

TEMA 1

REPRESENTACIÓN Y RESPUESTA DE CIRCUITOS L. T. I. DE TIEMPO CONTINUO

1.1 Análisis y síntesis de circuitos

Un **circuito eléctrico** es un ente físico que soporta campos eléctricos y magnéticos y flujos de corriente, con un conjunto de puntos accesibles (*terminales*) donde aplicar *señales de excitación* y/o medir *señales respuesta* y que puede modelarse en primera aproximación como una interconexión de elementos idealizados que satisfacen las leyes de Kirchoff e imponen a su vez relaciones entre las tensiones e intensidades asociadas a los mismos.

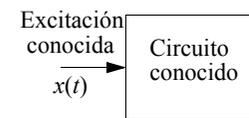
El **análisis de circuitos** consiste en el desarrollo de procedimientos sistemáticos, que permitan obtener la señal de respuesta para cualquier señal de excitación, siguiendo un método unificado.

Otro aspecto importante del análisis de circuitos se refiere al estudio de *efectos de segundo orden* y a la *acotación de los rangos de validez de los resultados proporcionados por los modelos idealizados*, consistentes en la interconexión de elementos abstractos.

Síntesis y diseño se refieren a la elección de una interconexión de elementos de circuito y de un conjunto de valores de los elementos de manera que el sistema muestre un determinado comportamiento, es decir, una cierta relación entre excitación y respuesta (Fig. 1.1(b))

Dos conceptos importantes relacionados con la síntesis son los de

a) ANÁLISIS



b) SÍNTESIS Y DISEÑO

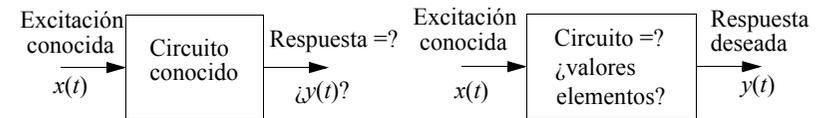


Figura 1.1: Ilustrando los conceptos de análisis, síntesis y diseño

aproximación y realizabilidad. La aproximación precede siempre a la síntesis y consiste en sustituir la funcionalidad o comportamiento que se desea sintetizar mediante otro lo más cercano posible y que sea realizable con los componentes físicos disponibles (llamados genéricamente *primitivas* del proceso de síntesis y diseño). De igual modo, dado un conjunto de primitivas de diseño sólo son realizables ciertas funcionalidades.

1.2 Clasificación de circuitos (y sistemas)

Lineales ó No lineales

Los circuitos lineales son aquellos compuestos exclusivamente por elementos lineales. Un elemento lineal es aquel en el que la relación entre la caída de tensión entre sus terminales y la intensidad de la corriente que fluye a través de ellas puede describirse mediante ecuaciones integro-diferenciales lineales.

De tiempo continuo ó de tiempo discreto

Para los circuitos de tiempo continuo,

$$y(t) = f[x(t)] \quad (1.1)$$

tanto la señal de entrada como la de salida están definidas para cualquier

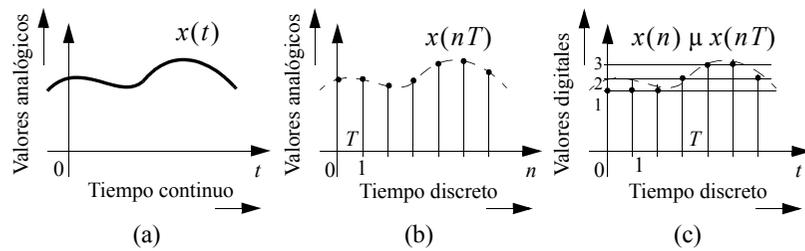


Figura 1.2: Formatos de señal para circuitos (y sistemas).

instante de tiempo (Fig. 1.2(a)).

Por el contrario, en los circuitos de tiempo discreto

$$y(n) = f[x(n)] \quad n = \dots - 2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \quad (1.2)$$

la señal de entrada y la salida están definidas sólo en un conjunto discreto de instantes de tiempo, usualmente con separación uniforme entre sí. En esta signatura trataremos con circuitos de tiempo continuo.

Análogos o digitales

En los circuitos analógicos la amplitud de la señal varía sobre un continuo de valores (Fig. 1.2(b)). En los circuitos digitales, la amplitud de las señales sólo puede tomar un conjunto de valores discretos dentro de un intervalo de variación (Fig. 1.2(c)). En la presente asignatura trataremos únicamente con circuitos analógicos.

Pasivos ó Activos

Los circuitos pasivos utilizan exclusivamente elementos pasivos (resistencias, condensadores, bobinas, etc.). Mientras que los circuitos activos emplean algún tipo de elemento activo: fuentes controladas, amplificadores operacionales, transistores, etc. Los elementos activos son aquellos que pueden suministrar energía al circuito.

Invariantes ó variantes en el tiempo

Los circuitos invariantes en el tiempo están formados por elementos invariantes en el tiempo, es decir, aquellos cuyas características no son función del tiempo, al contrario de los circuitos que varían en el tiempo.

De parámetros concentrados o distribuidos

Los circuitos de parámetros concentrados son aquellos en los que las dimensiones del circuito son pequeñas comparadas con la longitud de onda de las señales que procesan.

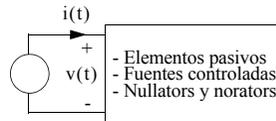
1.3 Representación entrada-salida de sistemas LTI

Nos concentraremos en circuitos LTI analógicos, de tiempo continuo y de parámetros localizados. Estos circuitos estarán constituidos por la interconexión de elementos lineales invariables en el tiempo y de fuentes independientes. Las fuentes independientes son elementos no-lineales y/o variables en el tiempo, pero sus tensiones e/o intensidades jugarán el papel de excitaciones del circuito.

Consideraremos, sin pérdida de generalidad, el caso de una única excitación y una única respuesta, circuitos de una entrada y una salida, ya que por el principio de superposición cualquier otro se puede reducir a éste.

La pregunta básica que surge es: ¿cómo se relacionan entrada y salida en este tipo de circuitos?

Los componentes últimos de estos circuitos pueden modelarse mediante elementos de circuito (resistencias, condensadores, opamps, etc.). A este nivel la representación de la operación se realiza usando las leyes de Kirchoff y las relaciones constitutivas impuestas por los elementos. Sin embargo, en ocasiones puede ser conveniente representar el circuito a un nivel de abstracción más alto. Esto se consigue identificando bloques según la función que realicen y usando técnicas de grafos de flujo de señal, donde están implicados distintos operadores analógicos (integración, escalado,

Relaciones o características de punto**Admitancia**

$$x(t) = v(t)$$

$$y(t) = i(t)$$

Impedancia

$$x(t) = i(t)$$

$$y(t) = v(t)$$

Relaciones o características de transferencia**En cortocircuito:** $y(t) = i(t)$

- Transadmitancia
- $x(t) = v(t)$
- Transferencia de corriente
- $x(t) = i(t)$

En circuito abierto: $y(t) = v(t)$

- Transimpedancia
- $x(t) = i(t)$
- Transferencia de tensiones
- $x(t) = v(t)$

Figura 1.3: Tipos de relaciones entrada-salida.

diferenciación, etc.), y cuyas entradas y salidas están ligadas de forma algebraica, en función de la topología del circuito.

Como además, estamos considerando exclusivamente circuítos de parámetros concentrados, los circuitos LTI. de tiempo continuo, tanto si se describen al nivel de las leyes de Kirchoff como mediante interconexión de bloques, quedan representados mediante ecuaciones diferenciales ordinarias lineales con coeficientes constantes (recuérdese que estamos considerando el caso de una única entrada y una única salida):

$$\sum_{i=0}^N b_i \frac{d^i y}{dt^i} = \sum_{j=0}^M a_j \frac{d^j x}{dt^j} \quad (1.3)$$

Dado un circuito y especificadas una entrada (terminal a la que se aplicará la señal de excitación) y una salida (terminal en la que mediremos la señal de respuesta) podemos llegar a una ecuación tal como la anterior aplicando algún método de análisis. Dependiendo de la naturaleza física de

la entrada y la salida podemos considerar hasta 6 situaciones distintas en el agrupamiento entrada-salida, que se ilustran en la Fig. 1.3.

La solución dependerá tanto de la señal de excitación como de las condiciones iniciales en los elementos reactivos. Esto da lugar a la descomposición de la respuesta en respuesta a entrada cero y respuesta a estado cero.

1.4 Respuesta a entrada cero y estado cero

Básicamente, la respuesta de un circuito LTI, entendida como la señal medida en la terminal definida como la salida del circuito a partir de un instante de tiempo que consideraremos inicial, dependerá tanto de la señal de excitación aplicada al circuito a partir del instante inicial, como de la historia del circuito hasta dicho momento, contenida en lo que llamaremos condiciones iniciales, o estado inicial del circuito. De este modo, la respuesta completa del circuito puede descomponerse en una parte realcionada con la excitación. A esta la llamaremos respuesta al estado cero, o bien, respuesta a la entrada. Si el sistema estuviera inicialmente relajado, sólo observaríamos la respuesta a la entrada. Y por otro lado, la respuesta a entrada nula, o, respuesta al estado. Que es la respuesta que se originaría en ausencia de excitación, causada únicamente por la condiciones iniciales. Veámos cómo se obtienen la respuesta al estado cero y a la entrada nula, tanto en el dominio del tiempo como en el dominio de Laplace.

En el dominio del tiempo

Nos planteamos previamente otra cuestión básica: ¿puede expresarse la respuesta a estado cero para una excitación arbitraria a partir de la respuesta a una excitación simple?. De aquí se obtienen dos cuestiones derivadas: (1) ¿puede expresarse una excitación arbitraria como suma de excitaciones simples? y si es así, (2) ¿puede expresarse la respuesta del circuito como

suma de las respuestas a las componentes de la excitación?

Para responder a la primera pregunta recurrimos al concepto de impulso y respuesta al impulso. Por la propiedad de muestreo podemos expresar una entrada arbitraria, a partir del instante $t = 0$, como una convolución de la señal de entrada con la función impulso (delta de Dirac):

$$x(t) = \int_0^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \quad (1.4)$$

O sea, que podemos describir la entrada como una suma de señales simples. Además, podemos definir $h(t)$ como la respuesta del sistema a una excitación $\delta(t)$, o sea, como la respuesta impulsiva del sistema. Puesto que el sistema es lineal, $h(t)$ puede obtenerse a partir de los polos del sistema (concepto que introduciremos más tarde). O sea, que conocemos la salida para cada una de estas señales simples por separado.

Para responder a la segunda pregunta, aplicaremos el principio de superposición, ya que el circuito es LTI, y puesto que la entrada puede definirse como una suma (infinita) de impulsos, y conocemos la respuesta del sistema a un impulso, la respuesta vendrá dada por la integral de convolución:

$$y(t) = \int_0^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad (1.5)$$

En general, para obtener la respuesta a estado cero de un circuito LTI en el dominio del tiempo nos limitaremos a resolver la ecuación diferencial que lo describen (1.3), ya que el procedimiento que seguiríamos para obtener la respuesta impulsiva, $h(t)$, del circuito LTI sería parecido al que emplearíamos para hacer este estudio en el dominio de Laplace.

Para obtener la respuesta a entrada nula, o sea, la respuesta al estado, tendremos dos opciones:

- 1) Introducir las condiciones iniciales como constantes en el proceso de integración de la ecuación diferencial que describe el circuito.
- 2) Considerar las condiciones iniciales en los elementos reactivos como

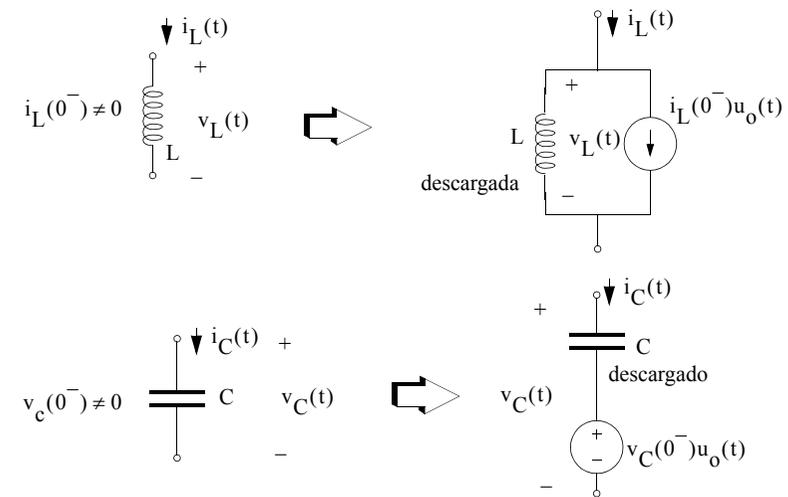


Figura 1.4: Circuito equivalente de un elemento reactivo con condiciones iniciales

fuentes equivalentes (Fig. 1.4) y aplicar el principio de superposición.

En el dominio de la frecuencia

Un método alternativo a la obtención de la respuesta en el dominio del tiempo consiste en aplicar la transformada de Laplace a la ecuación diferencial, para transformarla en una ecuación algebraica, y solucionar el problema en el dominio de Laplace. Es decir, para un $X(s) = L[x(t)]$, obtener $Y(s)$ y finalmente aplicar la transformada inversa para obtener $y(t) = L^{-1}[Y(s)]$ (Fig. 1.5).

Para calcular la respuesta a estado cero en el dominio de Laplace consideraremos, sin pérdida de generalidad, un circuito LTI con una entrada y una salida, descrito por la ecuación:

$$\sum_{i=0}^N b_i \frac{d^i y}{dt^i} = \sum_{j=0}^M a_j \frac{d^j x}{dt^j} \quad (1.6)$$

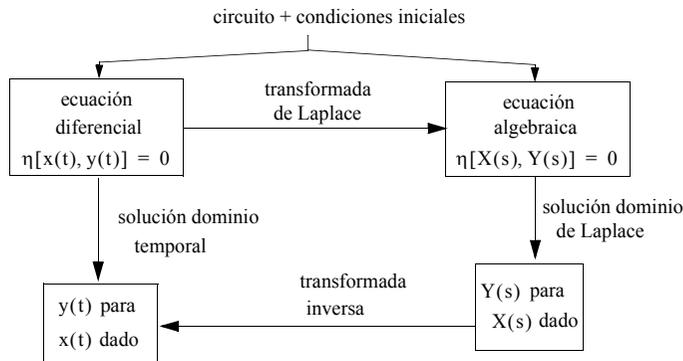


Figura 1.5: Cálculo de la respuesta en los dominios temporal y de Laplace

Debido a que:

$$Y(s) = L[y(t)] \Rightarrow L\left[\frac{d}{dt}y(t)\right] = sY(s) - y(0^-) \quad (1.7)$$

y como, encontrándonos en estado cero:

$$\begin{aligned} y(0^-) = y^{(1)}(0^-) = \dots = y^{(n-1)}(0^-) &= 0 \\ x(0^-) = x^{(1)}(0^-) = \dots = x^{(n-1)}(0^-) &= 0 \end{aligned} \quad (1.8)$$

al aplicar la transformada de Laplace a (1.6) obtenemos:

$$Y(s) = \frac{\sum_{j=0}^m a_j s^j}{\sum_{i=0}^n b_i s^i} X(s) = H(s)X(s) \quad (1.9)$$

En el dominio de la Laplace la salida a estado cero se obtiene multiplicando a la entrada por la función de red (o función de transferencia, o función del sistema) correspondiente. Puesto que:

$$L\left[\int_0^\infty f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right] = F(s)G(s) \quad (1.10)$$

encontramos que la función de sistema correspondiente a una determinada fuente de entrada, y una terminal de salida dada es la transformada de Laplace de la respuesta al impulso:

$$H(s) = L[h(t)] \quad (1.11)$$

En el dominio de la frecuencia hay dos vías para calcular la respuesta a entrada cero:

- 1) Introduciendo las condiciones iniciales en la transformada de la derivada, por la propiedad descrita en la ecuación (1.7).
- 2) Considerando las condiciones iniciales en los elementos reactivos como fuentes equivalentes y aplicando el principio de superposición, como hemos visto en el dominio del tiempo.

1.5 Componentes natural y forzada de la respuesta de sistemas

Para una fuente de entrada y una terminal de salida, una señal de excitación y un estado dados, la respuesta de un sistema es una forma de onda única. Para su estudio resulta conveniente su descomposición en dos partes: la componente natural relacionada, como veremos a continuación, con los polos del sistema y la componente forzada, relacionada con los polos de la excitación.

La función de sistema $H(s)$ relaciona la excitación $X(s)$ con la respuesta a estado cero, $Y(s)$, mediante

$$Y(s) = H(s)X(s) \quad (1.12)$$

Obsérvese que si tuvieramos un estado inicial, aparecerían términos adicionales que contemplarían esta circunstancia.

Si el circuito es lineal, de parámetros concentrados, invariante en el tiempo, $H(s)$ es una función racional real. En gran parte de las situaciones

$X(s)$ es también una función racional real. Si $H(s)$ y $X(s)$ son funciones racionales reales entonces la respuesta $Y(s)$ es también una función racional real:

$$Y(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)} \quad (1.13)$$

donde p_1, p_2, \dots, p_n son los polos finitos de la respuesta. Supongamos que $N(s)$ es de menor o igual orden que $D(s)$. Si suponemos también que todos los polos son simples, la expansión de $Y(s)$ en fracciones simples es,

$$Y(s) = \frac{K_1}{s-p_1} + \frac{K_2}{s-p_2} + \dots + \frac{K_n}{s-p_n} = \sum_{i=1}^n \frac{K_i}{s-p_i} \quad (1.14)$$

donde K_i es el residuo del polo p_i , y viene dado por:

$$K_i = Y(s)(s-p_i) \Big|_{s=p_i} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.15)$$

Si existiera un polo p_i múltiple, pongamos, de multiplicidad m , tendríamos que añadir los sumandos:

$$\frac{K_{i,1}}{s-p_i} + \frac{K_{i,2}}{(s-p_i)^2} + \dots + \frac{K_{i,m}}{(s-p_i)^m} = \sum_{j=1}^m \frac{K_{i,j}}{(s-p_i)^j} \quad (1.16)$$

donde los coeficientes $K_{i,j}$ se calculan según:

$$K_{i,m-j} = \frac{1}{j!} \frac{d}{ds^j} [Y(s)(s-p_i)^m] \Big|_{s=p_i} \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (1.17)$$

Si p_i y K_i son complejos, deben aparecer sus correspondientes complejos conjugados, puesto que $Y(s)$ es una función racional con coeficientes reales.

Prosigamos entonces, considerando que todos los polos son simples. La respuesta en el tiempo puede obtenerse mediante la transformada inversa de (1.14),

$$y(t) = K_1 e^{p_1 t} + K_2 e^{p_2 t} + \dots + K_n e^{p_n t} = \sum_{i=1}^n K_i e^{p_i t} \quad (t > 0) \quad (1.18)$$

Si expresamos todos los K_i complejos como $|K_i| e^{j\theta_i}$ y si consideramos que existen k polos complejos y $(n-k)$ polos reales en $Y(s)$, (1.18) podemos escribir:

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{i=1}^k |K_i| e^{\alpha_i t} e^{j(\beta_i t + \theta_i)} + \sum_{i=k+1}^n K_i e^{\alpha_i t} = \\ &= \sum_{i=1}^k \frac{2|K_i|}{2} e^{\alpha_i t} \cos(\beta_i t + \theta_i) + \sum_{i=k+1}^n K_i e^{\alpha_i t} \end{aligned} \quad (1.19)$$

Esta ecuación muestra que si se excita un sistema con una fuente variable en el tiempo cuya transformada es una función racional y los polos de la respuesta son simples, entonces la respuesta en el dominio del tiempo es la suma de dos clases de formas de onda: sinusoides con amplitud modulada de forma exponencial y exponenciales.

Al margen de esto, los polos de la respuesta $Y(s)$ se dividen en polos de la función de sistema y polos de la excitación. Puede expresarse explícitamente:

$$\begin{aligned} Y(s) &= X(s)H(s) = \frac{N(s)}{D_n(s)D_f(s)} = \\ &= \frac{N(s)}{(s-p_{n1})(s-p_{n2})\dots(s-p_{f1})(s-p_{f2})\dots} \end{aligned} \quad (1.20)$$

donde se usa el subíndice n para los polos de la función de sistema (polos naturales) y f para los polos de la excitación (polos forzados).

Si suponemos que todos los polos son simples y que $N(s)$ es de menor orden que $D(s)$ expandiendo parcialmente en fracciones:

$$Y(s) = \left(\frac{K_{n1}}{s-p_{n1}} + \frac{K_{n2}}{s-p_{n2}} + \dots \right) + \left(\frac{K_{f1}}{s-p_{f1}} + \frac{K_{f2}}{s-p_{f2}} + \dots \right) = \quad (1.21)$$

$$= Y_n(s) + Y_f(s)$$

$Y_n(s)$ es la parte natural de la respuesta dado que los polos asociados con $Y_n(s)$ nacen del propio sistema y sus valores no tienen nada que ver con la excitación; son naturales o característicos del circuito. $Y_f(s)$ es la parte forzada de la respuesta, dado que sus polos dependen de los polos de la excitación y no tienen nada que ver con el circuito; los polos de la excitación fuerzan al sistema a producir la respuesta. Recuérdese que esta es la respuesta e estado cero. La respuesta al estado, que sería por completo natural, puesto que no existiría excitación, aparecería como sumandos adicionales relacionados con los polos naturales.

En el dominio del tiempo (1.21) corresponde a,

$$y(t) = (K_{n1}e^{p_{n1}t} + K_{n2}e^{p_{n2}t} + \dots) + \quad (1.22)$$

$$+ (K_{f1}e^{p_{f1}t} + K_{f2}e^{p_{f2}t} + \dots) = y_n(t) + y_f(t)$$

1.6 Polos y ceros de la función de red

La función de red es una función racional de la frecuencia compleja s . Esto es una propiedad general para circuitos lineales, de parámetros concentrados invariables en el tiempo. Para estos, las funciones de sistema son cocientes de dos polinomios en s con coeficientes reales

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0} \quad (1.23)$$

Las raíces del numerador y denominador son las frecuencias críticas del circuito (las propiedades del circuito pueden derivarse del estudio de estas

frecuencias críticas), A los polos nos referimos con el término frecuencias naturales del circuito. Conocidos el conjunto de frecuencias críticas del circuito podemos expresar la función del sistema en forma factorizada:

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = K \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} \quad (1.24)$$

Aparte de las frecuencias críticas, en el caso de que $m \neq n$ decimos que la función de sistema presenta polos o ceros en el infinito,

$$H(s)|_{s \rightarrow \infty} \rightarrow \frac{a_m}{b_n} s^{m-n} \quad (1.25)$$

de manera que si $m > n$, $H(s)|_{s \rightarrow \infty} \rightarrow \infty$ y se dice que la función de sistema presenta $m - n$ polos en el ∞ , y si $m < n$, entonces $H(s)|_{s \rightarrow \infty} \rightarrow 0$ y se dice que la función de sistema presenta $n - m$ ceros en el infinito.

Para un circuito **activo** las frecuencias críticas pueden estar en cualquier posición en el plano complejo y pueden producirse con cualquier multiplicidad. La única restricción es que las frecuencias críticas complejas deben aparecer por pares complejos conjugados, lo que es consecuencia de que los coeficientes de numerador y denominador sean reales.

Estabilidad

Los valores de las frecuencias críticas determinan los comportamientos cuantitativos y cualitativos de los circuitos. En particular, por lo que se refiere a propiedades cualitativas, una de gran importancia es la estabilidad. Esta propiedad se refiere a que la respuesta del circuito permanezca acotada bajo la hipótesis de que la excitación permanezca también acotada (estabilidad tipo BIBO, *bounded input-bounded output*). Una condición necesaria para estabilidad es que la respuesta impulsiva del circuito permanezca acotada, lo cual se puede traducir en las siguientes condiciones

sobre las localizaciones de las frecuencias naturales:

- a) No pueden existir frecuencias naturales en el semiplano, abierto, de la derecha del plano s .

Supongamos que existiera un polo real en el semiplano derecho del plano s , en concreto en $s = p$, con $p > 0$. Entonces, podríamos describir $H(s)$ como:

$$H(s) = \frac{k}{s-p} + \frac{N'(s)}{D'(s)} \quad (1.26)$$

si realizamos la transformada inversa y pasamos al dominio del tiempo, obtenemos la respuesta impulsiva del sistema:

$$h(t) = ke^{pt} + h'(t) \quad (1.27)$$

El primer término no permanecería acotado ya que $p > 0$.

Consideremos también el caso de que existieran un par de polos complejos conjugados con parte real positiva: $p = \alpha + j\beta$ y $p^* = \alpha - j\beta$, con $\alpha, \beta > 0$. La función de transferencia sería:

$$H(s) = \frac{ke^{j\theta}}{s - \alpha + j\beta} + \frac{ke^{-j\theta}}{s - \alpha - j\beta} + \frac{N'(s)}{D'(s)} \quad (1.28)$$

y con la transformada inversa, para pasar al dominio del tiempo:

$$h(t) = 2ke^{\alpha t} \cos(\beta t + \theta) + h'(t) \quad (1.29)$$

donde el primer término no permanecería acotado ya que $\alpha > 0$.

- b) No pueden existir polos múltiples sobre el eje imaginario.

Consideremos primero que tuvieramos polos múltiples en $s = 0$. La función de transferencia podría escribirse como:

$$H(s) = \frac{k}{s^q} + H'(s) \quad (1.30)$$

y mediante la transformada inversa tenemos la siguiente respuesta impulsiva:

$$h(t) = \frac{k}{(q-1)!} t^{q-1} + h'(t) \quad (1.31)$$

que no permanecería acotada.

Si consideramos ahora un par de polos imaginarios puros múltiples, o sea, polos múltiples complejos conjugados sobre el eje $j\omega$, la función de transferencia se puede escribir:

$$H(s) = \frac{ke^{j\theta}}{(s+j\omega)^q} + \frac{ke^{-j\theta}}{(s-j\omega)^q} + H'(s) \quad (1.32)$$

y para la respuesta impulsiva:

$$h(t) = \frac{2k}{(q-1)!} t^{q-1} \cos(\omega t + \theta) + h'(t) \quad (1.33)$$

Criterio de Routh-Hurwitz

El criterio de Routh proporciona una condición necesaria (que todos los coeficientes sean no nulos y del mismo signo) y una suficiente (que no haya cambios de signo en la primera columna de la tabla que confeccionaremos) para la estabilidad. El número de cambios de signo en la primera columna de la tabla indica el número de raíces del polinomio característico que están situadas en el semiplano derecho.

Para la ecuación resultante de igualar a cero el denominador de la función de sistema:

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n = 0 \quad (1.34)$$

(nótese que hemos renombrado los coeficientes) confeccionamos la siguiente tabla:

$$\begin{array}{c|cccccc}
 s^n & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots \\
 s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots \\
 s^{n-2} & B_1 & B_3 & B_5 & \dots & \dots \\
 s^{n-3} & C_1 & C_3 & C_5 & \dots & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
 \end{array} \quad (1.35)$$

donde:

$$\begin{aligned}
 B_1 &= (a_1 a_2 - a_0 a_3) / a_1 \\
 B_3 &= (a_1 a_4 - a_0 a_5) / a_1 \\
 B_5 &= (a_1 a_6 - a_0 a_7) / a_1 \\
 &\dots \\
 C_1 &= (B_1 a_3 - a_1 B_3) / B_1 \\
 &\dots
 \end{aligned} \quad (1.36)$$

Si se obtiene un cero en la primera columna se puede invertir el orden de los coeficientes del polinomio (1.34). Surge un caso especial cuando aparece una fila que solamente contiene ceros. Esto significa que la ecuación característica tiene al menos un par de raíces de igual magnitud y signo opuesto. Se puede continuar el proceso utilizando un polinomio auxiliar formado por los elementos de la última fila no cero de la tabla y colocando en lugar de la fila de ceros las derivadas de este polinomio.

1.7 Respuesta forzada en régimen sinusoidal estacionario

Vamos a estar interesados, en general, en diseñar circuitos con los polos en el semiplano izquierdo del plano s , con el fin de que la respuesta del

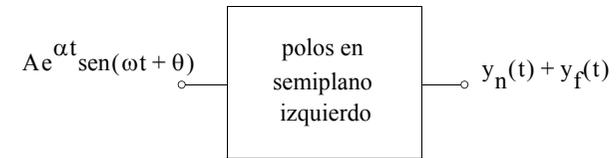


Figura 1.6: Circuito genérico excitado por una señal sinusoidal.

circuito permanezca acotada mientras lo esté la excitación. Asimismo, nos interesa estudiar el comportamiento de estos circuitos en régimen sinusoidal estacionario (r. s. e.), puesto que vamos a ser capaces de expresar cualquier señal periódica como una suma, que puede ser infinita, de senos y cosenos. Supongamos la situación de la Fig. 1.6 en la que el circuito, con polos en el semiplano izquierdo del plano s , es excitado por una señal sinusoidal modulada por una exponencial. En este caso, la respuesta natural se desvanecerá tarde o temprano y permanecerá, tras un periodo de tiempo infinitamente largo, o sea, una vez alcanzado el estado estacionario, la respuesta forzada. Veamos, la transformada de la excitación es:

$$X(s) = \frac{A\omega \cos\theta}{(s-\alpha)^2 + \omega^2} + \frac{A(s-\alpha)\sin\theta}{(s-\alpha)^2 + \omega^2} \quad (1.37)$$

La respuesta completa, por tanto, viene dada por:

$$Y(s) = H(s)X(s) = H(s) \frac{A(s-\alpha)\sin\theta + A\omega \cos\theta}{(s-\alpha)^2 + \omega^2} \quad (1.38)$$

Puesto que sólo nos interesa la respuesta forzada, que es la que se observará una vez alcanzado el r. s. e., sólo consideraremos los términos debidos a los polos $p = \alpha + j\omega$ y $p^* = \alpha - j\omega$:

$$Y_f(s) = \frac{kA}{s-\alpha-j\omega} + \frac{k^*A}{s-\alpha+j\omega} \quad (1.39)$$

donde

$$k = H(\alpha + j\omega) \frac{\omega \cos\theta + j\omega \operatorname{sen}\theta}{2j\omega} = \frac{|H(\alpha + j\omega)|}{2} \frac{e^{j[\theta + \angle H(\alpha + j\omega)]}}{j} \quad (1.40)$$

De este modo, la transformada de la respuesta forzada es:

$$Y_f(s) = \frac{|H(\alpha + j\omega)|}{2} A \left[\frac{e^{j(\theta + \angle H - \frac{\pi}{2})}}{s - \alpha - j\omega} + \frac{e^{-j(\theta + \angle H - \frac{\pi}{2})}}{s - \alpha + j\omega} \right] \quad (1.41)$$

y la respuesta forzada en el dominio del tiempo es:

$$y_f(t) = A |H(\alpha + j\omega)| e^{\alpha t} \operatorname{sen}[\omega t + \theta + \angle H(\alpha + j\omega)] \quad (1.42)$$

El sistema procesa una excitación sinusoidal genérica modulada por una exponencial haciendo dos cosas:

- Modifica la amplitud de la señal de entrada en un factor $|H(\alpha + j\omega)|$
- Modifica la fase en un factor $\angle H(\alpha + j\omega) = \arg[H(\alpha + j\omega)]$

Si aplicamos los resultados anteriores a una señal puramente sinusoidal, o sea, con $\alpha = 0$:

$$x(t) = A \operatorname{sen}(\omega t + \theta) \quad (1.43)$$

la respuesta forzada es:

$$y(t) = A |H(j\omega)| \operatorname{sen}[\omega t + \theta + \angle H(j\omega)] \quad (1.44)$$

Diagrama de Bode

Una herramienta gráfica poderosa para la visualización de la respuesta forzada a una excitación sinusoidal, o sea, la respuesta del sistema en r. s. e., es el diagrama de Bode. Si empleamos la forma factorizada de $H(s)$, y suponemos que nos encontramos en r. s. e., o sea, $s = j\omega$:

$$H(j\omega) = K \frac{\prod_{i=1}^m (j\omega - z_i)}{\prod_{l=1}^n (j\omega - p_l)} \quad (1.45)$$

Consideremos el factor $(j\omega - s_i)$ donde s_i puede ser un cero z_i o un polo p_i . Dado que s_i es en general complejo tendrá parte real e imaginaria, o sea que $s_i = \alpha_i + j\beta_i$. El factor $(j\omega - s_i)$ es entonces

$$-\alpha_i + j(\omega - \beta_i) = M_i e^{j\theta_i} \quad (1.46)$$

donde la magnitud se obtiene mediante:

$$M_i = \sqrt{\alpha_i^2 + (\omega - \beta_i)^2} \quad (1.47)$$

mientras que para el argumento emplearemos:

$$\theta_i = \operatorname{arctg} \frac{\omega - \beta_i}{-\alpha_i} + \operatorname{sgn}(\omega - \beta_i) \left[\frac{1 - \operatorname{sgn}(-\alpha_i)}{2} \right] \pi \quad (1.48)$$

Nótese que con esta definición pretendemos que el argumento de cada número complejo $(j\omega - s_i)$ quede definido dentro del intervalo $[-\pi, \pi]$. Puesto que la función arctg es multivaluada, consideraremos que en (1.48), esta función generará valores dentro del rango $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. El segundo sumando en (1.48) introducirá, a partir de los signos de las partes real e imaginaria, el factor de corrección necesario para que todos los argumentos que obtengamos se encuentren dentro del rango $[-\pi, \pi]$.

Aplicando esto a la forma factorizada de $H(j\omega)$ tenemos por tanto,

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= |K| e^{j\theta_K} \frac{M_{z1} e^{j\theta_{z1}} M_{z2} e^{j\theta_{z2}} \dots M_{zm} e^{j\theta_{zm}}}{M_{p1} e^{j\theta_{p1}} M_{p2} e^{j\theta_{p2}} \dots M_{pn} e^{j\theta_{pn}}} = \\ &= |K| \frac{M_{z1} M_{z2} \dots M_{zm}}{M_{p1} M_{p2} \dots M_{pn}} e^{j(\theta_K + \theta_{z1} + \theta_{z2} + \dots + \theta_{zm} - \theta_{p1} - \theta_{p2} - \dots - \theta_{pn})} = \\ &= M(\omega) e^{j\theta(\omega)} \end{aligned} \quad (1.49)$$

donde $M(\omega)$ es la magnitud de $H(j\omega)$ y $\theta(\omega)$ es la fase.

La idea es expresar la magnitud y la fase $H(j\omega)$ como una suma de contribuciones debidas a las frecuencias críticas del circuito. A este

respecto, la fase ya está dada por definición como suma de contribuciones:

$$\theta_H = \angle K + \sum_{i=1}^M \theta_{z_i} - \sum_{i=1}^N \theta_{p_i} \quad (1.50)$$

Para poder hacer lo mismo con la magnitud, usaremos una representación logarítmica, de manera que nos queda:

$$|H(j\omega)|_{dB} = 20\log_{10}|K| + \sum_{i=1}^M 20\log_{10}M_{z_i} - \sum_{i=1}^N 20\log_{10}M_{p_i} \quad (1.51)$$

Nótese que la unidad utilizada para expresar la magnitud de la función de transferencia en r. s. e. es el decibelio (dB). Dado que, por un lado, se suele medir en dB la transferencia de potencia, y aquí nos estamos refiriendo a la amplitud de las señales, y a que por otro lado, la teoría clásica de aproximación de filtros opera con el cuadrado de la magnitud de la función de transferencia, introducimos aquí un factor 2, multiplicando a $10\log_{10}(\cdot)$.

El cálculo exacto de los diagramas de magnitud y fase, o diagramas de Bode, es un proceso tedioso. Sin embargo, puede obtenerse una representación aproximada con relativa facilidad. En forma factorizada, $N(s)$ y $D(s)$ se componen de los siguientes 3 tipos de términos:

- a) Un término constante K .
- b) Factores del tipo $s + \omega_o$, que representan una raíces reales, y que tendrían como caso extremo y particular los factores del tipo s , que representan raíces en el origen.
- c) Factores del tipo $s^2 + as + b$, que representan pares de raíces complejas conjugadas.

Dado que la magnitud en dB de un producto de términos es igual a la suma de las magnitudes de los factores, el problema de representación de la magnitud de $H(j\omega)$ se reduce a la representación de los términos básicos. La cuestión ahora es familiarizarse la representación de estos términos.

a) El término constante K :

Nos encontramos con que $H(s) = K$, o sea que $H(j\omega) = K$. De

modo que para la magnitud tenemos:

$$|H(j\omega)|_{dB} = 20\log_{10}|H(j\omega)| = 20\log_{10}|K| \quad (1.52)$$

mientras que para la fase:

$$\theta_H(\omega) = -\left(\frac{1 - \text{sgn}K}{2}\right)\pi \quad (1.53)$$

La magnitud $20\log_{10}|K|$ es positiva para $|K| > 1$ y negativa para $|K| < 1$. La función fase es 0° , o bien 0rad , para $K > 0$ y -180° , o bien $-\pi\text{rad}$, para $K < 0$. Ambas se muestran en la Fig. 1.7.

b) Factor del tipo $(s + \omega_o)$:

En esta ocasión, consideraremos que $H(s) = s + \omega_o$, y por tanto $H(j\omega) = j\omega + \omega_o$. Por tanto, la contribución a la magnitud de un término de este tipo sería:

$$|H(j\omega)|_{dB} = 20\log_{10}\sqrt{\omega_o^2 + \omega^2} \quad (1.54)$$

mientras que la contribución a la fase es:

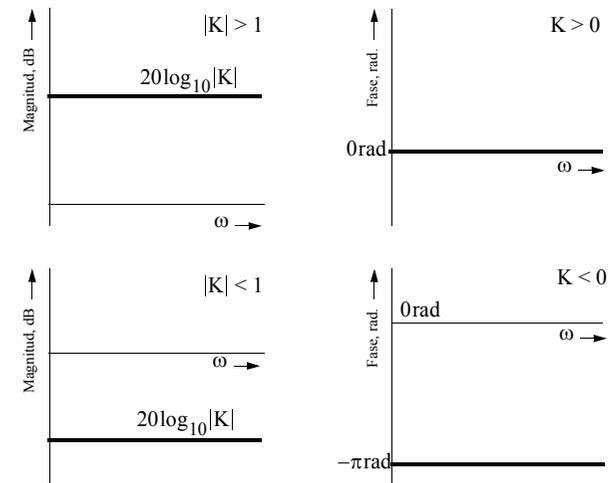


Figura 1.7: Diagrama de magnitud y fase para un término constante.

$$\theta_H(\omega) = \arctg\left(\frac{\omega}{\omega_o}\right) \quad (1.55)$$

Estas contribuciones aparecen representadas en la Fig. 1.8. Es interesante conocer el comportamiento de estas contribuciones a frecuencias muy bajas y muy altas (comportamiento asintótico), ya que esto nos permitirá realizar fácilmente un cálculo aproximado del diagrama de Bode de funciones de transferencia más complicadas. A bajas frecuencias tenemos que:

$$|H(j\omega)|_{\text{dB}} \approx 20\log_{10}\omega_o \quad \text{para} \quad \omega \ll \omega_o \quad (1.56)$$

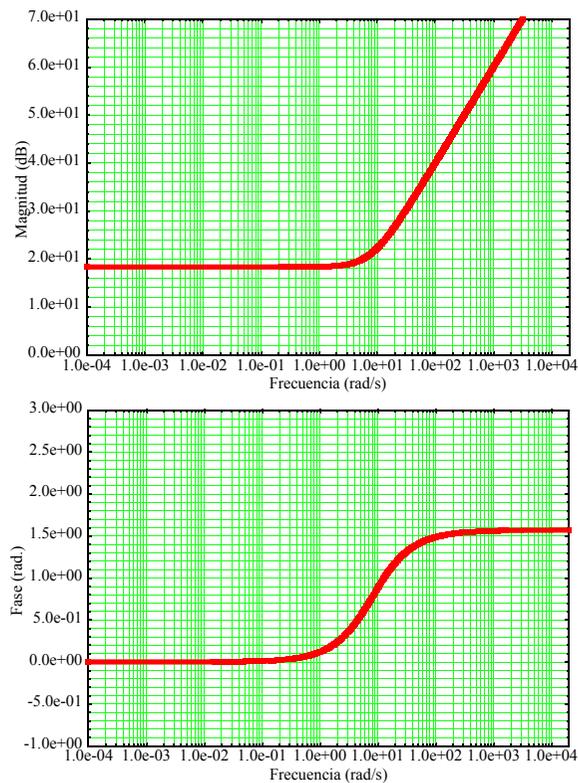


Figura 1.8: Diagrama de magnitud y fase para un factor $(s + \omega_o)$.

de modo que siempre que $|\omega_o| > 1$, este término será positivo, y cuando $|\omega_o| < 1$, $20\log_{10}\omega_o$ será negativo. Mientras, a frecuencias altas:

$$|H(j\omega)|_{\text{dB}} \approx 20\log_{10}\omega \quad \text{para} \quad \omega \gg \omega_o \quad (1.57)$$

o sea que, para frecuencias muy por encima de la frecuencia de la raíz real, ω_o (que en el caso de esta gráfica se ha considerado igual a 8.26 rad/s), la contribución a la magnitud crece con una pendiente 20dB/década, o, lo que es equivalente, 6dB/octava.

En cuanto a la fase, vemos que a bajas frecuencias:

$$\theta_H \approx 0 \quad \text{para} \quad \omega \ll \omega_o \quad (1.58)$$

mientras que a altas frecuencias:

$$\theta_H \approx \frac{\pi}{2} \quad \text{para} \quad \omega \gg \omega_o \quad (1.59)$$

Tanto en el caso de la magnitud como en el de la fase, vemos que los cambios sustanciales en el comportamiento de las contribuciones, se producen alrededor de la frecuencia de la raíz, ω_o . En concreto, para $\omega = \omega_o$ tenemos que:

$$\begin{aligned} |H(j\omega_o)|_{\text{dB}} &= 20\log_{10}\omega_o + 3\text{dB} \\ \theta_H(\omega_o) &= \arctg(1) = \frac{\pi}{4} \end{aligned} \quad (1.60)$$

También resulta de interés hacer una estimación de la bondad de la aproximación de las curvas por sus asíntotas. Para ello evaluaremos las contribuciones a la magnitud y a la fase en $\omega_o/10$ y en $10\omega_o$, así:

$$\begin{aligned} |H(j0.1\omega_o)|_{\text{dB}} &= 20\log_{10}\omega_o + 0.043\text{dB} \\ \theta_H(0.1\omega_o) &= 0.03\pi\text{rad} \end{aligned} \quad (1.61)$$

y por otro lado:

$$\begin{aligned} |H(j10\omega_o)|_{\text{dB}} &= 20\log_{10}\omega_o + 20.043\text{dB} \\ \theta_H(10\omega_o) &= 0.47\pi\text{rad} \end{aligned} \quad (1.62)$$

Puede observarse que el error cometido al aproximar la fase por el comportamiento asintótico es más importante que el de la magnitud.

Antes de pasar al siguiente factor, nótese que la contribución aquí descrita corresponde a la de un cero de la función de transferencia que es real y negativo, a la frecuencia $z = -\omega_o$, ya que como hemos dicho $\omega_o > 0$ (la representación corresponde a un $\omega_o = 8.26 \text{ rad/s}$). Si consideráramos el caso de un cero real, pero positivo (en el semiplano derecho del plano s , o sea, un factor del tipo $(s - \omega_o)$, con $\omega_o > 0$, el diagrama de la contribución en magnitud sería idéntico, mientras que el de la fase sería el resultado de multiplicar esta fase por -1 . Tendríamos una contribución 0 rad a bajas frecuencias y $-\pi/2$ a altas frecuencias.

Asimismo, si en lugar de un cero en el semiplano izquierdo (caso que hemos visto en detalle), se tratara de un polo real en el semiplano izquierdo del plano s , o sea una contribución del tipo:

$$H(s) = \frac{1}{s + \omega_o} \quad (1.63)$$

tendríamos que no sólo la contribución a la fase sería la inversa, sino también la contribución a la magnitud (Fig. 1.9). En el caso de que se tratara de un polo real en el semiplano derecho, la contribución a la magnitud sería la inversa a la del cero, mientras que la contribución a la fase sería la misma que la del cero en el semiplano izquierdo del plano s (Fig. 1.8).

b. 2) Factor del tipo s :

Este factor es un caso particular del anterior que se obtendría haciendo $\omega_o = 0$. Representaría un cero en el origen, o un polo en el origen si se encuentra en el denominador de $H(s)$. De modo que, en el caso de un cero en el origen, tendremos para magnitud y fase:

$$|H(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log_{10} \omega \quad (1.64)$$

$$\text{y } \theta_H(\omega) = \arctg\left(\frac{\omega}{0}\right) = \frac{\pi}{2} \quad (1.65)$$

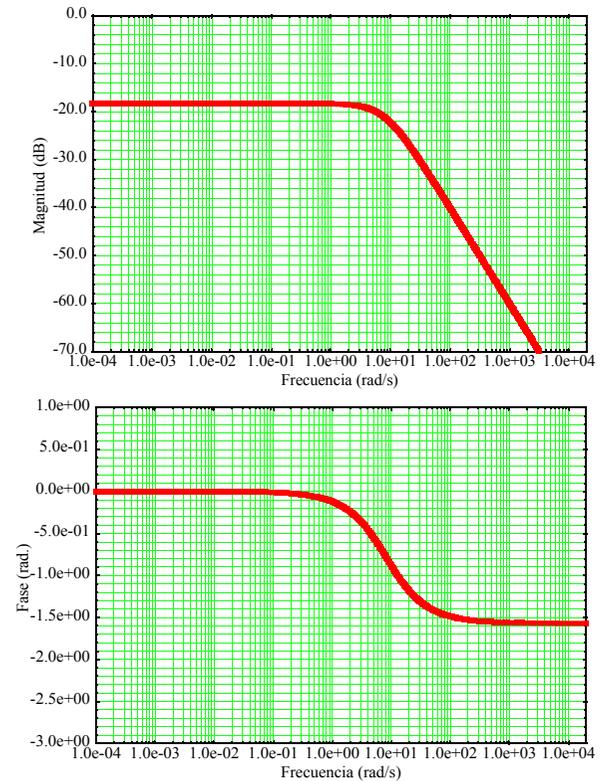


Figura 1.9: Diagrama de magnitud y fase para un factor $(s + \omega_o)^{-1}$.

lo que sería un caso extremo de las contribuciones representadas en las gráficas de la Fig. 1.8 (desplace mentalmente $\log_{10} \omega_o$ hacia $-\infty$).

En el caso de que tuvieramos un polo en el origen, la magnitud y la fase serían las inversas:

$$|H(j\omega)|_{\text{dB}} = -20 \log_{10} \omega \quad (1.66)$$

$$\text{y } \theta_H(\omega) = -\arctg\left(\frac{\omega}{0}\right) = -\frac{\pi}{2} \quad (1.67)$$

o sea, un caso extremo de lo que podemos ver en la Fig. 1.9.

c) Factor del tipo $s^2 + as + b$:

Un factor de este tipo corresponde a un par de raíces complejas conjugadas. Consideremos que dichas raíces están en el semiplano izquierdo del plano s y que, por tanto, pueden expresarse como $z = -\alpha + j\beta$ y $z^* = -\alpha - j\beta$, siendo $\alpha, \beta > 0$. Tendríamos que:

$$H(s) = s^2 + 2\alpha s + \alpha^2 + \beta^2 \tag{1.68}$$

que por comodidad vamos a reescribir así:

$$H(s) = s^2 + \frac{\omega_o}{Q}s + \omega_o^2 \tag{1.69}$$

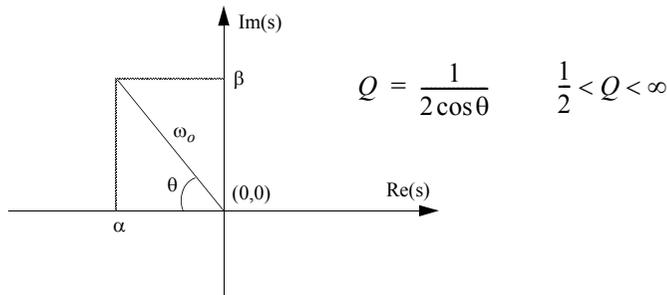
donde hemos definido la frecuencia de polo, o de cero en este caso, $\omega_o = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ y el factor de calidad $Q = \omega_o / (2\alpha)$, que nos da una idea de la magnitud de la parte imaginaria de las raíces, β , con respecto a la real, α , tal como indica la figura:

De modo que:

$$H(j\omega) = (\omega_o^2 - \omega^2) + j\frac{\omega_o\omega}{Q} \tag{1.70}$$

y por tanto, las contribuciones a la magnitud y a la fase de un factor de este tipo serán:

$$|H(j\omega)|_{dB} = 20\log_{10}\sqrt{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega_o\omega}{Q}\right)^2} \tag{1.71}$$



mientras que la contribución a la fase es:

$$\theta_H(\omega) = \arctg\left(\frac{\frac{\omega_o\omega}{Q}}{\omega_o^2 - \omega^2}\right) \tag{1.72}$$

En la Fig. 1.10 podemos ver representadas estas contribuciones a la magnitud y a la fase. En esta ocasión, el comportamiento asintótico de la magnitud será:

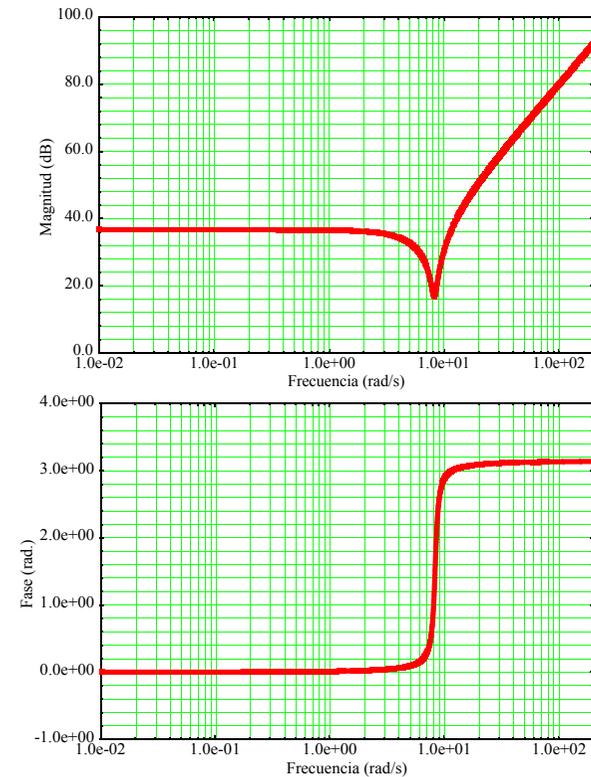


Figura 1.10: Diagrama de Bode para un factor $s^2 + \frac{\omega_o}{Q}s + \omega_o^2$.

$$|H(j\omega)|_{dB} \approx \begin{cases} 40\log_{10}\omega_o & \text{para } \omega \ll \omega_o \\ 40\log_{10}\omega & \text{para } \omega \gg \omega_o \end{cases} \quad (1.73)$$

de modo que a bajas frecuencias tenemos el término $40\log_{10}\omega_o$, que será positivo o negativo en función de si ω_o es mayor o menor que la unidad, respectivamente. Y a altas frecuencias, donde $H(s)$ se aproxima a s^2 , nos encontramos con que la función crece a razón de 40dB/década, ya que tenemos dos polos.

Para la fase, tenemos

$$\theta_H(\omega) \approx \begin{cases} 0\text{rad} & \text{para } \omega \ll \omega_o \\ \pi\text{rad} & \text{para } \omega \gg \omega_o \end{cases} \quad (1.74)$$

Alrededor de la frecuencia de cero (o de polo, según el caso), ω_o , encontramos un comportamiento bastante diferente a lo observado hasta ahora. Podemos determinar la posición del mínimo mediante esta ecuación:

$$\frac{d}{d\omega} \left[(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega_o\omega}{Q} \right)^2 \right] = 0 \quad (1.75)$$

resolviendola llegamos a que:

$$\begin{aligned} \omega_{\min} &= \omega_o \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} & \text{si } Q > \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \omega_{\min} &= 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{aligned} \quad (1.76)$$

Si ocurre que $(1/2Q^2) \ll 1$, entonces podemos considerar que $\omega_{\min} \cong \omega_o$. La magnitud de la función de transferencia a la frecuencia de cero, ω_o , es:

$$|H(j\omega_o)|_{dB} = 40\log_{10}\omega_o - 20\log_{10}Q \quad (1.77)$$

por lo que Q determina la profundidad del mínimo. Por otro lado, la fase es:

$$\theta_H(\omega_o) = \arctg\left(\frac{\omega_o^2/Q}{0}\right) = \frac{\pi}{2} \quad (1.78)$$

Obsérvese que:

$$\frac{d}{d\omega} [\theta_H(\omega)] \Big|_{\omega=\omega_o} = 2\frac{Q}{\omega_o} \quad (1.79)$$

de modo que Q determina también la pendiente de la fase al pasar por $\omega = \omega_o$. De modo que a mayor factor de calidad, mayor profundidad del mínimo y más abrupto el paso por ω_o de la fase (Fig. 1.11). Para $Q > 5$ el mínimo en la magnitud ocurre prácticamente en ω_o . Para $Q < 1/\sqrt{2}$, la función no exhibe ningún pico y el mínimo viene dado por el valor en dc

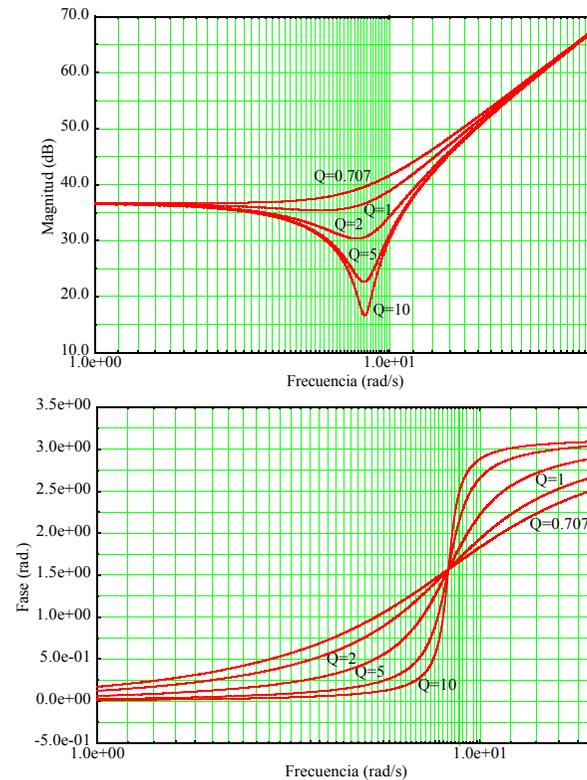


Figura 1.11: Diagrama de Bode para un factor $s^2 + \frac{\omega_o}{Q}s + \omega_o^2$ con diferentes Q .

Consideremos ahora $|H(j\omega)|$ para las frecuencias:

$$\omega_1 = \omega_o \left(1 \pm \frac{1}{2Q}\right) \quad (1.80)$$

Sustituyendo en (1.71) se tiene:

$$|H(j\omega_1)|_{\text{dB}} = 40\log_{10}\omega_o + 20\log_{10}\sqrt{\left(\pm\frac{1}{Q} + \frac{1}{4Q^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{Q} \pm \frac{1}{2Q^2}\right)^2} \quad (1.81)$$

Si $Q \gg 1$, $1/Q^2$ puede despreciarse respecto a $1/Q$, entonces,

$$|H(j\omega_1)|_{\text{dB}} = 40\log_{10}\omega_o - 20\log_{10}Q + 20\log_{10}\sqrt{2} \quad (1.82)$$

Comparando esta ecuación con (1.77) puede observarse que la magnitud en (1.81) está 3dB por encima del valor máximo. Luego el coeficiente de s en (1.69) podría considerarse el ancho de banda de 3dB del circuito si se emplea como un filtro, rechazo de banda, de 2º orden:

$$\text{Ancho de banda} = bw = \frac{\omega_o}{Q} \quad (1.83)$$

De forma análoga, nos podríamos haber planteado el estudio de un factor del tipo $[s^2 + (\omega_o/Q)s + \omega_o^2]^{-1}$, que correspondería a un par de polos complejos conjugados, con parte real negativa, o sea, en el semiplano izquierdo del plano s . La contribución de este factor a la magnitud sería la inversa de la obtenida para el par de ceros complejos conjugados. Lo mismo pasa para la fase (Fig. 1.12). Igualmente, si se tratara de un par de ceros complejos conjugados en el semiplano derecho del plano s , la contribución en la magnitud sería la de la Fig. 1.10, mientras que la contribución a la fase, sería la de la Fig. 1.12 (ya que Q sería negativo). Si se tratara de un par de polos complejos conjugados en el semiplano derecho del plano s , la contribución a la magnitud sería la de la Fig. 1.12, mientras que la contribución a la fase sería la de la Fig. 1.10.

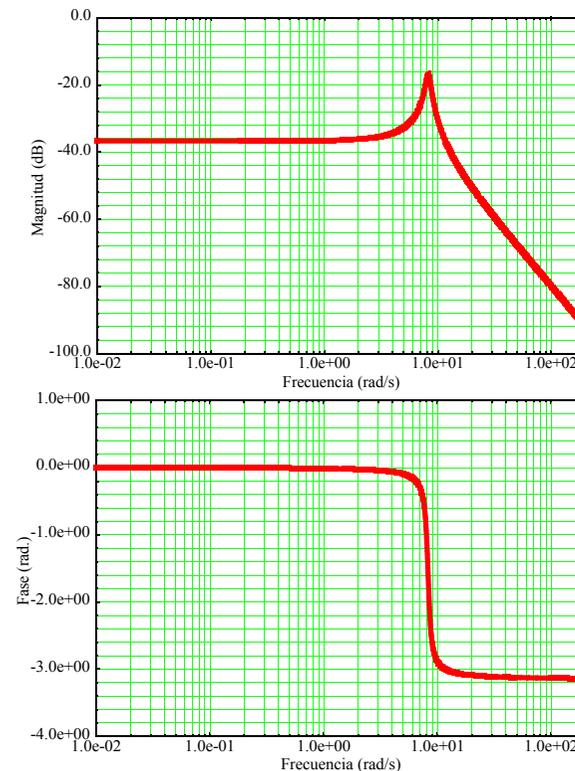


Figura 1.12: Diagrama de Bode para un factor $\left(s^2 + \frac{\omega_o}{Q}s + \omega_o^2\right)^{-1}$.

1.8 Evolución tecnológica de los filtros

Es difícil encontrar un sistema de comunicaciones o un instrumento de medida que no contenga algún tipo de filtrado de señal. Anualmente se producen en el mundo millones de filtros de audiofrecuencia. Entre 1920 y 1960 la mayoría de los filtros de audio se realizaban utilizando circuitos discretos RLC. Ya en los años 50 se empezó a pensar que se podría reducir

el tamaño y el coste de los filtros reemplazando los inductores (grandes y caros) por circuitos activos. Esta sustitución se basa en la idea de que un circuito constituido por resistencias, condensadores y algún elemento activo (transistores, amplificadores operacionales, tubos de vacío, etc.) puede exhibir resonancia (pares de polos complejos conjugados, factores de calidad altos y por tanto transiciones abruptas en magnitud y en fase que permiten una mayor selectividad en el filtro) tal como lo hacen los circuitos RLC. Estos circuitos permanecieron dentro del contexto académico hasta que a mediados de los años 60 aparecieron los primeros amplificadores operacionales, componentes activos de buena calidad y baratos. Aunque en ese momento la reducción de tamaño no fue muy significativa se consiguió tener filtrado y amplificación simultáneamente. La reducción en el coste comenzó a principios de los años 70 con la aparición de las primeras tecnologías integradas (Híbrido ICs) que redujo el coste de fabricación a la mitad. El avance de las tecnologías de circuitos integrados supuso aún mayores reducciones de coste y tamaño. Hoy día se realizan filtros activos en tiempo continuo completamente integrados en tecnologías VLSI, filtros basados en técnicas de condensadores en conmutación y filtros digitales basados en procesadores digitales de señal (DSPs).

Circuitos (filtros) pasivos. La Fig. 1.13(a) muestra un ejemplo de filtro pasivo, construido por una interconexión de bobinas, resistencias y condensadores. En particular, la figura muestra un filtro paso de baja. Hasta bien entrados los años 60 este tipo de filtros se usó de modo predominante, aunque presentaba el inconveniente de ocupar mucho espacio para aplicaciones de audio, debido al tamaño de las bobinas. Además, la reproducibilidad del circuito es pobre, haciendo necesario el manufacturado manual y la selección por medidas.

Los elementos son poco sensibles por lo que pueden conducir altas intensidades, son muy usados aún en la actualidad en el diseño de fuentes de alimentación.

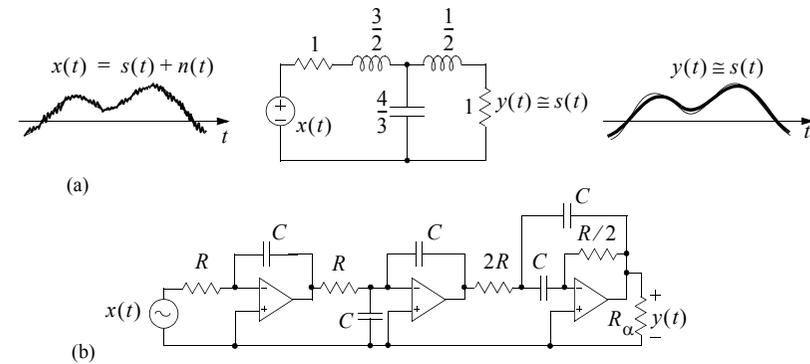


Figura 1.13: Ejemplos de síntesis pasiva(a) y activa (b).

Circuitos (filtros) activos. Los avances en electrónica han reducido enormemente el tamaño de resistencias y condensadores; no así el de inductores. Por otra parte, los inductores son caros, tienen pérdidas, tienen no-linealidades importantes, no pueden aislarse adecuadamente. Los problemas de los filtros pasivos determinaron su sustitución progresiva mediante circuitos que evitaban las bobinas y las reemplazaban mediante interconexiones de elementos activos, resistencias y condensadores. Sin embargo, esto no pudo realizarse de forma práctica hasta que hubo amplificadores operacionales baratos y precisos (a mediados de los 60 aparecía el antecesor del 741). Antes de la invención del transistor la síntesis activa no era usual porque los tubos de vacío, los elementos disponibles en ese momento, eran caros, poco fiables, muy grandes y consumían mucha energía. La evolución en reducción de tamaño y coste de los procesos de integración ha continuado imparable hasta la actualidad. En relación con los filtros activos se han desarrollado distintas técnicas de síntesis, entre las que se encuentran la emulación de prototipos pasivos. Otras alternativas son la emulación directa (usando giradores) o la síntesis mediante conexión de etapas bicuadráticas, entre otras (Fig. 1.13(b)).

Además de evitar las bobinas, los filtros activos permiten mayor funcionalidad, proporcionan amplificación y, si se manufacturan de forma monolítica, su producción puede ser automatizada, con las consiguientes ventajas de reducir el coste y los errores.

Filtros digitales. El diseño ha comenzado una nueva era con los avances en circuitos integrados y microprocesadores. Hoy en día es posible realizar digitalmente la mayoría de las funciones de procesamiento, hacerlo económicamente y en tiempo real, con las ventajas de los circuitos digitales: mayor insensibilidad a ruidos, mayor robustez en la implementación, etc. Como ejemplo el circuito de la Fig. 1.14 realiza la misma función que el de la Fig. 1.13(a).

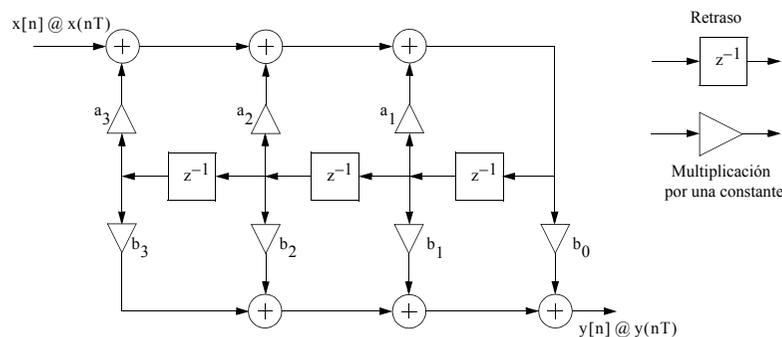


Figura 1.14: Ejemplo de síntesis digital.

La entrada del filtro son las muestras $x(nT)$ de una señal $x(t)$ y la salida las muestras $y(nT)$ de la respuesta deseada. El filtro está compuesto de elementos de retardo (registros de desplazamiento), multiplicadores y sumadores. Es un minicomputador simulando digitalmente las operaciones que intervienen en un sistema analógico. En este contexto, simulación digital es el diseño de un sistema digital que realiza las mismas funciones que un sistema analógico dado. En este sentido el filtro digital de la Fig. 1.14 es un simulador digital del filtro analógico de la Fig. 1.13(a).

Puesto que en esta asignatura nos centraremos en filtros en tiempo continuo, pasivos y activos, es conveniente sistematizar las ventajas e inconvenientes que ambos tipos de filtros presentan en la actualidad. Los filtros activos proporcionan las siguientes ventajas:

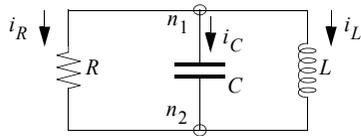
- 1) El tamaño y peso se ha visto enormemente reducido respecto a los equivalentes pasivos.
- 2) La fiabilidad de los circuitos es mucho mayor ya que los pasos de fabricación pueden automatizarse totalmente.
- 3) En grandes cantidades el coste de los filtros activos integrados es mucho más bajo que el de los equivalentes pasivos.
- 4) El comportamiento es mejor porque se pueden fabricar componentes de muy alta calidad.
- 5) Se puede integrar filtros activos y circuitería digital en el mismo chip.
- 6) El diseño y ajuste suele ser más simple.
- 7) Pueden realizar un conjunto más amplio de funciones de filtrado.
- 8) Pueden proporcionar amplificación.

Sin embargo, presentan también algunos inconvenientes respecto a las realizaciones pasivas:

- 1) Los componentes activos tienen un ancho de banda finito lo que limita su rango de aplicaciones. Por el contrario, los filtros pasivos pueden usarse sin problemas hasta altas frecuencias.
- 2) Los filtros pasivos son menos sensibles a cambios de los procesos de fabricación o incluso ambientales.
- 3) Los filtros activos requieren fuentes de alimentación.
- 4) La amplitud que los dispositivos activos pueden procesar con distorsión aceptable se limita a niveles alrededor de 1 V. Por otra parte, las resistencias y los dispositivos activos generan ruido. Por tanto, el rango dinámico es reducido respecto al de circuitos pasivos.

Problemas resueltos

1.1.- Sea el circuito mostrado en la figura donde las condiciones iniciales son $v_c(0) = V_o$ e $i_L(0) = I_o$. Obtener la respuesta a entrada cero para la intensidad en la bobina.



Solución:

En el dominio del tiempo:

Para estos elementos tenemos las siguientes relaciones constitutivas:

$$i_R = \frac{v_c}{R} \quad i_c = C \frac{dv_c}{dt} \quad L \frac{di_L}{dt} = v_c \quad (1.84)$$

y por otro lado el análisis nodal nos daría:

$$i_R + i_L + i_c = 0 \quad (1.85)$$

Sustituyendo las expresiones en (1.84) y dado que la respuesta de nuestro sistema es i_L llegamos a la siguiente ecuación diferencial:

$$LC \frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{L di_L}{R dt} + i_L = 0 \quad (1.86)$$

Las soluciones de esta ecuación son:

$$i_L(t) = k_1 e^{\alpha_1 t} + k_2 e^{\alpha_2 t} \quad (1.87)$$

donde $\alpha_{1,2} = -\frac{1}{2RC} \pm \frac{1}{2RC} \sqrt{1 - \frac{4R^2 C}{L}}$ si $\alpha_1 \neq \alpha_2$ (1.88)

o bien:

$$i_L(t) = (k_1 + k_2 t) e^{\alpha t} \quad (1.89)$$

donde $\alpha = -\frac{1}{2RC}$ si $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ (1.90)

los valores de las constantes k_1 y k_2 habrán de obtenerse a partir de las condiciones iniciales, $i_L(0) = I_o$ y $(di_L/dt)(0) = V_o/L$:

$$k_1 = \frac{-\alpha_2 I_o + V_o/L}{\alpha_1 - \alpha_2} \quad y \quad k_2 = \frac{\alpha_1 I_o - V_o/L}{\alpha_1 - \alpha_2} \quad (1.91)$$

para (1.87) o bien:

$$k_1 = I_o \quad y \quad k_2 = -\alpha I_o + V_o/L \quad (1.92)$$

para (1.89).

En el dominio de la frecuencia:

Las ecuaciones constitutivas pasan a ser:

$$\left. \begin{aligned} I_R(s) &= \frac{V_c(s)}{R} \\ I_c(s) &= sCV_c(s) - CV_o \\ sLI_L(s) - LI_o &= V_c(s) \end{aligned} \right\} \quad (1.93)$$

donde $I_R(s) = L[i_R(t)]$, $I_c(s) = L[i_c(t)]$, $I_L(s) = L[i_L(t)]$ y $V_c(s) = L[v_c(t)]$. Estas ecuaciones ya incluyen las condiciones iniciales de los elementos reactivos. Con lo cual, aplicando la ley de Kirchoff de las intensidades:

$$I_R(s) + I_c(s) + I_L(s) = 0 \quad (1.94)$$

llegamos a la siguiente ecuación algebraica:

$$s^2 LCI_L(s) + s \left[\frac{L}{R} I_L(s) - LCI_o \right] + I_L(s) - \frac{L}{R} I_o - CV_o = 0 \quad (1.95)$$

y resolviendo en $I_L(s)$, tenemos:

$$I_L(s) = \frac{(s + 1/RC)I_o + V_o/L}{s^2 + s/RC + 1/LC} = \frac{k_1}{s - \alpha_1} + \frac{k_2}{s - \alpha_2} \quad \text{si } \alpha_1 \neq \alpha_2 \quad (1.96)$$

$$\text{donde } \alpha_{1,2} = -\frac{1}{2RC} \pm \frac{1}{2RC} \sqrt{1 - \frac{4R^2C}{L}} \quad (1.97)$$

$$\text{y por tanto } k_1 = \frac{-\alpha_2 I_o + V_o/L}{\alpha_1 - \alpha_2} \quad \text{y} \quad k_2 = \frac{\alpha_1 I_o - V_o/L}{\alpha_1 - \alpha_2} \quad (1.98)$$

o bien:

$$I_L(s) = \frac{(s + 1/RC)I_o + V_o/L}{s^2 + s/RC + 1/LC} = \frac{k_1}{s - \alpha} + \frac{k_2}{(s - \alpha)^2} \quad (1.99)$$

si $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, y donde:

$$\alpha = -\frac{1}{2RC} \quad (1.100)$$

$$\text{y por tanto } k_1 = I_o \quad \text{y} \quad k_2 = -\alpha I_o + V_o/L \quad (1.101)$$

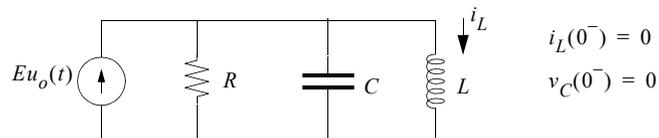
Si realizamos ahora la transformada inversa de Laplace de $I_L(s)$ tendremos $i_L(t)$:

$$i_L(t) = k_1 e^{\alpha_1 t} + k_2 e^{\alpha_2 t} \quad \text{de la ecuación (1.96)} \quad (1.102)$$

o bien:

$$i_L(t) = (k_1 + k_2 t) e^{\alpha t} \quad \text{de la ecuación (1.99)} \quad (1.103)$$

1.2.- Calcular la respuesta al escalón para el circuito mostrado en la figura.



Solución:

En el dominio del tiempo:

En esta ocasión la ley de Kirchoff de las intensidades nos dice que:

$$i_R + i_L + i_c = Eu_o(t) \quad (1.104)$$

lo que resulta en la siguiente ecuación diferencial:

$$LC \frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{L di_L}{R dt} + i_L = Eu_o(t) \quad (1.105)$$

esta ecuación no es homogénea por lo que su solución será la suma de la solución de la ecuación diferencial homogénea (la expuesta en la ecuaciones (1.87) y (1.89)) más una solución particular, o sea:

$$i_L(t) = Eu_o(t) + k_1 e^{\alpha_1 t} + k_2 e^{\alpha_2 t} \quad \text{si } \alpha_1 \neq \alpha_2 \quad (1.106)$$

donde:

$$\alpha_{1,2} = -\frac{1}{2RC} \pm \frac{1}{2RC} \sqrt{1 - \frac{4R^2C}{L}} \quad (1.107)$$

o bien:

$$i_L(t) = Eu_o(t) + (k_1 + k_2 t) e^{\alpha t} \quad \text{si } \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha \quad (1.108)$$

donde

$$\alpha = -\frac{1}{2RC} \quad (1.109)$$

De nuevo las constantes k_1 y k_2 se obtienen a partir de las condiciones iniciales, que ahora son $i_L(0) = 0$ y $(di_L/dt)(0) = 0$, resultando en:

$$k_1 = \frac{\alpha_2 E}{\alpha_1 - \alpha_2} \quad \text{y} \quad k_2 = \frac{-\alpha_1 E}{\alpha_1 - \alpha_2} \quad (1.110)$$

para la ecuación (1.106), y en:

$$k_1 = -E \quad \text{y} \quad k_2 = \alpha E \quad (1.111)$$

para la (1.108).

En el dominio de la frecuencia:

En esta ocasión aplicando la ley de Kirchoff de las intensidades a las transformadas, y teniendo en cuenta que $L[Eu_o(t)] = E/s$:

$$I_R(s) + I_C(s) + I_L(s) = \frac{E}{s} \quad (1.112)$$

Por lo que llegamos a:

$$\left(s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}\right)I_L(s) = \frac{E}{sLC} \quad (1.113)$$

dado que en esta ocasión las condiciones iniciales son nulas. Así:

$$I_L(s) = \frac{E/LC}{s(s^2 + s/RC + 1/LC)} = \frac{k_o}{s} + \frac{k_1}{s - \alpha_1} + \frac{k_2}{s - \alpha_2} \quad (1.114)$$

si $\alpha_1 \neq \alpha_2$, donde:

$$\alpha_{1,2} = -\frac{1}{2RC} \pm \frac{1}{2RC} \sqrt{1 - \frac{4R^2C}{L}} \quad (1.115)$$

y por tanto:

$$k_1 = \frac{\alpha_2 E}{\alpha_1 - \alpha_2} \quad \text{y} \quad k_2 = \frac{-\alpha_1 E}{\alpha_1 - \alpha_2} \quad (1.116)$$

o bien:

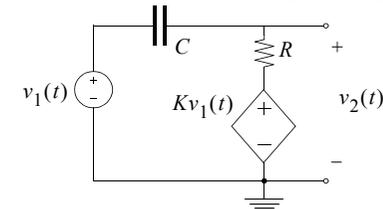
$$I_L(s) = \frac{k_o}{s} + \frac{k_1}{s - \alpha} + \frac{k_2}{(s - \alpha)^2} \quad \text{si} \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha \quad (1.117)$$

$$\text{donde} \quad \alpha = -\frac{1}{2RC} \quad (1.118)$$

$$\text{y por tanto} \quad k_1 = -E \quad \text{y} \quad k_2 = \alpha E \quad (1.119)$$

Si realizamos ahora la transformada inversa de Laplace de $I_L(s)$ en (1.114) y (1.117) tendremos de nuevo (1.106) y (1.108), respectivamente.

1.3.- Considerar el circuito de la figura. La entrada es $v_1(t) = V_o e^{-t/T_1}$. Encontrar los valores de R , C y K tal que la respuesta $v_2(t)$ sea una exponencial con una constante de tiempo más pequeña que T_1 .



Solución:

Analizando el circuito encontramos que

$$\frac{V_2 - kV_1}{R} + sC(V_2 - V_1) = 0 \quad (1.120)$$

de modo que la función del sistema resulta ser:

$$H(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{s + k/RC}{s + 1/RC} \quad (1.121)$$

mientras que la transformada de la entrada es:

$$V_1(s) = \frac{V_o}{s + 1/T_1} \quad (1.122)$$

por lo que la transformada de la respuesta queda:

$$V_2(s) = H(s)V_1(s) = \frac{s + k/RC}{s + 1/RC} \cdot \frac{V_o}{s + 1/T_1} \quad (1.123)$$

Para que esta respuesta sea una única exponencial, necesitaremos que $k/RC = 1/T_1$. Y para que la constante de tiempo de dicha exponencial

sea menor que T_1 , $RC < T_1$,:

$$k < 1 \quad \frac{RC}{k} = T_1 \quad (1.124)$$

1.4.- Explicar cómo se puede diseñar un circuito que tenga respuesta forzada nula para la señal de excitación $v_i(t) = V_o \cos \omega_o t$. Proponer un circuito que tenga dicho comportamiento. ¿Cuál es un posible uso práctico de este circuito?

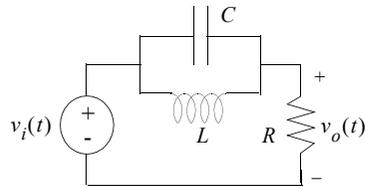
Solución:

Si calculamos la transformada de la señal de excitación

$$V_i(s) = \frac{sV_o}{s^2 + \omega_o^2} \quad (1.125)$$

vemos que para la respuesta forzada sea nula, necesitaremos ceros de transmisión en $s = \pm j\omega_o$.

Por ejemplo, el siguiente circuito:



tiene como función de transferencia:

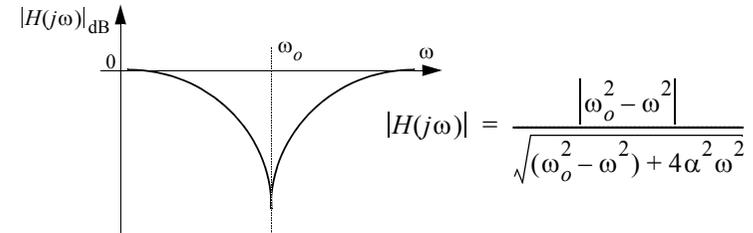
$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{s^2 + 1/LC}{s^2 + s/RC + 1/LC} \quad (1.126)$$

Si seleccionamos L y C de modo que $\omega_o = 1/\sqrt{LC}$, los polos de la excitación se cancelan con los ceros de la función de red, resultando en una respuesta forzada nula.

Este circuito actúa como un filtro rechazo de banda simétrico de 2º orden. Vamos a reescribir la función de transferencia como

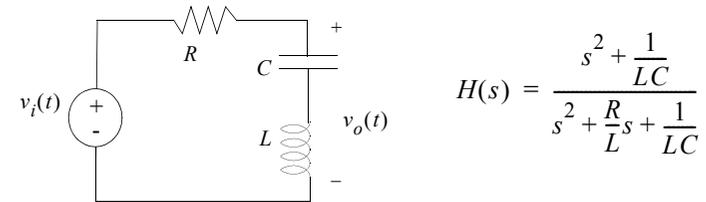
$$H(s) = \frac{s^2 + \omega_o^2}{s^2 + 2\alpha\omega_o + \omega_o^2} \quad (1.127)$$

donde $\omega_o = 1/\sqrt{LC}$ y $\alpha = 1/2RC$. Si representamos $|H(j\omega)|$



vemos que a la frecuencia ω_o tenemos cero de transmisión.

Un circuito alternativo sería:



1.5.- Construir un circuito y encontrar una excitación tal que la respuesta a la entrada (estado cero) sea: $y(t) = V_1 e^{-(t/\tau)} - V_2 \cos(\omega_o t + \theta)$, donde $V_1 = 0.5V$, $\tau = 1s$, $V_2 = (1/\sqrt{2})V$, $\omega_o = 1rad/s$ y $\theta = \pi/4$.

Solución:

En primer lugar, veamos cual es la transformada de la respuesta:

$$L[V_1 e^{-(t/\tau)}] = \frac{V_1}{s + (1/\tau)} \quad (1.128)$$

$$L[V_2 \cos(\omega_o t + \theta)] = L[V_2 \cos \omega_o t - V_2 \sin \omega_o t] = V_2 \frac{s - \omega_o}{s^2 + \omega_o^2}$$

de modo que:

$$Y(s) = \frac{V_1}{s + (1/\tau)} - V_2 \frac{s - \omega_o}{s^2 + \omega_o^2} \tag{1.129}$$

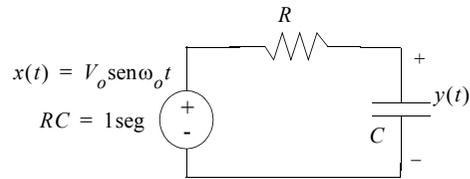
y sustituyendo, sin olvidarnos de las dimensiones: (1.130)

$$Y(s) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{s-1}{s^2+1} = \frac{1}{(s^2+1)(s+1)} \tag{1.131}$$

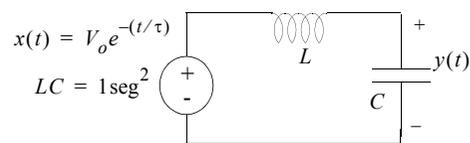
y como $Y(s) = H(s)X(s)$, tenemos varias alternativas:

a) Los casos triviales en que $H(s) = 1$ ó $X(s) = 1$, para los cuales tendremos una respuesta a la entrada totalmente forzada o únicamente natural, respectivamente.

b) $H(s) = 1/(s+1)$ y $X(s) = 1/(s^2+1)$, o sea

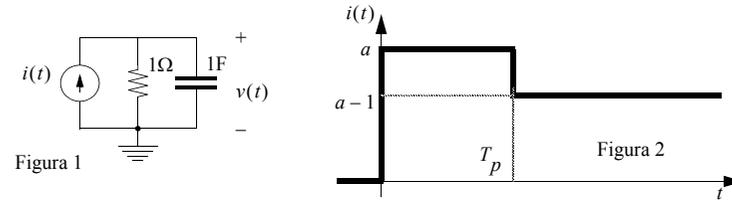


c) $H(s) = 1/(s^2+1)$ y $X(s) = 1/(s+1)$, o sea



1.6.- En el circuito de la Fig.1 la intensidad $i(t)$ tiene la forma de onda mostrada en la Fig.2.

- (a) Obtener y dibujar la localización de polos y ceros de la excitación.
- (b) ¿Para qué valor de T_p es la componente natural de $v(t)$ nula para $t > T_p$?
- (c) Sea T_{p0} el valor de T_p obtenido en el apartado (b). Obtener y dibujar $v(t)$ para $T_p < T_{p0}$, $T_p = T_{p0}$ y $T_p > T_{p0}$.



Solución:

La forma de $i(t)$ como función del tiempo es:

$$i(t) = au_o(t) - u_o(t - T_p) \tag{1.132}$$

lo que en el dominio de Laplace equivale a:

$$I(s) = (a - e^{-sT_p})/s \tag{1.133}$$

(a) Para responder a la primera cuestión vamos a localizar los polos de la excitación. Como vemos, sólo tenemos un polo en cero: $p_1 = 0$. Y a continuación los ceros de $I(s)$, que viene de:

$$a - e^{-z_k T_p} = 0 \tag{1.134}$$

y dado que z_k puede ser complejo, $z_k = \alpha_k + j\beta_k$:

$$e^{-\alpha_k T_p} (\cos \beta_k T_p - j \sin \beta_k T_p) = a \tag{1.135}$$

y de aquí deducimos en primer lugar que, puesto que a es real, $\sin \beta_k T_p$ tiene que ser cero, para lo cual $\beta_k T_p$ debe ser 0 ó $k\pi$, si k es un número entero, así que tenemos infinitos ceros cuyas partes imaginarias valen:

$$\beta_k = \pm \frac{k\pi}{T_p} \quad \text{donde} \quad k = 0, 1, 2, \dots, \infty \tag{1.136}$$

Mientras, por otro lado, la parte real de los ceros, viene de hacer:

$$e^{-\alpha_k T_p} \cos \beta_k T_p = a \tag{1.137}$$

y dado que a es positivo, de los infinitos $\beta_k T_p$ que tenemos de antes, sólo

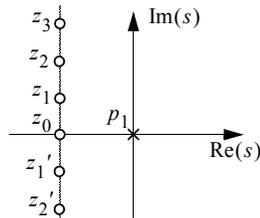
nos valdrán los multiples pares de π , o sea, del conjunto de valores que tenemos en (1.136) tomamos sólo los $k = 0, 2, 4, \dots$. Para todos estos valores, $\cos \beta_k T_p = 1$, por lo que:

$$\alpha_k = \frac{1}{T_p} \ln \frac{1}{a} \quad \text{ahora con} \quad k = 0, 2, 4, \dots, \infty \quad (1.138)$$

Así que los polos y ceros de la excitación estarán en:

$$z_k = \frac{1}{T_p} \ln \frac{1}{a} \pm j \frac{2\pi k}{T_p} \quad \text{con} \quad k = 0, 1, 2, \dots, \infty \quad (1.139)$$

y un único cero en $p_1 = 0$



Nótese que:

$$\alpha = \frac{1}{T_p} \ln \frac{1}{a} < 0$$

ya que:
 $a > 1$

(b) Para determinar el valor de T_p que anula la componente natural de la respuesta, $v(t)$, vamos a calcular la función del sistema. Así tenemos, para este circuito, la siguiente ecuación diferencial:

$$C \frac{dv(t)}{dt} + \frac{v(t)}{R} = i(t) \quad (1.140)$$

que al pasar al dominio de Laplace se convierte en:

$$\left(sC + \frac{1}{R} \right) V(s) = I(s) \quad \text{y por tanto} \quad H(s) = \frac{V(s)}{I(s)} = \frac{1/C}{s + 1/RC} \quad (1.141)$$

Si calculamos la transformada de la respuesta:

$$V(s) = H(s)I(s) = \frac{1}{sC(s + 1/RC)} (a - e^{-sT_p}) \quad (1.142)$$

de modo que la única forma de cancelar el polo real $H(s)$ en $s = -1/RC$ es mediante el cero real $z_0 = (1/T_p) \ln(1/a)$. Así, si llamamos T_{p0} al valor de T_p que hace posible esta cancelación, tenemos:

$$\frac{1}{T_{p0}} \ln \frac{1}{a} = -\frac{1}{RC} \quad \text{o sea} \quad T_{p0} = RC \ln a \quad (1.143)$$

(c) Lo primero que debemos hacer es obtener una expresión de $v(t)$, para un T_p genérico. Esta es la transformada de la respuesta:

$$V(s) = \frac{a - e^{-sT_p}}{sC(s + 1/RC)} = \frac{a/C}{s(s + 1/RC)} - \frac{1/C}{s(s + 1/RC)} e^{-sT_p} \quad (1.144)$$

la función del término e^{-sT_p} es la de retrasar T_p la respuesta temporal, así que estaremos interesados en descomponer $1/s(s + 1/RC)$:

$$\frac{1}{s(s + 1/RC)} = \frac{RC}{s} - \frac{RC}{s + 1/RC} \quad (1.145)$$

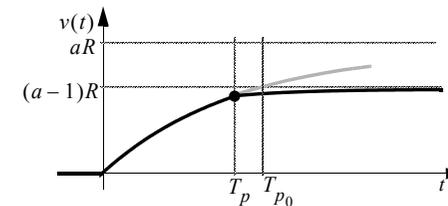
de este modo, tomando la transformada inversa de $V(s)$, llegamos a:

$$v(t) = aR(1 - e^{-t/RC})u(t) - R(1 - e^{-(t-T_p)/RC})u(t - T_p) \quad (1.146)$$

de donde deducimos que:

$$v(t) = \begin{cases} aR(1 - e^{-t/RC}) & \text{para } 0 < t < T_p \\ (a-1)R - (a - e^{T_p/RC})Re^{-t/RC} & \text{para } t > T_p \end{cases} \quad (1.147)$$

Veamos que forma tiene $v(t)$ en cada uno de los casos establecidos en el enunciado. En primer lugar, supongamos que $T_p < T_{p0}$. Recordemos que, según (1.143), $\exp(T_{p0}/RC) = a$. En esta ocasión, dado que $T_p < T_{p0}$, el término $\exp(T_p/RC)$ es menor que a , y, por otro lado, $v(T_p) < (a-1)R$, por lo que tenemos la forma de onda siguiente:

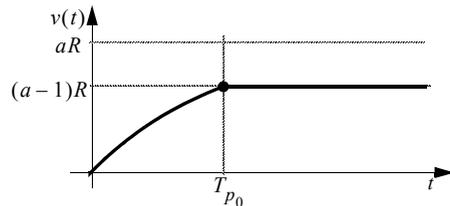


donde observamos que la exponencial que antes tendía a aR , dada por la primera expresión de la ecuación (1.147), cambia de asíntota horizontal al pasar por $t = T_p$. Así antes teníamos como valor límite aR y ahora $(a - 1)R$.

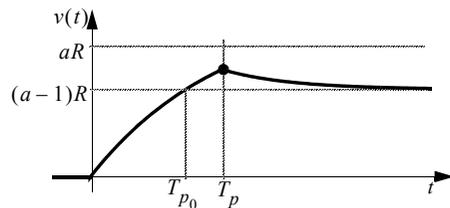
En el caso que $T_p = T_{p_0}$, o sea, $\exp(T_{p_0}/RC) = a$, tenemos que $v(T_{p_0}) = (a - 1)R$ exactamente y que (1.147) pasa a ser:

$$v(t) = \begin{cases} aR(1 - e^{-t/RC}) & \text{para } 0 < t < T_p \\ (a - 1)R & \text{para } t > T_p \end{cases} \quad (1.148)$$

y por tanto, la forma de onda:



Finalmente, si $T_p > T_{p_0}$, tenemos que $v(T_p) > (a - 1)R$ y que el segundo sumando en la segunda expresión de (1.147) es un término positivo que se va haciendo cada vez más pequeño a medida que pasa el tiempo. Así que la forma de onda será:



1.7.- Calcular la respuesta frecuencial de un circuito descrito mediante la siguiente función de sistema:

$$H(s) = \frac{s^2 + 1}{s^2 + s0.01 + 1} \quad (1.149)$$

Solución:

Por un lado tenemos un par de ceros en $s = \pm j$, con factor de calidad infinito y un par de polos complejos conjugados con frecuencia de polo igual a 1 y factor de calidad $Q = 100$. O sea que:

$$H(s) = \frac{s^2 + \omega_z^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2} \quad (1.150)$$

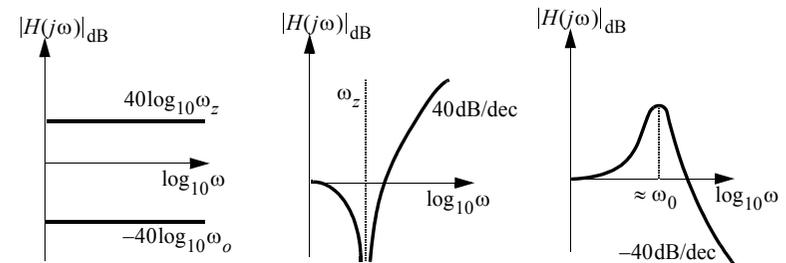
y por tanto, para $s = j\omega$:

$$H(j\omega) = \frac{\omega_z^2 - \omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega \frac{\omega_0}{Q}} \quad (1.151)$$

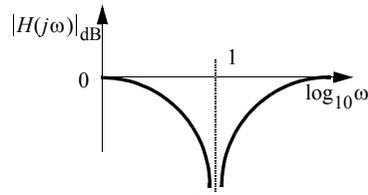
Si calculamos la magnitud de $H(j\omega)$ en decibelios:

$$|H(j\omega)|_{dB} = 40\log_{10}\omega_z + 20\log_{10}\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_z^2}\right) - 40\log_{10}\omega_0 - 20\log_{10}\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_0 Q}\right)^2} \quad (1.152)$$

estos cuatro sumandos que contribuyen de manera diferente a $|H(j\omega)|_{dB}$:



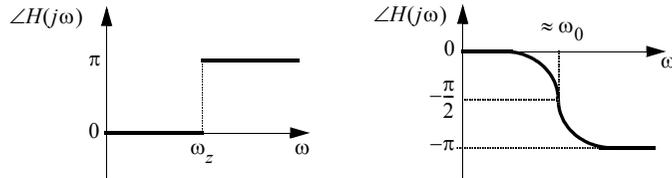
Al sustituir ω_0 , Q y ω_z por los valores que les corresponden y sumar las contribuciones tendremos, dado que $\omega_z = \omega_0$:



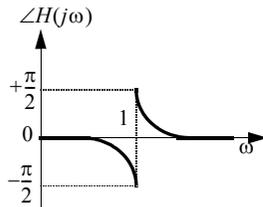
En cuanto a la fase, para $\angle H(j\omega)$ tenemos:

$$\angle H(j\omega) = \frac{1 - \text{signo}(\omega_o - \omega)}{2} \pi - \text{arctg}\left(\frac{\omega \omega_o / Q}{\omega_o^2 - \omega^2}\right) \quad (1.153)$$

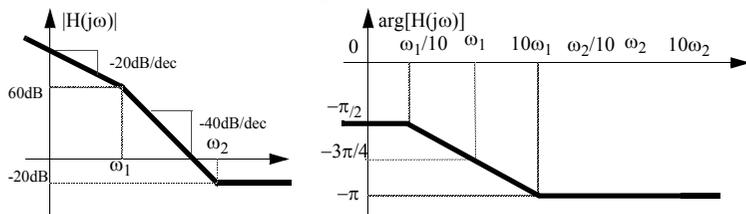
o sea:



y sumando ambas contribuciones:



1.8.- Obtener la función de transferencia $H(s)$ cuyo diagrama de Bode asintótico se muestra en la figura. Considerar únicamente raíces reales.



Solución:

En primer lugar, la caída inicial de -20dB/dec (ó -6dB/oct) nos indica que tenemos un polo en cero (un factor $1/s$). Este polo, además, explicaría el desfase inicial de $-\pi/2$.

A continuación, vemos que al llegar a $\omega = \omega_1$ tenemos otros -20dB/dec y $-\pi/4$ en la fase. esto indica que hay otro polo en $s = -\omega_1$. No estará en $s = \omega_1$ porque si no la fase ganaría $+\pi/4$.

A continuación tenemos un par de ceros en $|\omega_2|$. Para que no haya cambios en la fase, estos ceros deberán estar uno a cada lado del eje $s = j\omega$. O sea que estarán en $s = \pm\omega_2$ (ojo, son reales).

Por tanto, de momento tenemos

$$H(s) = K \frac{(s + \omega_2)(s - \omega_2)}{s(s + \omega_1)} \quad (1.154)$$

y como sabemos, por el diagrama de la magnitud, que

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} |H(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log_{10} K = -20 \quad (1.155)$$

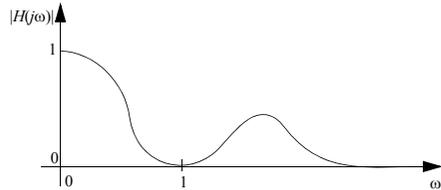
entonces $\log_{10} K = -1$ y por tanto $K = 0.1$ (1.156)

así $H(s) = \frac{(s + \omega_2)(s - \omega_2)}{10s(s + \omega_1)}$ (1.157)

Si queremos afinar un poco más, podemos observar que hay 80dB de diferencia entre $|H(j\omega_1)|_{\text{dB}}$ y $|H(j\omega_2)|_{\text{dB}}$. Si la pendiente de la caída que existe entre ellos debe ser -40dB/dec , podemos afirmar que $\omega_2 = 100\omega_1$. De modo que finalmente:

$$H(s) = -\frac{(s + 100\omega_1)(s - 100\omega_1)}{10s(s + \omega_1)} \quad (1.158)$$

1.9.- La magnitud de la respuesta frecuencial de una red se muestra en la figura. La función $H(s)$ se supone racional. El dibujo no tiene por qué estar a escala pero se cumple que: $|H(j0)|=1$, $|H(j1)|=0$ y $|H(j\infty)|=0$. Si $H(s)$ tiene el mínimo número de polos simples en $s=-1$ y $s=-1\pm j$. Y si la respuesta en estado cero debida a una entrada $x(t)$ y correspondiente a esta $H(s)$ es: $y(t) = e^{-t}u_o(t) - e^{-t}\cos(t)u_o(t)$, determinar $x(t)$.



Solución:

Lo primero que debemos hacer es calcular la transformada de Laplace de la respuesta, que es:

$$Y(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{2(s+1-j)} - \frac{1}{2(s+1+j)} = \frac{1}{(s+1)(s+1-j)(s+1+j)} \tag{1.159}$$

por otro lado, según el enunciado, $H(s)$ tiene 3 polos en $s = -1$ y $s = -1 \pm j$, entonces:

$$H(s) = \frac{N(s)}{(s+1)(s+1-j)(s+1+j)} \tag{1.160}$$

y como $Y(s) = H(s)X(s)$, entonces $X(s) = 1/N(s)$. De modo que vamos a averiguar cuánto vale $N(s)$.

Puesto que $|H(j\omega)| \rightarrow 0$ cuando $\omega \rightarrow \infty$, podemos deducir que el orden de $N(s)$ es menor que el del denominador, o sea que será 0, 1 ó 2.

Por otro lado $|H(j1)| = 0$, para ello necesitaremos $s^2 + 1$ en el numerador. Y finalmente, dado que $|H(j0)| = 1$:

$$\left. \frac{K(s^2 + 1)}{(s+1)(s^2 + 2s + 2)} \right|_{s=j0} = \frac{K}{2} = 1 \quad \text{de donde } K = 2 \tag{1.161}$$

Y de este modo:

$$H(s) = \frac{2(s^2 + 1)}{(s+1)(s^2 + 2s + 2)} \quad \text{y} \quad X(s) = \frac{1}{2(s^2 + 1)} \tag{1.162}$$

y por tanto

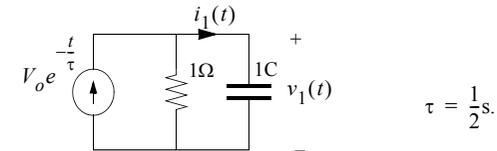
$$x(t) = \frac{1}{2}\text{sen}(t)u_o(t) \tag{1.163}$$

Problemas propuestos

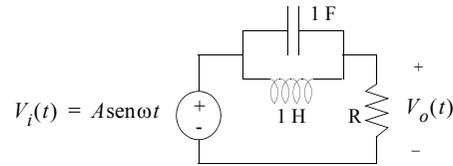
1.10.- Proponer un sistema y una excitación tal que la respuesta forzada sea nula.

1.11.- Proponer un sistema y una excitación tal que la respuesta natural sea nula.

1.12.- Considerar el circuito de la figura. La respuesta es una combinación lineal de $v_1(t)$ e $i_1(t)$. ¿Qué combinación lineal no trivial da respuesta forzada nula? ¿Qué combinación proporciona respuesta natural nula?



1.13.- Obtener la respuesta forzada del circuito de la figura.



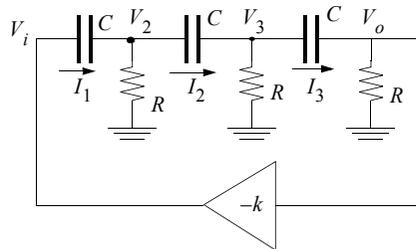
1.14.- La ecuación diferencial:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y = B + A \text{sen}(\omega t)$$

tiene coeficientes constantes. Las condiciones iniciales son nulas.

- a) Obtener la función de sistema. Suponer que $B + A \text{sen}(\omega t)$ representa la excitación.
- b) Obtener la respuesta forzada.

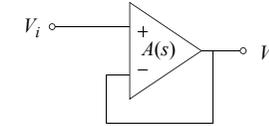
1.15.- Calcular el valor de k que permite obtener comportamiento oscilatorio en el circuito mostrado en la figura. Se trata de un oscilador de desplazamiento de fase.



1.16.- Describiremos un amplificador operacional mediante un modelo de 3 polos:

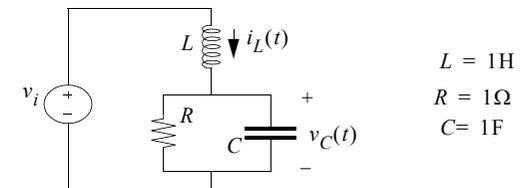
$$A(s) = \frac{A_o}{(1 + s\tau_1)(1 + s\tau_2)(1 + s\tau_3)} \tag{1.164}$$

donde $\tau_1 = 1 \text{ s}, \tau_2 = 1 \mu\text{s}, \tau_3 = 0.1 \mu\text{s}$. Al aplicar realimentación negativa a un amplificador operacional tal como se muestra en la figura la respuesta transitoria se lentifica debido al movimiento de los polos. Obtener el valor de la ganancia en dc del amplificador para obtener comportamiento oscilatorio.

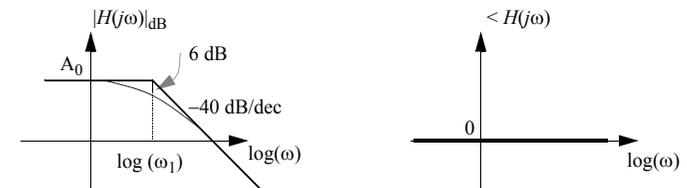


1.17.- Para el circuito de la figura encontrar el lugar geométrico de las raíces en el plano s en función del valor de R .

Encontrar los valores de R, L y C para que el circuito se comporte como un oscilador y obtener la frecuencia de oscilación.



1.18.- Dados los diagramas de Bode de amplitud y fase de la figura, calcular la función de transferencia $H(s)$.



1.19.- Dibujar aproximadamente los diagramas de Bode de la función de transferencia: $H(s) = \frac{20s(s + 100)}{(s + 2)(s + 10)}$ para el rango de frecuencias $0.1 \text{ rad/s} \leq \omega \leq 1000 \text{ rad/s}$.