NMP}(s)$  en el semiplano izquierdo en las posiciones especulares de los ceros del semiplano derecho.  $H_{AP}(s)$  se forma incluyendo en  $N_{AP}(s)$  los ceros del semiplano derecho y en  $D_{AP}(s)$  los polos que son imágenes especulares.  $H_{MP}(s)$  (fase mínima) incluye los restantes polos y ceros.

Un ecualizador de retraso de segundo orden viene dado por la función

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{s^2 - as + b}{s^2 + as + b} \quad (2.6)$$



**Figura 2.10: Posición de polos y ceros de un ecualizador de retraso de segundo orden.**

Los polos y ceros complejos de esta función son simétricos respecto al eje  $j\omega$ , tal como se muestra en la Fig. 2.10.

Para explicar la denominación "all-pass" o pasa todo consideremos que  $H_{AP}(s)$  tiene en  $N_{AP}(s)$  raíces en el semiplano derecho que son imágenes especulares de las raíces de  $D_{AP}(s)$  en el semiplano izquierdo. Por tanto,

$$N_{AP}(s) = \pm D_{AP}(-s) \quad (2.7)$$

por lo que

$$H_{AP}(s) = \pm \frac{D_{AP}(-s)}{D_{AP}(s)} \quad (2.8)$$

La magnitud  $|H_{AP}(j\omega)| = 1$  para cualquier frecuencia  $\omega$ , es decir, las señales pasan perfectamente bien a cualquier frecuencia. Por tanto,

$$H_{AP}(j\omega) = e^{j\phi_{AP}(\omega)} \quad (2.9)$$

donde

$$\phi_{AP}(\omega) = -2 \operatorname{atan} \frac{D_{APi}(\omega)}{D_{APr}(\omega)} \quad (2.10)$$

Una función de sistema pasa todo puede realizar una función arbitraria de la fase. Esta característica nos permite encontrar una función de transferencia  $H(s)$  eficiente, apropiada para las especificaciones de

magnitud e implementar el filtro correspondiente. Si la fase o retraso resultante no es satisfactorio se busca una función pasa todo  $H_{AP}(s)$  que multiplique a  $H(s)$  de forma que la fase total  $\phi_T(\omega)$  o retraso total  $\tau_T(\omega)$  sea el requerido. Los dos circuitos se conectan en cascada y las fases o retrasos individuales se suman,

$$\begin{aligned}\phi_T(\omega) &= \phi(\omega) + \phi_{AP}(\omega) \\ \tau_T(\omega) &= \tau(\omega) + \tau_{AP}(\omega)\end{aligned}\quad (2.11)$$

El filtro pasa todo en cascada únicamente puede aumentar la fase y el retraso de  $H(s)$  pero esto no es problema puesto que normalmente sólo es importante la linealidad de la fase o constancia del retraso.

## 2.3 Normalización de parámetros

Cuando se trabaja con circuitos eléctricos es usual normalizar la frecuencia y el nivel de impedancia. La normalización no causa ninguna pérdida de generalidad y se efectúa únicamente por conveniencia en el cálculo numérico, especialmente en el cálculo a mano, para evitar la tediosa manipulación de grandes potencias de 10. También minimiza el efecto de los errores de redondeo.

La normalización en frecuencia consiste simplemente en un cambio en la escala de frecuencia mediante la división de la variable de frecuencia por una frecuencia de normalización  $\Omega_o$  escogida adecuadamente. Por tanto la frecuencia normalizada es,

$$s_n = \frac{s}{\Omega_o} \quad (2.12)$$

De forma análoga la normalización del nivel de impedancias se efectúa dividiendo todas las impedancias del circuito por una resistencia de normalización  $R_o$ . Las resistencias, inductores y condensadores se

transforman como sigue,

$$R_n = \frac{R}{R_o} \quad s_n L_n = \frac{\left(\frac{s}{\Omega_o}\right) \Omega_o L}{R_o} \quad \frac{1}{s_n C_n} = \frac{1}{\frac{s}{\Omega_o} \Omega_o C R_o} \quad (2.13)$$

y por tanto, los valores normalizados son:

$$R_n = \frac{R}{R_o} \quad L_n = L \frac{\Omega_o}{R_o} \quad C_n = C \Omega_o R_o \quad (2.14)$$

## 2.4 Sensibilidad

En el proceso de síntesis, el diseñador debe seleccionar la mejor de las distintas configuraciones disponibles, para ello debe tener en cuenta que en la práctica los componentes reales se desvían respecto a sus valores nominales. Las desviaciones se deben a:

- a) tolerancias en los procesos de fabricación
- b) variaciones debidas a factores ambientales
- c) cambios químicos debidos al envejecimiento.
- d) falta de precisión en el modelado de los dispositivos

Ya que todos los coeficientes, y por tanto los polos y ceros, de una función de sistema  $H(s)$  dependen de los elementos del circuito, es de esperar que el comportamiento del filtro se desvíe de su comportamiento ideal. La magnitud del error dependerá de las tolerancias de los elementos y de la sensibilidad del comportamiento del circuito a estas tolerancias.

El concepto de sensibilidad es uno de los criterios más importantes para comparar configuraciones de circuitos y para establecer su utilidad práctica para satisfacer unas determinadas especificaciones ya que permite:

- a) seleccionar la mejor topología entre todas las disponibles
- b) saber si el circuito satisface y seguirá satisfaciendo las especifica-

ciones en el futuro.

Dado un cierto componente  $x$  cualquier característica  $P$  del circuito dependerá de  $x$ . Si  $P$  es una función de transferencia dependerá también de la frecuencia,  $P = P(s, x)$ . Una técnica ampliamente conocida para determinar la desviación de  $P$  debida a un error  $dx = x - x_o$  del elemento  $x$  se obtiene realizando un desarrollo en serie de Taylor de  $P(s, x)$  alrededor de  $x_o$ :

$$P(s, x) = P(s, x_o) + \left. \frac{\partial P(s, x)}{\partial x} \right|_{x_o} dx + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 P(s, x)}{\partial x^2} \right|_{x_o} (dx)^2 + \dots \quad (2.15)$$

Si suponemos que  $(dx/x_o) \ll 1$  y que la curvatura de  $P(s, x)$  alrededor de  $x_o$  no es muy grande pueden desprejarse las derivadas de orden mayor o igual a 2:

$$\Delta P(s, x_o) = P(s, x_o + dx) - P(s, x_o) \cong \left. \frac{\partial P(s, x)}{\partial x} \right|_{x_o} dx \quad (2.16)$$

Normalmente se está más interesado en cambios relativos que en cambios absolutos por lo que es habitual normalizar esta ecuación:

$$\frac{\Delta P(s, x_o)}{P(s, x_o)} \cong \frac{x_o}{P(s, x_o)} \left. \frac{\partial P(s, x)}{\partial x} \right|_{x_o} \frac{dx}{x_o} \quad (2.17)$$

y la cantidad,

$$S_x^P = \frac{x_o}{P(s, x_o)} \left. \frac{\partial P(s, x)}{\partial x} \right|_{x_o} = \left. \frac{\partial P/P}{\partial x/x} \right|_{x_o} = \left. \frac{d(\ln P)}{d(\ln x)} \right|_{x_o} \quad (2.18)$$

es la sensibilidad en pequeña señal del parámetro  $x$ .

También es usual utilizar la sensibilidad semirelativa:

$$Q_x^P = x \frac{dP}{dx} \quad (2.19)$$

que puede ser útil en algunas circunstancias. Por ejemplo, si  $S_x^P$  se evalúa

cerca de un punto donde  $P = 0$ , entonces  $S_x^P \rightarrow \infty$ , que no sirve para nada. Sin embargo, los resultados de  $Q_x^P$  sí pueden ser interpretados. También en algunas situaciones es más interesante la variación absoluta que la variación relativa, como en posiciones de polos y ceros.

El cambio relativo, también llamado variabilidad, de una cierta característica  $P$ ,

$$\frac{\Delta P}{P} \cong S_x^P \frac{dx}{x} \quad (2.20)$$

es  $S_x^P$  veces el cambio relativo del parámetro  $x$  respecto del cual depende  $P$ .

Un buen circuito debería tener sensibilidades pequeñas. En ese caso, para una variabilidad  $\Delta P/P$  aceptable se pueden utilizar elementos con tolerancias  $dx/x$  mayores y por tanto son más económicos. Además, si los componentes varían durante la operación del circuito es más improbable que salgan de la región de aceptabilidad.

De la discusión realizada resaltamos los siguientes puntos:

- El hecho de truncar el desarrollo en serie de Taylor en el segundo término implica sustituir la función  $P(s, x)$  por su pendiente en  $x = x_o$ . En general, esto significa que la sensibilidad  $S_x^P$  sólo proporciona información útil para  $dx/x$  pequeños.
- Si la característica  $P$  depende de la frecuencia, la sensibilidad  $S_x^P$  también es función de la frecuencia por lo que ha de tenerse en cuenta el rango de interés. Por ejemplo, la sensibilidad de una función de transferencia a la ganancia de un amplificador en dc puede ser inútil para conocer la operación del filtro a 10KHz.
- La característica  $P$  dependerá normalmente de más de un parámetro, probablemente de todos los elementos del circuito. Se calcula con el valor nominal de esos elementos por lo que si éste se altera es necesario reevaluar la sensibilidad. Por otra parte, si hay parámetros libres se pueden utilizar para reducir las sensibilidades.
- En último extremo es variabilidad y no sensibilidad el parámetro

importante. Una sensibilidad grande a parámetros muy estables puede ser aceptable mientras que una sensibilidad moderada a elementos de gran tolerancia puede hacer inútil un diseño.

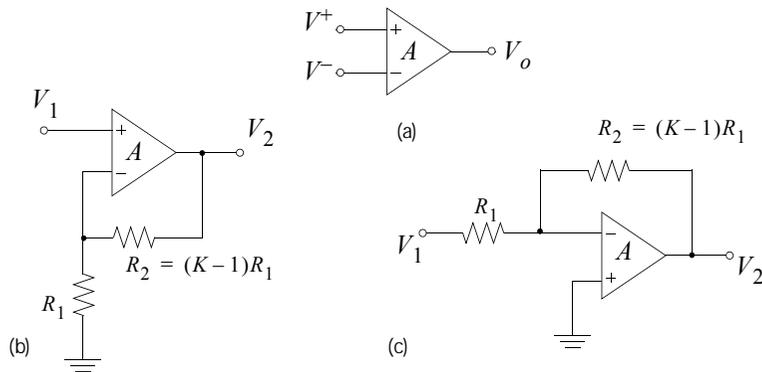
**Producto ganancia-sensibilidad**

El dispositivo activo más usado en el diseño de filtros activos es el amplificador operacional, representado genéricamente en la Fig. 2.11(a). Son amplificadores de alta ganancia, definida por la relación:

$$V_o = A(V_+ - V_-) \tag{2.21}$$

La ganancia en lazo abierto  $A$  es muy grande y tiene una variabilidad  $dA/A$  alta, por lo que los AA. OO. se utilizan siempre en configuraciones realimentadas, con una ganancia en lazo cerrado reducida  $\mu$  y variabilidad menor  $d\mu/\mu$ , tales como las configuraciones inversoras y no-inversoras que se muestran en la Fig. 2.11(b) y Fig. 2.11(c). Como ejemplo del cálculo de la ganancia en lazo cerrado consideremos la Fig. 2.11(b):

$$V_2 = A \left[ V_1 - \frac{R_1}{R_1 + (K-1)R_1} V_2 \right] = A \left( V_1 - \frac{1}{K} V_2 \right) \tag{2.22}$$



**Figura 2.11: (a) Símbolo de opamp; (b) amplificador realimentado en configuración no inversora; (c) amplificador realimentado en configuración inversora.**

de tal manera que:

$$\mu_1 = \frac{V_2}{V_1} = \frac{K}{1 + K/A} \Big|_{K \ll A} \cong K \tag{2.23}$$

De forma similar para la Fig. 2.11(c) se obtiene:

$$\mu_2 = \frac{V_2}{V_1} = -\frac{K-1}{1 + K/A} \Big|_{K \ll A} \cong -(K-1) \tag{2.24}$$

Las sensibilidades de las ganancias en lazo cerrado respecto a la ganancia en lazo abierto resultan:

$$S_A^{\mu_1} = \frac{K/A}{1 + K/A} = \frac{\mu_1}{A} \tag{2.25}$$

$$S_A^{\mu_2} = \frac{K/A}{1 + K/A} \cong -\frac{\mu_2}{A} \quad \text{si } K \gg 1$$

La sensibilidad de  $\mu_i$  respecto a  $A$  aumenta con la ganancia en lazo cerrado  $\mu_i$ . Puede observarse también que la variabilidad de  $\mu_i$  es mucho más reducida que la de  $A$ :

$$\frac{d\mu_i}{\mu_i} = S_A^{\mu_i} \frac{dA}{A} \cong \frac{\mu_i dA}{A^2} \tag{2.26}$$

ya que en la práctica  $\mu_i \ll A$ .

Supongamos una cierta característica de un filtro  $P$  que depende de la ganancia en lazo cerrado de un A.O. Según las ecuaciones anteriores:

$$S_A^P = S_\mu^P S_A^\mu = \frac{\mu}{A} S_\mu^P \tag{2.27}$$

y la variabilidad será:

$$\frac{dP}{P} = (\mu S_\mu^P) \frac{dA}{A^2} = \Gamma_\mu^P \frac{dA}{A^2} \tag{2.28}$$

$dP/P$  es proporcional al producto de ganancia y sensibilidad  $\Gamma_\mu^P$  y al

término  $dA/A^2$  que depende exclusivamente del amplificador usado. Por tanto, la variabilidad de una cierta característica depende no sólo de la sensibilidad sino del producto de ganancia y sensibilidad; la variabilidad no sólo depende de cómo de sensible es  $P$  a  $\mu$ , sino de la magnitud de ganancia en lazo cerrado  $\mu$  necesaria en la implementación. Este producto ganancia-sensibilidad es una medida más representativa para comparar distintos diseños.

Por ejemplo, consideremos un A.O. con  $A = 10^4$  y  $dA/A = 60\%$ . Para un diseño la sensibilidad de una cierta característica  $P$  es  $S_{\mu}^{P_1} = 6$  y tiene  $\mu = 95$ ; para otro diseño la sensibilidad es  $S_{\mu}^{P_2} = 38$  y necesita  $\mu = 4$ . Las variabilidades son:

$$\begin{aligned} \frac{dP_1}{P_1} &= 95 \cdot 6 \cdot 0.6 \cdot 10^{-4} = 3.4\% \\ \frac{dP_2}{P_2} &= 4 \cdot 38 \cdot 0.6 \cdot 10^{-4} = 0.91\% \end{aligned} \quad (2.29)$$

por lo que el segundo diseño es mejor a pesar de tener una sensibilidad mucho más alta.

Como notas finales digamos que el producto ganancia-sensibilidad es igual para la ganancia en lazo cerrado y en lazo abierto:<sup>1</sup>

$$\Gamma_A^P = \Gamma_{\mu}^P \quad (2.30)$$

y de la ecuación (2.28) se deduce que el diseñador de filtros debe escoger AA. OO. con ganancias  $A$ , en el rango de frecuencias de interés, tan altas como sea posible, a fin de reducir el término  $dA/A^2$ .

1. Nota: Para obtener esta igualdad basta observar que:

$$AS_A^P = AS_{\mu}^P S_A^{\mu} = \mu S_{\mu}^P$$

## Problemas resueltos

2.1.- Expresar la siguiente función, que no es de fase mínima, como producto de una función de fase mínima y una función pasa todo:

$$H_{NMP}(s) = \frac{(s^2 + 2s + 6)(s^2 - 4s + 8)(s - 3)}{(s^2 + s + 4)(s^2 + 3s + 7)(s + 1)}$$

**Solución:**

$H_{NMP}(s)$  tiene tres ceros en el semiplano derecho, uno en  $s_1 = 3$  y  $s_{2,3} = 2 \pm j2$ . Aumentamos  $H_{NMP}(s)$  con tres polos y tres ceros que son imágenes especulares de  $s_1, s_2, y s_3$ :

$$H_{NMP}(s) = \frac{(s^2 + 2s + 6)(s^2 - 4s + 8)(s - 3)(s + 3)(s^2 + 4s + 8)}{(s^2 + s + 4)(s^2 + 3s + 7)(s + 1)(s + 3)(s^2 + 4s + 8)} \quad (2.31)$$

Se separa en:

$$H_{AP}(s) = \frac{N_{AP}(s)}{D_{AP}(s)} = \frac{(s - 3)(s^2 - 4s + 8)}{(s + 3)(s^2 + 4s + 8)} \quad (2.32)$$

$$H_{MP}(s) = \frac{N_{MP}(s)}{D_{MP}(s)} = \frac{(s + 3)(s^2 + 4s + 8)(s^2 + 2s + 6)}{(s + 1)(s^2 + s + 4)(s^2 + 3s + 7)}$$

y  $H_{NMP}(s) = H_{MP}(s)H_{AP}(s)$ . El precio pagado es un aumento del orden de la función de sistema en el número de ceros en el semiplano derecho.

2.2.- El circuito de la Fig. 2.12 implementa una función de transferencia de segundo orden paso de banda con una frecuencia central  $f_o = 3\text{kHz}$  y un factor de calidad  $Q = 20$ . Hallar los valores correspondientes de los elementos y calcular las sensibilidades  $S_x^{\omega_o}$  y  $S_K^Q$ , donde  $x$  representa cualquier elemento pasivo.  $K$  es la ganancia, positiva, de un

amplificador de tensión. Ignorar su ancho de banda.

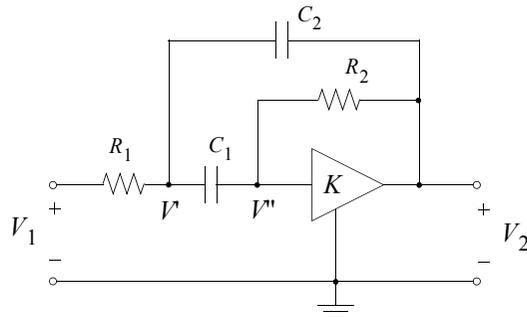


Figura 2.12: Filtro paso de banda de segundo orden.

### Solución:

Suponemos  $C_1 = C_2 = C$ .

Escribiendo las ecuaciones nodales del circuito se obtiene:

$$H(s) = \frac{V_2}{V_1} = -\frac{K}{K-1} \frac{s/R_1 C}{s^2 + s\left(\frac{2}{R_2 C} - \frac{1}{R_1 C K - 1}\right) + \frac{1}{R_1 R_2 C^2}} \quad (2.33)$$

Comparando esta ecuación con la expresión convencional de una función de transferencia de segundo orden se obtiene para la frecuencia central y el factor de calidad:

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{C^2 R_1 R_2}} \quad Q = \frac{r}{2 - r^2 / (K - 1)} \quad (2.34)$$

donde

$$r = \sqrt{\frac{R_2}{R_1}} \quad (2.35)$$

Puede observarse que  $\omega_o$  es independiente de la ganancia del amplificador  $K$  por lo que,

$$S_K^{\omega_o} = 0 \quad (2.36)$$

lo que es muy conveniente.

Por otra parte:

$$S_{R_i}^{\omega_o} = \frac{R_i}{\omega_o} \frac{\partial \omega_o}{\partial R_i} = -\frac{1}{2} \quad S_C^{\omega_o} = \frac{C}{\omega_o} \frac{\partial \omega_o}{\partial C} = -1 \quad (2.37)$$

Esta última es  $-1$  porque se ha supuesto  $C_1 = C_2 = C$ . Si  $C_1 \neq C_2$  entonces

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{C_1 C_2 R_1 R_2}} \quad (2.38)$$

$$y \quad S_{C_i}^{\omega_o} = -\frac{1}{2} \quad (2.39)$$

Es interesante hacer notar que haciendo un análisis dimensional,  $\omega_o$  tiene dimensiones de segundos<sup>-1</sup> por lo que debe ser inversamente proporcional a la raíz cuadrada del producto de dos constantes de tiempo. Luego 0.5 es el valor mínimo que puede tener la sensibilidad de  $\omega_o$  respecto a cualquier elemento pasivo de un filtro activo puede tener. Por tanto, este debe ser un objetivo, además de hacerlo independiente de los parámetros activos.

Tenemos 2 parámetros,  $r$  y  $K$  para obtener  $Q = 20$ . Pueden elegirse arbitrariamente siempre que  $K > 0.5r^2 + 1$  ya que  $Q$  ha de ser positivo. Si elegimos por conveniencia  $r = 1$  (resistencias iguales) se obtiene:

$$Q = \frac{K-1}{2K-3} \quad (2.40)$$

y para que sea  $Q = 20$  debe ser  $K = K_o = 1.5128$ . Esto proporciona la sensibilidad de  $Q$  respecto a  $K$ :

$$S_K^Q = \frac{K \partial Q}{Q \partial K} = \frac{-K}{(K-1)(2K-3)} \Big|_{K_0} = -115 \quad (2.41)$$

de manera que un cambio en la ganancia del amplificador de tan solo un 0.25% produce un cambio de un 28% en  $Q$ . Ya que una precisión de un 0.25% en dispositivos activos raramente se consigue esta circuito es inútil. Está claro que es debido a la fuerte pendiente de  $Q$  en las proximidades del polo en  $K = 1.5$ . Obsérvese que una disminución de la ganancia  $K_0$  en sólo un 0.85% produce oscilaciones ya que  $Q$  es negativo para  $K < 1.5$ .

Recordando lo dicho en el punto (a) puede observarse que un cambio de un 0.5% no es pequeño en este caso, ya que (2.41) predice una variación de  $\pm 57\%$  en el valor de  $Q$  mientras que la aplicación de (2.40) muestra unos errores reales de  $-36\%$  y  $140\%$ .

Antes de calificar inútil este circuito recordemos el punto (c) en el que se decía que la sensibilidad es función de todos los elementos y cambia si cambian los valores nominales. Dejando  $r$  como parámetro libre vamos a recalcular la sensibilidad de  $Q$ :

$$S_K^Q = -rQ \frac{K}{(K-1)^2} \quad (2.42)$$

Despejando  $1/(K-1)$  de (2.34) y sustituyendo en (2.42) se obtiene:

$$S_K^Q = 1 + \frac{4}{r^2} - \frac{1}{rQ} - \frac{2Q}{r} \left(1 + \frac{2}{r^2}\right) \quad (2.43)$$

La Fig. 2.13 muestra la representación de dicha sensibilidad (en valor absoluto) en función de  $r$ . Vemos que  $r = 1$  fue una elección desafortunada ya que la sensibilidad decrece cuando aumenta  $r$ . Una elección más acertada es un valor mayor, por ejemplo,  $r = 6$  que conduce a  $S_K^Q = -5.9$ ; una gran mejora de la sensibilidad al precio de un mayor rango de valores de las resistencias.

La sensibilidad de  $Q$  respecto a  $r$  también decrece cuando aumenta  $r$ :

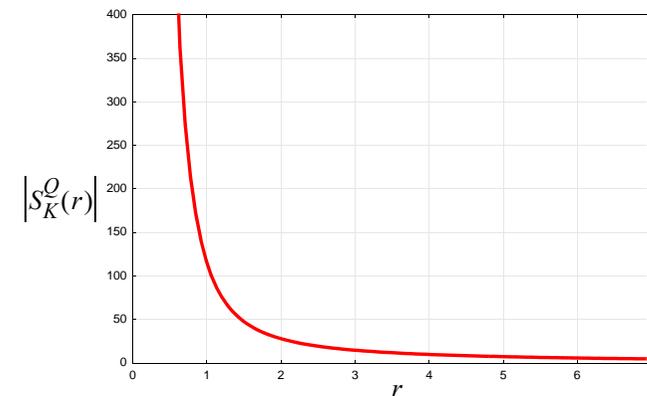


Figura 2.13: Sensibilidad en función de  $r$ .

$$S_r^Q = \frac{4Q}{r} - 1 \quad (2.44)$$

Luego el circuito de la Fig. 2.12 es bueno si se eligen adecuadamente los elementos. Considerando  $r = 6$  y eligiendo  $C = 5\text{nF}$  se obtiene:

$$R_1 = \frac{1}{12\pi f_o C} = 1.768\text{K}\Omega \quad (2.45)$$

$$R_2 = r^2 R_1 = 63.66\text{K}\Omega \quad K = 22.18$$

La ganancia del amplificador ha aumentado pero es fácilmente realizable.

**2.3.-** Considerar el mismo circuito del ejercicio anterior donde el amplificador se ha implementado con la estructura no inversora de la Fig. 2.14. Supongamos que se utiliza en el diseño un A. O. con  $A = 10^4$  y variabilidad  $dA/A = 40\%$ . Calcular la variabilidad  $\Delta Q/Q$  para ambos valores de  $r$ , 1 y 6.

**Solución:**

De la Fig. 2.14 se obtiene la ganancia en lazo cerrado:

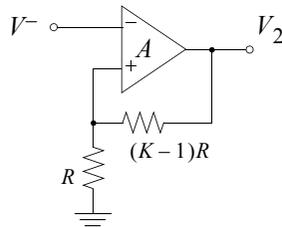


Figura 2.14: Amplificador no inversor de ganancia finita.

$$\mu = \frac{V_2}{V_-} = \frac{K}{1 - K/A} \Big|_{K \ll A} \cong K \tag{2.46}$$

y la sensibilidad resulta:

$$S_A^\mu = -\frac{K/A}{1 - K/A} = -\frac{\mu}{A} \cong -\frac{K}{A} \tag{2.47}$$

Utilizando las ecuaciones (2.42) y (2.34) se obtiene:

$$\frac{\Delta Q}{Q} = S_\mu^Q S_A^\mu \frac{dA}{A} = rQ \left( \frac{K}{K-1} \right)^2 \frac{dA}{A^2} = rQ \left( 1 + \frac{2}{r^2} - \frac{1}{rQ} \right)^2 \frac{dA}{A^2} \tag{2.48}$$

Para los valores del problema se obtiene:

$$\frac{\Delta Q}{Q} \cong \begin{cases} 0.7\% & r = 1 \\ 0.5\% & r = 6 \end{cases} \tag{2.49}$$

A pesar de la gran reducción de  $S_K^Q$  de  $-115$  a  $-5.9$ ,  $\Delta Q/Q$  no ha mejorado mucho debido al aumento de la ganancia en lazo cerrado necesaria.  $r = 6$  es de todas maneras conveniente debido a la reducción de sensibilidades respecto a  $r$  y  $K$ .

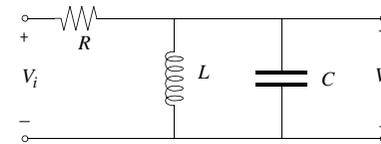
Si se calcula el producto ganancia-sensibilidad resulta:

$$\Gamma_\mu^Q = rQ \left( 1 + \frac{2}{r^2} - \frac{1}{rQ} \right)^2 \tag{2.50}$$

que tiene el mínimo aproximadamente para  $r^2 = 6$ .

## Problemas propuestos

- 2.4.- a) Calcular la sensibilidad de la función de transferencia  $H(s) = V_o(s)/V_i(s)$  del circuito de la figura respecto a cada uno de los elementos de circuito.
- b) Obtener la sensibilidades de  $\omega_o$  y  $Q$  respecto a  $R, L$  y  $C$ .
- c) Obtener la variabilidad de  $\omega_o$  si
- i)  $C$  cambia +5%.
  - ii)  $R$  cambia +5%.



## Apéndice 2.1: Sensibilidad de la función de transferencia

La función de transferencia de un filtro puede expresarse como:

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\sum_j a_j s^j}{\sum_i b_i s^i} \tag{2.51}$$

Si los coeficientes dependen del elemento  $x$ , la sensibilidad de  $H$  respecto de  $x$  es:

$$S_x^H = S_x^N - S_x^D = x \left( \frac{1}{N} \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial x} \right) \tag{2.52}$$

En función de los coeficientes puede expresarse como:

$$S_x^H = \frac{x}{N} \sum_j \frac{\partial a_j}{\partial x} s^j - \frac{x}{D} \sum_i \frac{\partial b_i}{\partial x} s^i \quad (2.53)$$

Es interesante calcular la sensibilidad cuando se expresa la función de transferencia en función de magnitud y fase:

$$H(j\omega, x) = |H(j\omega, x)| e^{j\phi(\omega, x)} \quad (2.54)$$

Por lo que la sensibilidad es:

$$S_x^{H(j\omega)} = S_x^{|H(j\omega)|} + jQ_x^{\phi(\omega)} \quad (2.55)$$

La parte real de la sensibilidad de la función de transferencia (como función de  $j\omega$ ) es la sensibilidad de la magnitud y la parte imaginaria es la sensibilidad semirelativa de la fase.

La variación de los coeficientes dará lugar a desplazamientos de los polos y ceros. Es interesante estudiar el efecto de estos desplazamientos en  $H(s)$ . Tomando logaritmos en la expresión convencional de la función de transferencia en función de polos y ceros:

$$\ln H = \ln K + \sum_{i=1}^m \ln(s - z_i) - \sum_{i=1}^n \ln(s - p_i) \quad (2.56)$$

donde  $K = a_m/b_n$ . Tomando derivadas y multiplicando por  $x$  se obtiene:

$$S_x^H = S_x^K - \sum_{i=1}^m \frac{Q_x^{z_i}}{s - z_i} + \sum_{i=1}^n \frac{Q_x^{p_i}}{s - p_i} \quad (2.57)$$

Tal como era de esperar puede observarse que los desplazamientos de polos y ceros afectan más en las proximidades de ese polo o cero (el denominador es pequeño). La sensibilidad de la función de transferencia tendrá magnitud grande para frecuencias cercanas a los polos y ceros. En particular, para frecuencias  $s = j\omega$ , la sensibilidad tenderá a  $\infty$  en los ceros

de transmisión en el eje  $j\omega$ . También ocurrirá así para pares de polos con factor de calidad  $Q$  grande.

Reduciendo a denominador común se observa que  $S_x^H$  tiene polos en todos los polos y ceros de  $H(s)$  (también se observa en (2.52)). La ecuación es la expansión parcial en fracciones de  $S_x^H$  por lo que las sensibilidades semirelativas de los polos y ceros  $Q_x^{p_i}$  y  $-Q_x^{z_i}$  son los residuos de los polos  $p_i$  y ceros  $z_i$  de  $S_x^H$ .