

## TEMA 3

### APROXIMACIÓN DE FILTROS

#### 3.1 Teoría de la aproximación

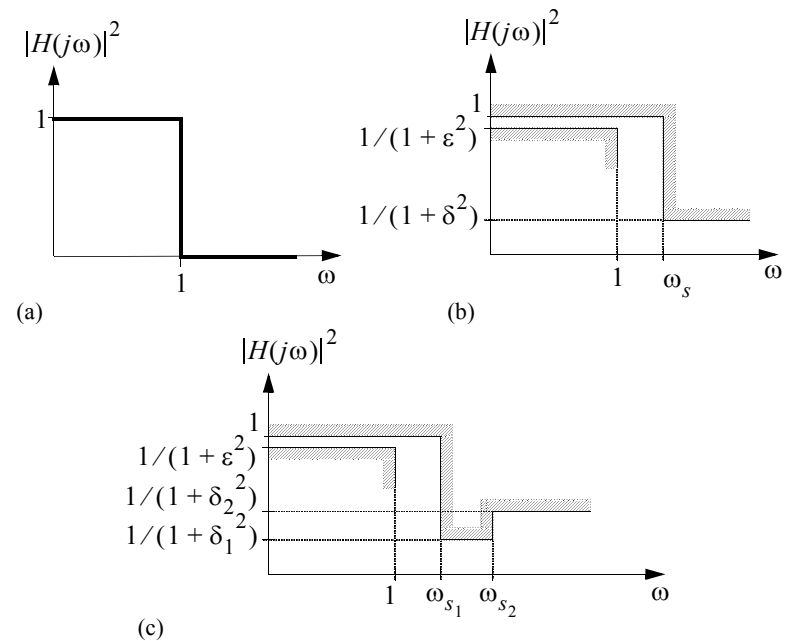
Tal como hemos visto anteriormente, se imponen especificaciones de las bandas pasante, de rechazo o transición en magnitud y/o fase. La primera tarea del diseñador es obtener una función racional realizable  $H(s)$  que satisfaga estas especificaciones.

Idealmente querríamos realizar una transmisión perfecta, sin pérdidas, en la banda pasante, atenuación infinita (ganancia 0) en la/s banda/s de rechazo y banda/s de transición de ancho nulo, tal como se muestra en el filtro paso de baja de la Fig. 3.1(a).<sup>1</sup>

Esta característica de transferencia ideal no es realizable, si queremos que  $H(s)$  sea una función racional continua de  $s$  con un número finito de polos y ceros, y sólo puede aproximarse dentro de unos ciertos márgenes de tolerancia, tal como se muestra en la Fig. 3.1(b).

Nos limitaremos aquí a estudiar las aproximaciones clásicas, que requieren de especificaciones de atenuación constantes en la banda de rechazo, y en la de paso.

1. Suponemos que la frecuencia se haya normalizada de forma que  $\omega = 1$  en el borde de la banda pasante y  $\max|H(j\omega)| = 1$ .



**Figura 3.1: Especificaciones paso de baja: (a) paso de baja ideal no realizables; (b) paso de baja realizables con tolerancia banda pasante  $\varepsilon$  y tolerancias banda de rechazo  $\delta$  ( $\delta > \varepsilon$ ); (c) paso de baja con especificaciones no constantes en la banda de rechazo.**

#### 3.2 Aproximación en magnitud paso de baja

La magnitud de la función de sistema  $H(j\omega)$  se obtiene de:

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{N(j\omega)N(-j\omega)}{D(j\omega)D(-j\omega)} = \frac{|N(j\omega)|^2}{|D(j\omega)|^2} \equiv \frac{P(\omega^2)}{E(\omega^2)} \quad (3.1)$$

$|H(j\omega)|^2$  es una función racional par que de acuerdo con la Fig. 3.1 debe aproximarse a 1 en la banda pasante,  $0 \leq |\omega| \leq 1$ , y a 0 en la banda de rechazo.

hazo,  $|\omega| \geq \omega_s$ . A fin de facilitar el tratamiento matemático es conveniente introducir una función racional real  $K(s)$  tal que,

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + |K(j\omega)|^2} \quad (3.2)$$

$K(s)$ , que se denomina función característica. Esta se obtiene de la función de sistema  $H(s)$  mediante la ecuación de Feldtkeller:

$$|K(j\omega)|^2 = \frac{1}{|H(j\omega)|^2} - 1 \quad (3.3)$$

Teniendo en cuenta la ecuación (3.1) podemos escribir,

$$|K(j\omega)|^2 = \frac{|D(j\omega)|^2 - |N(j\omega)|^2}{|N(j\omega)|^2} \equiv \varepsilon^2 \frac{|F(j\omega)|^2}{|N(j\omega)|^2} = \frac{|\hat{F}(j\omega)|^2}{|N(j\omega)|^2} \quad (3.4)$$

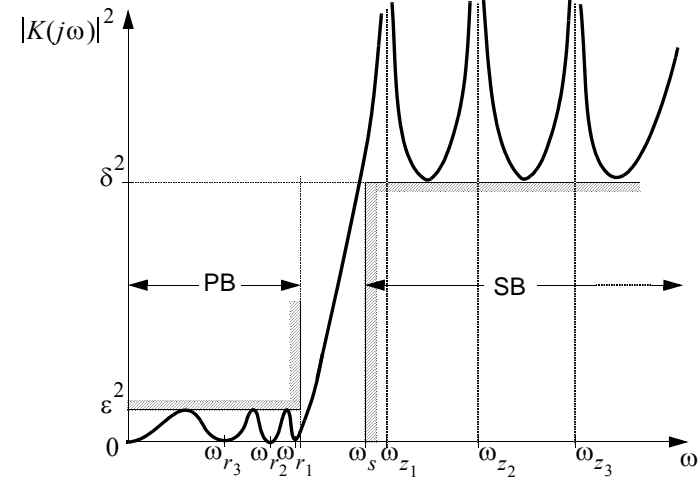
Por conveniencia se ha introducido el parámetro  $\varepsilon$ . Una representación de  $|K(j\omega)|^2$  se muestra en la Fig. 3.2.  $K(s)$  se define de tal forma que  $|K(j\omega)|^2$  se aproxime a 0 en la banda pasante con un error de atenuación orizado en la banda pasante  $\varepsilon$ . Si la atenuación máxima en la banda pasante de la ganancia es  $A_p$  dB entonces:

$$\varepsilon^2 = 10^{0.1A_p} - 1 \quad (3.5)$$

De forma similar  $|K(j\omega)|^2$  debe ser mayor de  $\delta^2$  en la banda de rechazo. Para una atenuación mínima en la banda de rechazo de  $A_s$  dB,  $\delta$  viene de:

$$\delta^2 = 10^{0.1A_s} - 1 \quad (3.6)$$

Se ha introducido un nuevo polinomio,  $F(s)$  (también  $\hat{F}(s)$ ) llamado polinomio de reflexión cero. Sus raíces, llamadas ceros de reflexión,  $s_{r_i} = \pm j\omega_{r_i}$ , son los ceros de  $|K(j\omega)|$ . Luego en  $s = \pm j\omega_{r_i}$  se tiene transmisión perfecta:  $|H(\pm j\omega_{r_i})| = 1$ . Las raíces  $s = \pm j\omega_{z_i}$  del polinomio



**Figura 3.2:** Especificaciones paso de baja que deben ser satisfechas por  $|K(j\omega)|^2$ .

$N(s)$  son los ceros de transmisión, es decir,  $|H(\pm j\omega_{z_i})| = 0$ .  $\omega_{z_i}$  se denominan también polos de atenuación, donde  $|K(\pm j\omega_{z_i})| = \infty$ . Para las aproximaciones en magnitud, el cálculo de la función característica se centrará en funciones con los ceros de reflexión y los polos de atenuación en el eje  $j\omega$ , debido a que esto nos va a asegurar una mayor eficiencia de la aproximación.

En conclusión, el problema general de aproximación paso de baja consiste en encontrar una función racional real  $K(s) = \varepsilon F(s)/N(s)$ , o bien  $K(s) = \hat{F}(s)/N(s)$ , tal que:

- 1)  $F(s)$ , ó  $\hat{F}(s)$ , tenga todas las raíces en el eje  $j\omega$  en la banda pasante.
- 2)  $N(s)$  tenga todas las raíces en el eje  $j\omega$  en la banda de rechazo.
- 3)  $|F(j\omega)/N(j\omega)| \leq 1$ , o bien  $|\hat{F}(j\omega)/N(j\omega)| \leq \varepsilon$ , en  $0 \leq |\omega| \leq 1$ .
- 4)  $|K(j\omega)| \geq \delta$  en  $|\omega| \geq \omega_s$ .

Después de encontrar  $|K(j\omega)|^2$  se utiliza (3.2) para obtener el cociente de dos polinomios pares  $P(\omega^2)$  y  $E(\omega^2)$ . Como paso final se utiliza con-

tinuación analítica, es decir, se sustituye  $\omega$  por  $s/j$  (ó  $\omega^2$  por  $-s^2$ ) y se factoriza  $P(-s^2)$  y  $E(-s^2)$  en  $N(s)N(-s)$  y  $D(s)D(-s)$  respectivamente.

$E(-s^2)$ , al ser par, tendrá raíces simétricas respecto al origen del plano  $s$ . Ya que  $D(s)$  debe ser un polinomio de Hurwitz, solo debe contener las raíces de  $E(-s^2)$  que estén en el semiplano izquierdo del plano  $s$ . Por otra parte, ya conocemos  $N(s)$  de antemano puesto que se ha obtenido explícitamente en el cálculo de  $|K(j\omega)|$ :

$$N(s) = k \prod_i (s^2 + \omega_{z_i}^2)^{m_i} \quad (3.7)$$

donde  $k$  es una constante y  $\pm j\omega_{z_i}$  son los ceros de transmisión de multiplicidad  $m_i \geq 0$ . Si todos los  $m_i = 0$  no hay ceros de transmisión finitos,  $N(s) = k$  y  $H(s) = k/D(s)$  es una función paso de baja todo polo. **OJO:** Si tenemos un cero en  $s = 0$ , cosa que no va a ocurrir en el caso de una aproximación paso de baja, este contribuye con un factor  $s$  a  $N(s)$ .

### 3.3 Aproximación máximamente plana

Un filtro paso de baja con magnitud máximamente plana requiere que la magnitud (al cuadrado) de la función de transferencia sea 1 en  $\omega = 0$ , es decir, transmisión ideal en dc, y que todas las derivadas posibles del error de transmisión sean cero en  $\omega = 0$ . El error de transmisión se define como:

$$\Delta(\omega^2) = 1 - |H(j\omega)|^2 \quad (3.8)$$

Las especificaciones son, pues:

$$\begin{aligned} |K(j0)| &= 0 \\ \frac{d^i}{(d\omega^2)^i} \left[ \frac{|K(j\omega)|^2}{1 + |K(j\omega)|^2} \right]_{\omega=0} &= 0 \quad i = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.9)$$

$|K(j\omega)|^2$  es un cociente de polinomios en  $\omega^2$  y puede demostrarse que,

debido a las condiciones en (3.9), tiene todos los ceros de reflexión en el origen, o sea, que es de la forma

$$|K(j\omega)|^2 = \frac{a_n \omega^{2n}}{|N(j\omega)|^2} \quad (3.10)$$

Por tanto la función de transferencia paso de baja de orden  $n$  que es máximamente plana en el origen ( $\omega = 0$ ) es,

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + |K(j\omega)|^2} = \frac{|N(j\omega)|^2}{|N(j\omega)|^2 + a_n \omega^{2n}} \quad (3.11)$$

Luego, para un polinomio  $N(s)$  dado, es decir, para un conjunto de ceros de transmisión, se puede encontrar siempre una función de transferencia paso de baja con banda pasante máximamente plana.

El parámetro  $a_n$  determina la máxima atenuación en la banda pasante, que se produce para  $\omega = 1$ :

$$\varepsilon^2 = \frac{a_n}{|N(j1)|^2} = 10^{0.1A_p - 1} \quad (3.12)$$

que permite determinar  $a_n$  dado  $A_p$  y los ceros de transmisión. El grado de la función de transferencia,  $n$ , viene dado por la atenuación requerida a altas frecuencias. Si  $n$  es el orden de la aproximación, o sea, el orden de  $D(s)$ , y  $m$  es el orden de  $N(s)$ , la magnitud  $|H(j\omega)|$  decaerá a alta frecuencia como  $1/\omega^{n-m}$ , es decir, la atenuación crecerá  $20(n-m)$ dB/déc.

Esta aproximación es conocida como aproximación máximamente plana genérica. Dentro de los casos particulares de aproximación máximamente plana veremos dos: la aproximación Butterworth y la aproximación Chebyshev inversa.

### 3.4 Aproximación Butterworth

Un caso particular de aproximación máximamente plana, muy importante, es aquel en el que todos los ceros de transmisión están en  $s = \infty$ , es decir,  $N(s) = 1$ . Nótese que la posible constante asociada al numerador de  $H(s)$  vamos a englobarla en la constante del denominador. En esta ocasión, la magnitud de la función de transferencia viene dada por:

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \omega^{2n}} \quad (3.13)$$

Puede verse que en esta función la atenuación aumenta monótonamente con  $\omega$ . El grado  $n$  se determina de las especificaciones para la banda de rechazo, o sea,  $|K(j\omega)|^2 = \varepsilon^2 \omega^{2n} \geq \delta^2$ , si  $|\omega| \geq \omega_s$ :

$$\delta^2 = 10^{0.1A_s} - 1 = \varepsilon^2 \omega_s^{2n} \quad (3.14)$$

y de aquí: 
$$n \geq \frac{\log(\delta/\varepsilon)}{\log \omega_s} \quad (3.15)$$

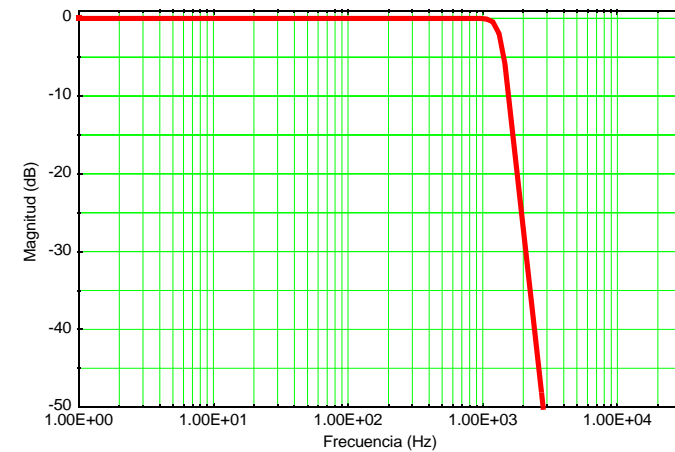
#### Ejemplo

**3.1.-** Encontrar el orden de una función paso de baja máximamente plana todo polo que tenga una banda pasante en  $0 \leq f \leq 1.2\text{kHz}$  con  $A_p = 0.5\text{dB}$  de atenuación máxima y una banda de rechazo en  $f \geq 1.92\text{kHz}$  con una atenuación mínima  $A_s = 23\text{dB}$ .

#### Solución detallada

Normalizamos la frecuencia por  $\Omega_o = 2\pi \cdot 1.2\text{krad/s}$  de forma que  $\omega = 1$  en el borde de la banda pasante y  $\omega_s = 1.92\text{kHz}/1.2\text{kHz} = 1.6$ . El rizado en la banda pasante es:

$$\varepsilon = \sqrt{10^{0.05} - 1} = \sqrt{0.12202} = 0.34931 \quad (3.16)$$



**Figura 3.3: Diagrama de Bode de magnitud del filtro Butterworth.**

y en la banda de rechazo:

$$\delta = \sqrt{10^{2.3} - 1} = 14.090 \quad (3.17)$$

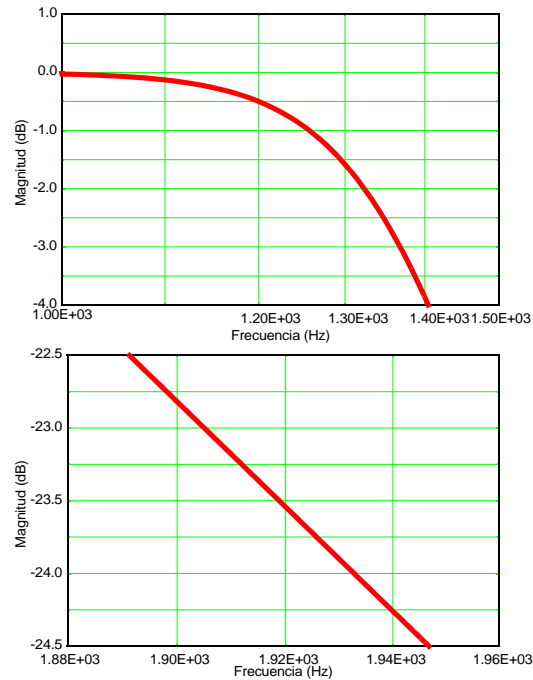
luego el orden del filtro saldrá:

$$n \geq \frac{\log 40.338}{\log 1.6} = 7.87 \quad (3.18)$$

de modo que  $n = 8$ .

La Fig. 3.3 muestra el diagrama de Bode de magnitud del filtro resultante que se puede observar que cumple las especificaciones. La Fig. 3.4 muestra ampliaciones de dicho diagrama en los bordes de la banda pasante y de rechazo. Puede observarse que el filtro pasa por el borde de la banda pasante. Sin embargo, las especificaciones se cumplen por exceso en la banda de rechazo. Esto es debido a que el orden del filtro ha de ser entero, por lo que se ha escogido un orden mayor que el estrictamente necesario para cumplir las especificaciones. Podríamos haber invertido el exceso de orden en una atenuación todavía menor en la banda pasante.

Para hallar la localización de los polos de una función paso de baja máx-



**Figura 3.4: Ampliación del diagrama de Bode de magnitud en el borde de la banda pasante y el borde de la banda de rechazo.**

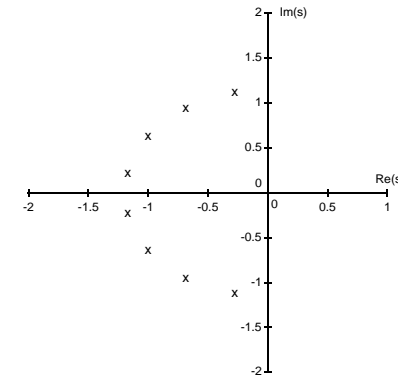
inamente plana todo polo, Butterworth, se sustituye  $\omega^2$  por  $-s^2$  y resolvemos  $1 + (-1)^n \varepsilon^2 s^{2n} = 0$ ,

$$s^{2n} = \frac{1}{\varepsilon^2} (-1)^{n+1} = \frac{1}{\varepsilon^2} e^{j(n+1+2k)\pi} \quad (3.19)$$

Seleccionando únicamente los polos del semiplano izquierdo se obtienen los polos deseados:

$$s_k = \varepsilon^{-1/n} e^{j \frac{2k+n+1}{2n} \pi} \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (3.20)$$

Puede observarse que los polos se distribuyen uniformemente en un círculo



**Figura 3.5: Polos del filtro Butterworth (normalizados).**

de radio  $\varepsilon^{-1/n}$ . La Fig. 3.5 muestra los polos del filtro Butterworth del ejemplo anterior.

Si  $\varepsilon = 1$  la atenuación en  $\omega = 1$ ,  $A_p$ , es 3dB. El filtro paso de baja todo polo máximamente plano tiene la forma,

$$H(s) = \frac{1}{s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1s + 1} \quad (3.21)$$

Estos filtros son los que originalmente se conocen como filtros de Butterworth y sus denominadores, polinomios de Butterworth, aunque, por extensión, el término Butterworth se aplica a cualquier filtro de magnitud máximamente plana todopolo independientemente de que  $\varepsilon$  valga 1 ó no. Los denominadores de estos filtros, los que tienen  $\varepsilon = 1$ , se encuentran tabulados por lo que tan pronto se conoce el orden  $n$  del filtro la función está completamente determinada.

En el caso de que dispongamos de los polinomios de Butterworth, pero nuestra  $\varepsilon \neq 1$ , puede obtenerse la  $H'(s')$  requerida a partir de la de Butterworth  $H(s)$ , haciendo el cambio de variable:

$$H'(s') = H(s) \Big|_{s = \varepsilon^n s'} \quad (3.22)$$

### 3.5 Aproximación de igual rizado. Aproximación Chebyshev

En la aproximación máximamente plana se concentra toda la aproximación en  $\omega = 0$  y se acepta un error creciente de forma monótonica en el intervalo  $0 < |\omega| \leq 1$ . Una alternativa más eficiente podría ser distribuir el error uniformemente en toda la banda pasante. Para ello:

$$|K(j\omega)|^2 = \varepsilon^2 C_n^2(\omega) \tag{3.23}$$

que es un polinomio que oscila uniformemente entre 0 y  $\varepsilon^2$ . Los polinomios de Chebyshev de orden  $n$  pueden describirse mediante:

$$C_n(\omega) = \cos(n \operatorname{acos} \omega) \tag{3.24}$$

Debido a que  $\operatorname{acos} \omega$  es un número complejo siempre que  $|\omega| \geq 1$ , tendríamos que fuera de la banda pasante, los polinomios de Chebyshev pasarían a estar descritos por:

$$\begin{aligned} C_n(\omega) &= \cosh(n \operatorname{acosh} \omega) = \\ &= \frac{1}{2} \left[ (\omega + \sqrt{\omega^2 - 1})^n + (\omega + \sqrt{\omega^2 - 1})^{-n} \right] \end{aligned} \tag{3.25}$$

que aumenta monótonamente con  $\omega$ . De todos modos, ambas expresiones son válidas para todo valor de  $\omega$ .

Los dos primeros polinomios de Chebyshev son:

$$\begin{aligned} C_0(\omega) &= 1 \\ C_1(\omega) &= \omega \end{aligned} \tag{3.26}$$

De la relación trigonométrica recursiva,

$$\cos[(n+1)x] = 2 \cos nx \cos x - \cos[(n-1)x] \tag{3.27}$$

podemos extraer una fórmula recursiva para los polinomios de Chebyshev:

$$C_{n+1}(\omega) = 2\omega C_n(\omega) - C_{n-1}(\omega) \quad n = 1, 2, \dots \tag{3.28}$$

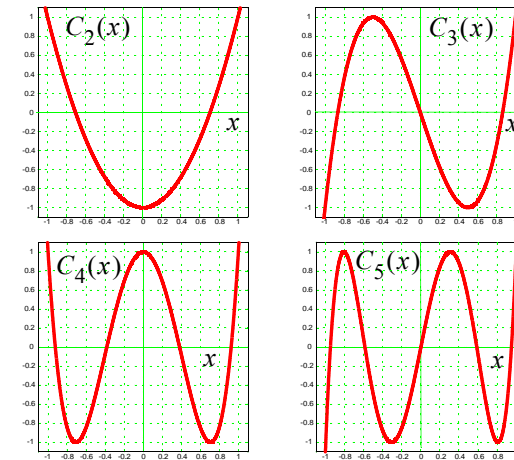


Figura 3.6: Polinomios de Chebyshev

y así seguimos calculándolos fácilmente

$$\begin{aligned} C_2(\omega) &= 2\omega^2 - 1 \\ C_3(\omega) &= 4\omega^3 - 3\omega \\ &\dots \end{aligned} \tag{3.29}$$

De (3.26) y (3.28) se deduce que  $C_n(1) = 1$  para todo  $n$ ;  $C_n(0) = 0$  para  $n$  impar y  $\pm 1$  para  $n$  par; y que  $C_n(\omega)$  es par para  $n$  par, e impar para  $n$  impar. La Fig. 3.6 muestra una representación de los polinomios de Chebyshev de orden más bajo.

La función de transferencia paso de baja todo-polo de orden  $n$  e igual rizado en la banda pasante, Chebyshev,  $H(s)$  se obtendrá a partir de:

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 C_n^2(\omega)} \tag{3.30}$$

Los ceros de  $C_n(\omega)$ , que son los ceros de reflexión del filtro de Chebyshev vienen dados por,

$$\cos(n \operatorname{acos} \omega) = 0 \tag{3.31}$$

luego 
$$n \cos \omega = (2k + 1) \frac{\pi}{2} \tag{3.32}$$

Por tanto, los ceros de reflexión, ceros de  $K(s)$ , serán:

$$s = \begin{cases} 0, \pm \omega_{r_i} & \text{con } i = 0, 1, 2, \dots, \frac{n-1}{2} \quad \text{si } n \text{ es impar} \\ \pm \omega_{r_i} & \text{con } i = 0, 1, 2, \dots, \frac{n}{2} - 1 \quad \text{si } n \text{ es par} \end{cases} \tag{3.33}$$

donde 
$$\omega_{r_k} = \cos \left[ \frac{2k + 1}{n} \frac{\pi}{2} \right] \tag{3.34}$$

Los polinomios de Chebyshev pueden entonces expresarse en términos de sus raíces como:

$$C_n(\omega) = 2^{n-1} \omega \prod_{k=1}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (\omega^2 - \omega_{r_k}^2) \quad \text{si } n \text{ es impar} \tag{3.35}$$

$$C_n(\omega) = 2^{n-1} \prod_{k=1}^{\frac{n}{2}} (\omega^2 - \omega_{r_k}^2) \quad \text{si } n \text{ es par}$$

ya que las raíces son simétricas respecto del origen.

De las ecuaciones (3.24) y (3.30) se deduce que  $|H(j\omega)|$  oscila con igual rizado en toda la banda pasante  $0 \leq \omega \leq 1$ . También tenemos que:

$$|H(j0)|^2 = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es impar} \\ \frac{1}{1 + \varepsilon^2} & \text{si } n \text{ es par} \end{cases} \tag{3.36}$$

y, al mismo tiempo que,

$$|H(j1)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2} \quad \text{para todo } n \tag{3.37}$$

Además  $|H(j\omega)|$  decrece monótonamente para  $|\omega| > 1$ , tal como se muestra en la Fig. 3.7 para  $n = 2, 3$  y 4.

Las posiciones de los polos del filtro Chebyshev se obtienen igualando a 0 el denominador de (3.30) con  $\omega = s/j$ :

$$C_n^2\left(\frac{s}{j}\right) = \cos^2\left(n \cos \frac{s}{j}\right) = -\frac{1}{\varepsilon^2} \tag{3.38}$$

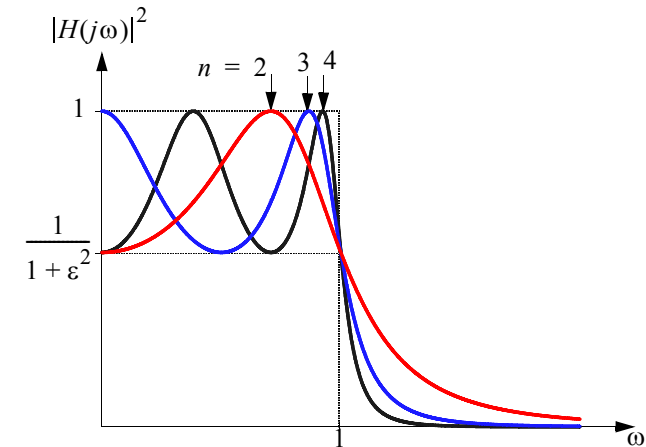
Esta ecuación está resuelta en el apéndice A.3.2, donde se llega a que:

$$s_k = -\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{1}{\varepsilon} + \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + 1} \right)^{1/n} - \left( \frac{1}{\varepsilon} + \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + 1} \right)^{-1/n} \right] \text{sen} \left( \frac{2k+1}{2n} \pi \right) + j \left( \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{1}{\varepsilon} + \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + 1} \right)^{1/n} + \left( \frac{1}{\varepsilon} + \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + 1} \right)^{-1/n} \right] \cos \left( \frac{2k+1}{2n} \pi \right) \right) \tag{3.39}$$

Si conocemos los polos, la función de transferencia es:

$$H(s) = \frac{1}{2^{n-1} \varepsilon \prod_{k=1}^n (s - s_k)} = \frac{1 / (2^{n-1} \varepsilon)}{s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0} \tag{3.40}$$

Los denominadores de estas funciones de transferencia, para un  $\varepsilon$  determi-



**Figura 3.7: Funciones de transferencia paso de baja Chebyshev**

nado, se encuentran tabulados (normalmente hasta orden 10).

**Determinación de n**

Para determinar  $n$  se evalúa la función de transferencia en la banda de rechazo y debe obtenerse la atenuación mínima:

$$\varepsilon^2 C_n^2(\omega_s) \geq \delta^2 \tag{3.41}$$

Sustituyendo (3.25) ya que  $|\omega_s| > 1$  y despejando  $n$  se obtiene:

$$n \geq \frac{\text{acosh}(\delta/\varepsilon)}{\text{acosh}\omega_s} \tag{3.42}$$

**Ejemplo**

**3.2.-** Encontrar la función de transferencia de un filtro Chebyshev paso de baja que satisfaga las misma especificaciones del ejemplo del filtro máximamente plano (banda pasante en  $0 \leq f \leq 1.2\text{kHz}$  con  $A_p = 0.5\text{dB}$  de atenuación máxima y una banda de rechazo en  $f \geq 1.92\text{kHz}$  con una atenuación mínima  $A_s = 23\text{dB}$ ).

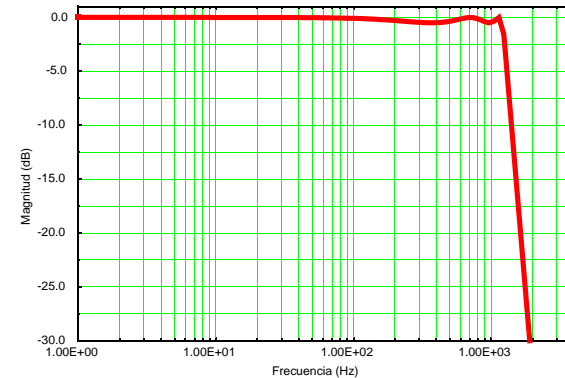
**Solución detallada**

De la ecuación (3.5) se obtiene  $\varepsilon = 0.3493$ . Aplicando entonces (3.41) se obtiene  $n = 4.19$ . Por tanto, se necesita un filtro de quinto orden. Finalmente usando la tabla III2a se obtiene la función:

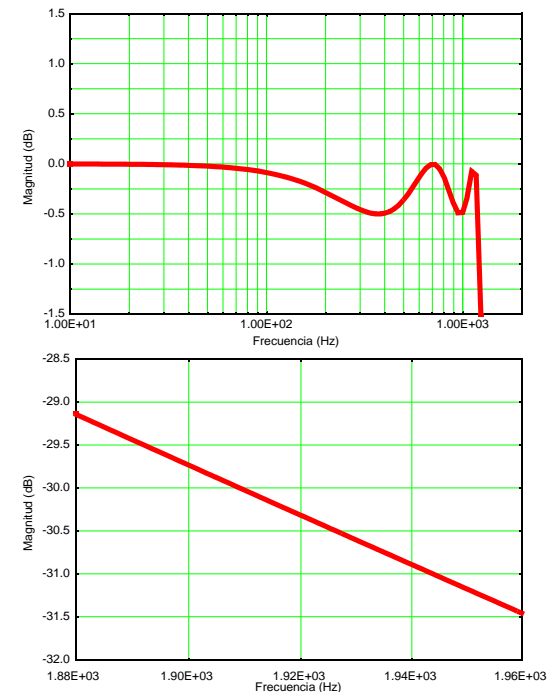
$$H(s) = \frac{0.1789}{s^5 + 1.17251s^4 + 1.9374s^3 + 1.3096s^2 + 0.7525s + 0.1789} \tag{3.43}$$

Nótese que  $H(0) = 1$ . Si  $n$  hubiera sido par, habría salido  $-0.5\text{dB}$ .

La Fig. 3.8 muestra el diagrama de magnitud de dicho filtro. La Fig. 3.9 muestra una ampliación del diagrama de Bode de magnitud en la banda pasante y en el entorno del borde de la banda de rechazo. En el primero de los diagramas se aprecia la distribución no uniforme de los ceros de reflexión.



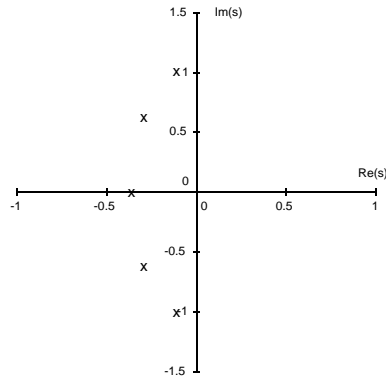
**Figura 3.8: Diagrama de Bode de magnitud del filtro Chebyshev.**



**Figura 3.9: Ampliación del diagrama de Bode de magnitud en el borde de la banda pasante y en el borde de la banda de rechazo.**



El segundo de los diagramas muestra cómo las especificaciones de atenuación en la banda de rechazo se cumplen por exceso debido al orden no entero requerido para cumplir exactamente las especificaciones. La Fig. 3.10 muestra la distribución de los polos.



**Figura 3.10: Polos del filtro Chebyshev (normalizados).**

Podemos comprobar pues que el filtro Chebyshev es más eficiente que el máximamente plano para realizar las mismas especificaciones. Puede demostrarse que esto siempre es así.

Alternativamente se puede recurrir a diagramas de tolerancias para diseñar filtros Chebyshev. Puesto que,

$$\delta^2 = \varepsilon^2 C_n^2(\omega_s) \tag{3.44}$$

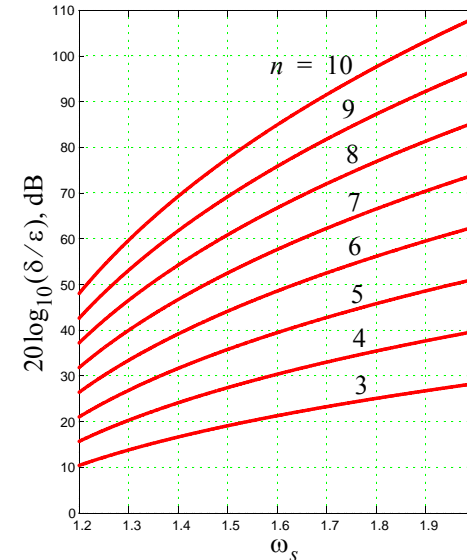
Por tanto,

$$20 \log_{10} \left( \frac{\delta}{\varepsilon} \right) = 20 \log_{10} C_n(\omega_s) \tag{3.45}$$

Para  $n$  y  $\omega_s$  fijos aumentar la atenuación en la banda de rechazo,  $A_s$ , y por tanto aumentar  $\delta$ , significa aumentar el rizado  $\varepsilon$  y por tanto la atenuación en la banda de paso  $A_p$ .

Esta relación puede utilizarse para determinar el orden  $n$  del filtro. Para

ello, la Fig. 3.11 muestra representaciones gráficas de  $20 \log_{10} C_n(\omega_s)$  para  $1 \leq \omega_s \leq 2$  y para  $3 \leq n \leq 10$ . Por tanto, dados  $A_p$ , o sea  $\varepsilon$ ,  $A_s$ , o sea  $\delta$ , y  $\omega_s$  se pueden utilizar para determinar el orden del filtro.



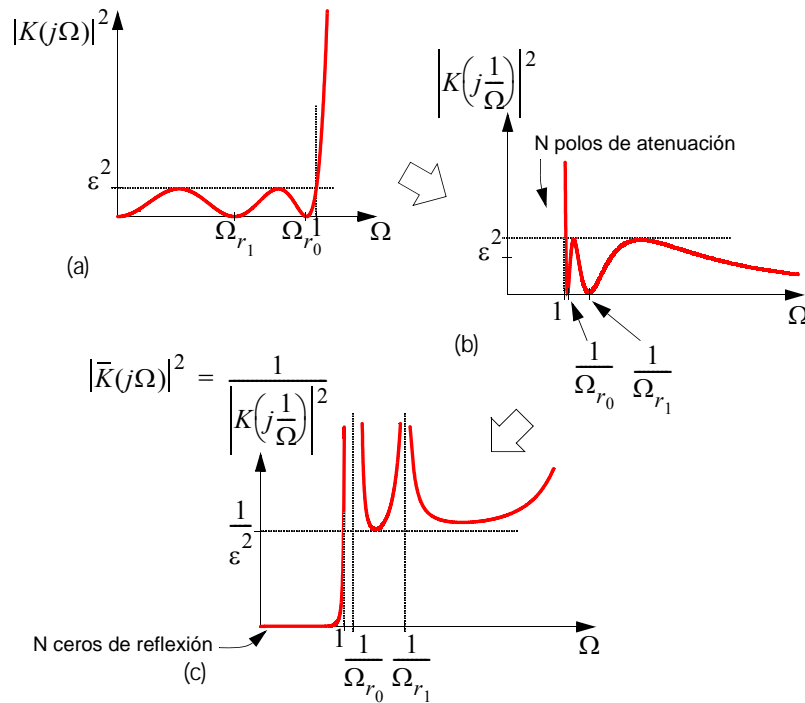
**Figura 3.11: Carta de diseño Chebyshev**

### 3.6 Filtros Chebyshev inversos

Si se requiere una banda pasante monótonica y una banda de rechazo de igual rizado puede hacerse con la aproximación Chebyshev inversa que puede deducirse a partir de la aproximación Chebyshev convencional mediante las transformaciones que se muestran en la Fig. 3.12.

Según estas transformaciones, la magnitud de los filtros Chebyshev inversos está descrita por:

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{\varepsilon^2 C_n^2(1/\Omega)}{1 + \varepsilon^2 C_n^2(1/\Omega)} \tag{3.46}$$



**Figura 3.12: Proceso de obtención teórica de los filtros Chebyshev inversos a partir de los Chebyshev convencionales.**

Comparando (3.46) con (3.11), una vez que desarrollamos  $C_n(1/\Omega)$ , se comprueba que los filtros Chebyshev inversos tienen una banda pasante máximamente plana y tienen ceros de transmisión finitos localizados en  $C_n(1/\Omega) = 0$ . Los ceros de transmisión de los filtros Chebyshev inversos son, por tanto, los inversos de los ceros de reflexión del Chebyshev convencional del mismo orden.

En cuanto a los polos, estos vendrán dados por las soluciones de:

$$1 + \varepsilon^2 C_n^2(1/\Omega) = 0 \quad \text{para } \Omega = s/j \quad (3.47)$$

pero una ecuación similar ya se ha resuelto para la aproximación Chebyshev

convencional de modo que puede deducirse que los polos de la aproximación Chebyshev inversa son los inversos de los polos de la aproximación Chebyshev convencional. Obviamente el rizado  $\varepsilon$  habrá de escogerse adecuadamente. Para ello podemos fijarnos en la procedencia del comportamiento en el borde de la banda pasante del Chebyshev inverso (Fig. 3.12) en el Chebyshev convencional auxiliar:

$$\varepsilon_{\text{Cheb. Inv.}}^2 = |\bar{K}(j\Omega)|^2 \Big|_{\Omega = \frac{1}{\Omega_s}} = \frac{1}{\left| K\left(j\frac{1}{\Omega}\right) \right|^2 \Big|_{\Omega = \frac{1}{\Omega_s}} \quad (3.48)$$

$$\text{o sea, } \varepsilon_{\text{Cheb. Inv.}}^2 = \frac{1}{\varepsilon_{\text{Cheb. Conv.}}^2 C_n^2(\Omega_s)} \quad (3.49)$$

No hay que olvidar que debido al método utilizado para la derivación de la aproximación Chebyshev inversa, las funciones obtenidas están normalizadas respecto al borde de la banda de rechazo.

Puede demostrarse que los filtros Chebyshev inversos son tan eficientes como los filtros Chebyshev en el sentido de obtenerse filtros del mismo orden para aproximar un conjunto dado de especificaciones. Por ejemplo, para el mismo conjunto de especificaciones utilizadas en la aproximación Chebyshev se obtiene también orden 5. El diagrama de Bode de magnitud resultante se muestra en la Fig. 3.13 y una ampliación del mismo en el entorno de la frecuencia de corte en la Fig. 3.14. La distribución de polos y ceros se muestra en la Fig. 3.15

Sin embargo, su comportamiento en fase y retraso es muy diferente. Los filtros Chebyshev tienen mayores valores del factor de calidad de los polos que los filtros de Chebyshev inversos lo que se traduce en curvas de retraso con mayores picos, tal como se ilustra en la Fig. 3.16. Por tanto, los filtros de Chebyshev inversos son preferibles en aplicaciones donde son importantes pequeñas variaciones de retraso como en video o transmisión de da-

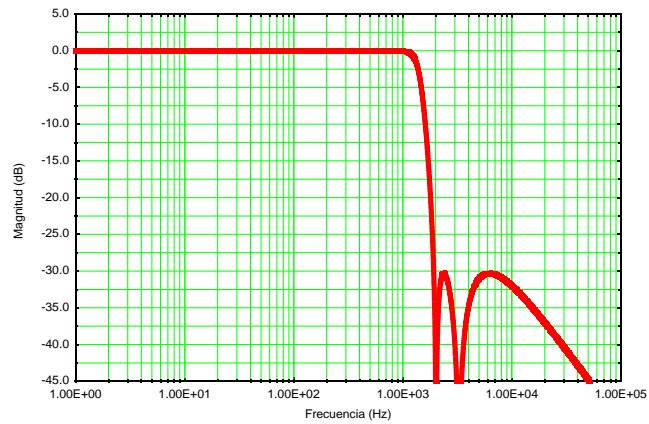


Figura 3.13: Diagrama de Bode de magnitud del filtro Chebyshev inverso.

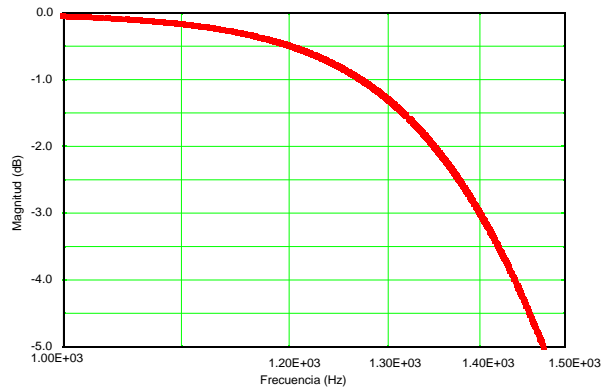


Figura 3.14: Ampliación del comportamiento en la banda pasante.

tos.

### 3.7 Aproximación elíptica

Los filtros Butterworth y Chebyshev proporcionan aproximaciones

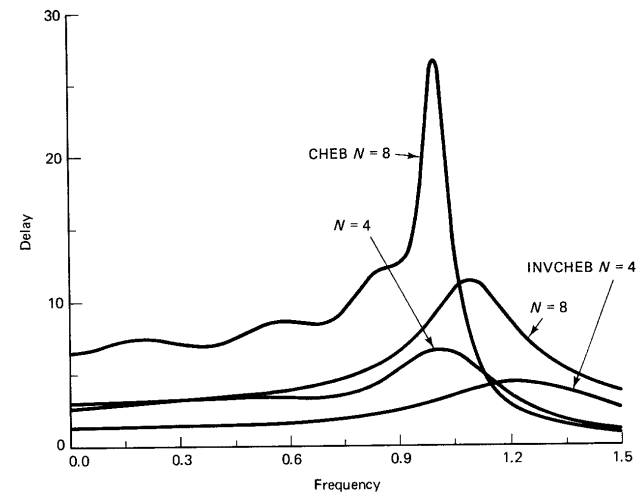


Figura 3.16: Comparación del retraso de filtros Chebyshev y Chebyshev inversos

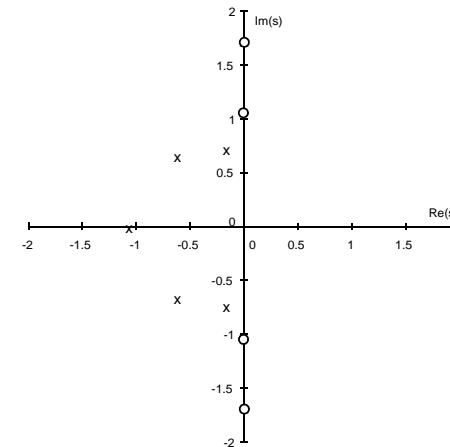
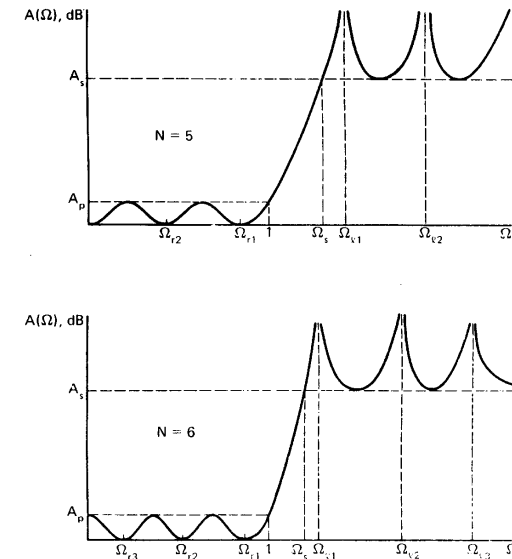


Figura 3.15: Polos y ceros del filtro Chebyshev inverso (normalizados respecto del borde de la banda de rechazo).

fáciles de realizar. Sin embargo, son ineficientes en las bandas de paso y de rechazo. Proporcionan normalmente más atenuación de la necesaria. Si se mueven algunos ceros de reflexión desde cero a posiciones cercanas al borde de la banda de paso se aumentará también la pendiente de la caída en la banda de transición. Esto es lo que se hizo en el filtro Chebyshev convencional, mientras que en la banda de rechazo, los ceros de transmisión permanecían en infinito. Si además se mueven algunos polos de atenuación (o ceros de transmisión) desde el infinito a posiciones cercanas al borde de la banda de rechazo se aumentará aún más la pendiente de la caída en la banda de transición. Esto es lo que se ha hecho en el filtro Chebyshev inverso, aunque la banda pasante máximamente plana impedía una caída más pronunciada. Luego, si las especificaciones de atenuación en las bandas de paso y de rechazo son constantes una aproximación óptima será aquella que tenga un igual rizado en la banda de paso y en la de rechazo. La función característica debe aproximarse a 0 en la banda de paso y a  $\infty$  en la banda de rechazo con igual rizado en ambas. Esta aproximación se denomina elíptica porque, en la obtención de la función característica, se utilizan las funciones elípticas doblemente periódicas.

La Fig. 3.17 muestra las funciones de atenuación de filtros elípticos de orden 5 y 6, que son representativos de filtros de orden impar y par, respectivamente. Podemos observar las siguientes propiedades:

- 1) La aproximación del filtro elíptico se caracteriza por 4 parámetros:  $A_p$  (ó  $\epsilon$ ),  $\omega_s$ ,  $A_s$  y el orden  $n$ . Cualquier subconjunto formado por tres de estos parámetros lo describen completamente.
- 2) El orden  $n$  y el factor de selectividad  $\omega_s$  determinan de forma única los ceros de reflexión  $\omega_{r_i}$ , los polos de la atenuación  $\omega_{z_i}$  y la razón  $(\delta/\epsilon)$ . Por tanto, se tendría que buscar un compromiso entre  $\epsilon$  y  $\delta$ ; cuando una aumenta la otra también.
- 3) Para  $n$  impar el filtro elíptico tiene un cero de reflexión en el origen y un polo de atenuación en el  $\infty$ . Esto no ocurre para  $n$  par. Los otros



**Figura 3.17: Características de atenuación de filtros elípticos de orden par e impar**

ceros de reflexión y transmisión están en el eje  $j\omega$ . Luego la función característica tiene esta forma:

$$K(s) = k \frac{s \prod_{i=1}^{(n-1)/2} (s^2 + \omega_{r_i}^2)}{\prod_{i=1}^{n/2} (s^2 + \omega_{z_i}^2)} \quad \text{para } n \text{ impar} \tag{3.50}$$

$$K(s) = k \frac{\prod_{i=1}^{n/2} (s^2 + \omega_{r_i}^2)}{\prod_{i=1}^{n/2} (s^2 + \omega_{z_i}^2)} \quad \text{para } n \text{ par}$$

- 4) Como en los filtros de Chebyshev, para  $n$  par la función característica en  $\omega = 0$ ,  $|K(j0)|^2$ , determina el máximo rizado en la banda de paso.

Como en los filtros Chebyshev inversos,  $|K(j\omega)|^2$  en infinito determina el mínimo rizado en la banda de rechazo. Para cualquier  $n$  el número total de picos y valles en la banda pasante es el orden del filtro  $n$ .

Extrayendo  $\epsilon$  de  $K(s)$  se obtienen las funciones que caracterizan a las aproximaciones elípticas, denominadas funciones racionales de Chebyshev:

$$R_{n, \omega_s}(\omega) = r \frac{\omega \prod_{i=1}^{(n-1)/2} (\omega^2 - \omega_{r_i}^2)}{(n-1)/2 \prod_{i=1}^{n/2} (\omega^2 - \omega_{z_i}^2)} \quad \text{para } n \text{ impar} \tag{3.51}$$

$$R_{n, \omega_s}(\omega) = r \frac{i=1}{n/2} \prod_{i=1}^{n/2} (\omega^2 - \omega_{r_i}^2) \quad \text{para } n \text{ par}$$

que dependen del valor de  $\omega_s$ , a través de los  $\omega_{z_i}$  y de los  $\omega_{r_i}$ . La magnitud de la función de transferencia vendrá dada por:

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 R_n^2(\omega)} \tag{3.52}$$

En la aproximación elíptica los ceros de reflexión y los polos de atenuación exhiben simetría geométrica alrededor de una frecuencia de la banda de transición,  $\sqrt{\omega_p \omega_s}$ , es decir,

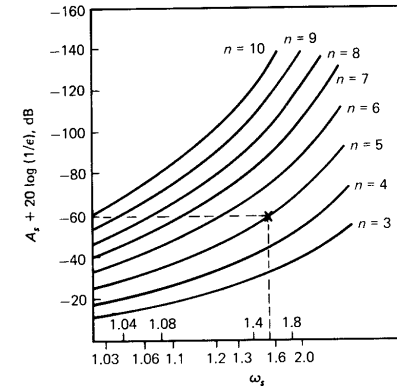
$$\omega_{z_1} \omega_{r_1} = \omega_{z_2} \omega_{r_2} = \dots = \omega_s \omega_p \tag{3.53}$$

**Determinación del orden del filtro n**

Tal como se ha hecho para las otras aproximaciones se puede derivar una ecuación para el orden del filtro elíptico necesario para cumplir unas especificaciones dadas. Sin embargo, tal expresión incluye integrales elípticas para las cuales se necesitan tablas. Pero es fácil observar que en la banda de rechazo  $\epsilon^2 R_n^2(\omega) \gg 1$ . Por tanto, si  $A_s$  es la atenuación en dB para  $\omega = \omega_s$ :

$$A_s + 20 \log_{10} \frac{1}{\epsilon} \approx 20 \log_{10} |R_n(\omega_s)| \tag{3.54}$$

Dibujando  $20 \log_{10} |R_n(\omega_s)|$  frente a  $\omega_s$  obtenemos familias de curvas con las que se puede determinar el orden  $n$ , dados  $A_s$ ,  $\epsilon$  y  $\omega_s$ . Estas curvas se muestran en la Fig. 3.18. Por ejemplo, si  $A_p \leq 0.5\text{dB}$  ( $\epsilon = 0.3493$ ),  $A_s \geq 50\text{dB}$  y  $\omega_s = 1.5$  entonces el orden del filtro es  $n = 5$ .



**Figura 3.18: Carta de diseño de filtros elípticos**

La obtención de polos y ceros requiere normalmente el uso de un ordenador. Se pueden encontrar tablas de polos y ceros para un gran número de casos. La forma de la función de transferencia de un filtro elíptico es:

$$H(s) = \frac{\prod_{i=1}^m (s^2 + a_i)}{s^n + b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \dots + b_1s + b_0} \tag{3.55}$$

Estas funciones se encuentran tabuladas y  $H$  se escoge de forma que el pico de ganancia sea la unidad.

### Ejemplo

**3.3.-** Encontrar la función de transferencia de un filtro elíptico que satisface las mismas especificaciones de los ejemplos anteriores (banda pasante en  $0 \leq f \leq 1.2\text{kHz}$  con  $A_p = 0.5\text{dB}$  de atenuación máxima y una banda de rechazo en  $f \geq 1.92\text{kHz}$  con una atenuación mínima  $A_s = 23\text{dB}$ ).

#### Solución detallada

Tenemos que  $\omega_s = 1.6$  y  $\varepsilon^2 = 0.1220$ . Para usar las tablas de filtros elípticos necesitamos los números  $A_1 = \min|H(j\omega)|$  en  $\omega \leq 1$  y  $A_2 = \max|H(j\omega)|$  en  $\omega \geq \omega_s$ . Tenemos que

$$A_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}} = 0.944 \quad (3.56)$$

$$A_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + \delta^2}} = 10^{-0.1A_s/20} = 0.0708$$

En las tablas se comprueba que un filtro elíptico de segundo orden no cumple las especificaciones. Para  $\omega_s = 1.6$  y  $A_1 = 0.95$ , se tiene  $A_2 = 0.35099$ .

Con un filtro de tercer orden se tiene  $A_2 = 0.066 < 0.0708$ . Por tanto:

$$H(s) = \frac{0.2816(s^2 + 3.2236)}{(s + 0.7732)(s^2 + 0.4916s + 1.1742)} \quad (3.57)$$

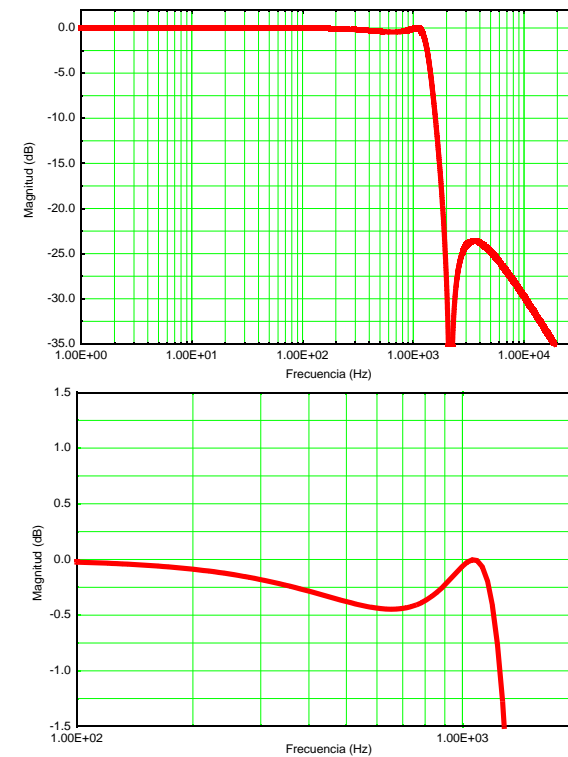
con  $H(0) = 1$  ya que el orden es impar.

El diagrama de Bode de magnitud resultante y una ampliación del mismo en el entorno del borde la banda pasante se muestran en la Fig. 3.19.

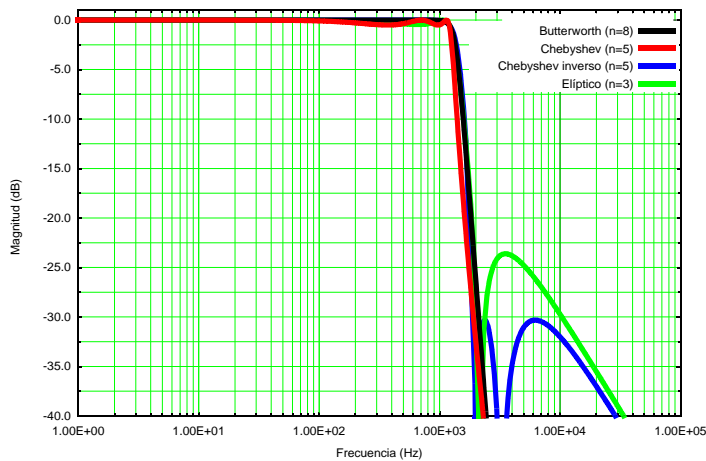
A modo de resumen, la Fig. 3.20 muestra los diagramas de magnitud obtenidos en los ejemplos. Para las siguientes especificaciones:  $A_p = 0.5\text{dB}$ ,  $A_s = 23\text{dB}$  y  $\omega_s = 1.6$ , hemos obtenido  $n_{\text{elíptico}} = 3$ ,

$n_{\text{Chebyshev}} = 5$  y  $n_{\text{Butterworth}} = 8$ . Estas diferencias de orden son aún mayores si las especificaciones son más estrictas. Por ejemplo, para  $A_p = 0.05\text{dB}$ ,  $A_s = 80\text{dB}$  y  $\omega_s = 1.2$  se obtiene  $n_{\text{elíptico}} = 10$ ,  $n_{\text{Chebyshev}} = 20$  y  $n_{\text{Butterworth}} = 63$ .

Hemos visto que para unas especificaciones de magnitud dadas la aproximación elíptica es la más eficiente (de las aproximaciones clásicas), seguida por la Chebyshev y la Butterworth. El motivo principal es la distribución de igual rizado del error en la banda pasante junto con la presencia de ceros de transmisión finitos que permiten a la función de transferencia



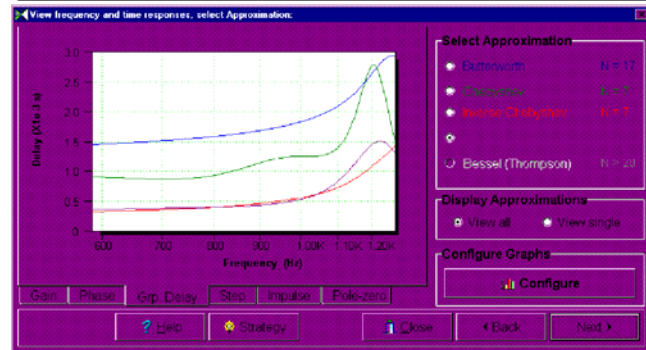
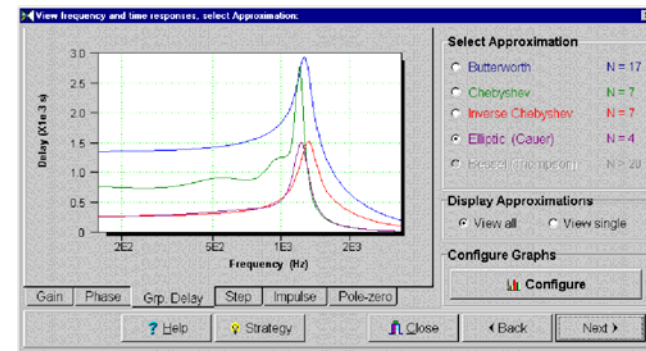
**Figura 3.19: Diagrama de magnitud del filtro elíptico y ampliación de la banda pasante.**



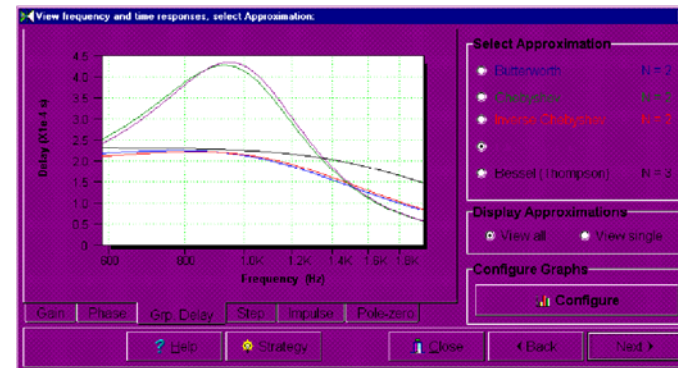
**Figura 3.20: Diagrama de Bode de magnitud para todas las aproximaciones clásicas que hemos visto.**

elíptica tener una transición muy brusca (la anchura de la región de transición es la especificación más exigente). Para las mismas especificaciones que los ejemplos anteriores pero con  $\omega_s = 1.1$  se obtiene  $n_{\text{elíptico}} = 4$ ,  $n_{\text{Chebyshev}} = 10$  y  $n_{\text{Butterworth}} = 39$ .

Es interesante comparar las tres aproximaciones desde el punto de vista del retraso. Ya que los filtros Chebyshev y elípticos tienen polos con mayores factores de calidad, sus curvas de retraso para el mismo orden tienen más pico. Sin embargo, esta aproximación no es muy correcta puesto que estamos comparando curvas de retraso de igual orden y la comparación debe efectuarse entre filtros que cumplan las mismas especificaciones. En este caso, la Fig. 3.21 muestra una comparación de los retrasos para las especificaciones:  $A_p = 0.5\text{dB}$ ,  $A_s = 23\text{dB}$  y  $\omega_s = 1.25$ . Sin embargo, a medida que las especificaciones son más relajadas y los órdenes necesarios en cada aproximación son iguales o no difieren mucho, las diferencias de comportamiento en retraso vienen dominadas por los factores de calidad de los polos correspondientes, como aparece en la Fig. 3.22



**Figura 3.21: Comparación de retrasos y ampliación.**



**Figura 3.22: Comparación de retrasos para igual orden.**

### 3.8 Aproximación Bessel

Para una transmisión sin distorsión de fase o retraso la función de transferencia debe ser:

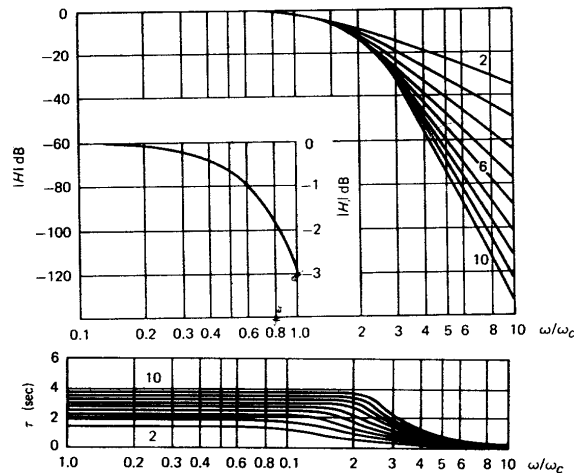
$$H(s) = Ke^{-s\tau} \tag{3.58}$$

la cual proporciona fase lineal o retraso constante. Mediante esta función, la salida es una réplica exacta de la entrada retrasada  $\tau$  segundos.

Una aproximación todo polo para  $e^{-s\tau}$  es:

$$H(s) = \frac{b_0}{s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1s + b_0} \tag{3.59}$$

donde los coeficientes  $b_i$  se obtienen imponiendo un retraso máximamente plano. Los polinomios así obtenidos son los polinomios de Bessel, y los filtros, filtros de Bessel. También se les denomina filtros de retraso máximamente plano. La Fig. 3.23 muestra la característica en magnitud y retraso para  $n \leq 10$ .



**Figura 3.23: Magnitud y retraso para filtros Bessel con  $n \leq 10$**

Los coeficientes del denominador de la función de transferencia se obtienen mediante:

$$b_i = \frac{(2n-i)!}{2^{n-i}i!(n-i)!} \quad i = 0, 1, \dots, n-1 \tag{3.60}$$

siendo 
$$D(s) = \sum_{i=0}^n b_i s^i \quad \text{y} \quad b_n = 1 \tag{3.61}$$

Los polinomios de retraso máximamente plano para  $n \leq 10$  se encuentran tabulados. Los de orden superior se obtienen mediante la siguiente relación recursiva:

$$D_n(s) = (2n-1)D_{n-1} + s^2D_{n-2} \tag{3.62}$$

A mayor  $n$  se obtiene una aproximación más precisa de retraso constante. Si dividimos  $b_i/b_0$ ,

$$\frac{b_i}{b_0} = \frac{(2n-i)!}{2^{n-i}i!(n-i)!} \frac{2^n n!}{(2n)!} = \frac{n!/(n-i)!}{(2n)!/(2n-i)!2^{-i}i!} \tag{3.63}$$

Para  $n \rightarrow \infty$ : 
$$\frac{b_i}{b_0} \rightarrow \frac{n^i}{(2n)^i 2^{-i}i!} = \frac{1}{i!} \tag{3.64}$$

Luego,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} H(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_0}{b_0 \sum_{i=0}^n \frac{b_i}{b_0} s^i} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_0}{b_0 \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} s^i} = e^{-s} \tag{3.65}$$

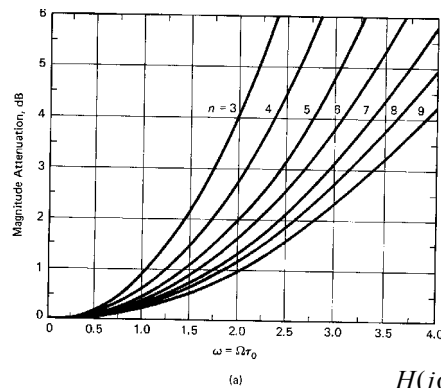
que corresponde a un retraso constante normalizando  $s$  por  $\Omega_o = 1/\tau_o$ .

Para  $n$  finito,  $H(s)$  tiene errores de magnitud y retraso. El único parámetro disponible de los filtros Bessel debe elegirse de modo que ambos errores sean aceptablemente pequeños. Para ayudar en esta elección se disponen de curvas de atenuación y errores de retraso, tales como las que se

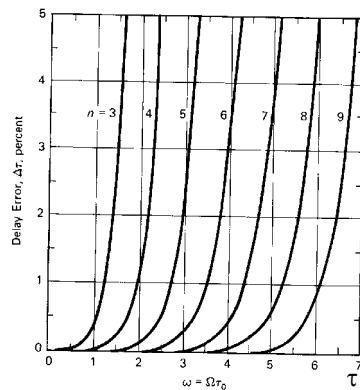


muestran en la Fig. 3.24.

Los filtros Bessel son ineficientes en términos de selectividad de ganancia (o sea, cuando se usan como aproximación en magnitud). Por ejemplo, para  $\omega = 4\omega_p$  la atenuación de un filtro Butterworth de cuarto orden es 50dB mientras que se necesita un filtro Bessel de orden 7 para conseguir la misma atenuación. Por esta razón es preferible utilizar filtros diseñados en ganancia y utilizar ecualizadores de fase.



$$H(j\omega) = |H(j\omega)|e^{-j\phi(\omega)}$$



$$\tau(\omega) = \frac{\partial\phi}{\partial\omega} = \tau_o[1 - \Delta\tau(\omega)]$$

**Figura 3.24: Error de magnitud y retraso para filtros Bessel en función de la frecuencia normalizada  $\omega = \Omega\tau_o$  para diferentes órdenes  $n$ .**

### 3.9 Transformaciones en frecuencia

Hasta ahora sólo hemos considerado la aproximación de funciones de transferencia con especificaciones paso de baja. Las transformaciones en frecuencia consiguen, mediante una simple transformación de la variable de frecuencia, obtener, a partir de una función de transferencia paso de baja conocida, llamada paso de baja prototipo, otros tipos de características de transferencia tales como paso de alta, paso de banda o rechazo de banda.

#### Transformación paso de baja a paso de banda (LP→BP)

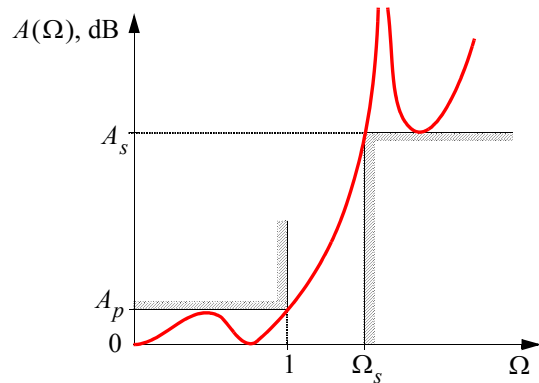
La transformación paso de baja a paso de banda se usa para encontrar una aproximación a unas especificaciones paso de banda calculando primero una aproximación a unas especificaciones paso de baja “equivalentes”. Por tanto, la transformación LP→BP se aplica a la función de transferencia del filtro paso de baja prototipo para obtener la función de transferencia del filtro paso de banda.

El punto de partida son unas ciertas especificaciones para el filtro paso de banda. El primer paso es encontrar las especificaciones para el filtro paso de baja prototipo. Este paso dependerá de las propiedades de la transformación LP→BP por lo que nos ocupamos de ellas en primer lugar.

Consideremos unas especificaciones de atenuación paso de baja tales como las de la Fig. 3.25.

Estas especificaciones pueden satisfacerse con una aproximación clásica. Si pretendemos realizar una aproximación no clásica, carecería de sentido la transformación puesto que sería más conveniente realizar directamente la aproximación paso de banda.

Una vez que se han obtenido las especificaciones paso de baja ( $A_p$ ,  $A_s$  y  $\omega_s$ ) se busca una aproximación adecuada con ayuda de tablas o fórmulas. Esto proporciona una función de transferencia  $H_{LPP}(s)$  (donde  $s = j\Omega$ ) para el filtro paso de baja prototipo. Entonces se busca una transformación de la variable de frecuencia  $s$  en una nueva variable de frecuencia  $p$



**Figura 3.25: Especificaciones paso de baja y aproximación típica**

( $p = j\omega$ ),  $s = f(p)$ , tal que la función de transferencia paso de banda:

$$H_{BP}(p) = H_{LPP}(s) \Big|_{s=f(p)} \tag{3.66}$$

satisface las especificaciones paso de banda.

Ya que la atenuación es una función par de  $\Omega$ , podemos dibujar la función  $A(-\Omega)$  como imagen especular de  $A(+\Omega)$  para obtener la representación completa de  $A(\Omega)$  que se muestra en la Fig. 3.26.

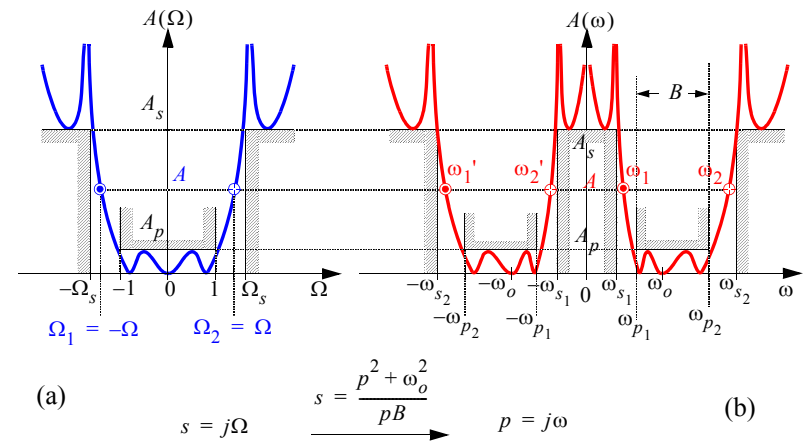
Obsérvese que esta gráfica representa un filtro paso de banda cuya frecuencia central es 0, la banda de paso se extiende desde  $-1$  a  $+1$  y la banda de rechazo superior se extiende de  $\Omega_s$  a  $\infty$  y la inferior de  $-\Omega_s$  a  $-\infty$ .

Necesitamos una transformación de frecuencia que traslade esta representación a una posición determinada en la parte positiva y negativa del eje de frecuencias. Esta transformación es:

$$s = \frac{p^2 + \omega_o^2}{pB} \tag{3.67}$$

De esta expresión se obtienen las siguientes propiedades:

- 1) La frecuencia  $s = 0$  se transforma en  $p = \pm j\omega_o$ .  $\omega_o$  se denomina frecuencia central del filtro paso de banda.



**Figura 3.26: Transformación LP→BP**

2) Cualquier frecuencia  $s = j\Omega$  en la que la atenuación es  $A$  dB se transforma en dos frecuencias, una positiva y otra negativa, con la misma atenuación de  $A$  dB:

$$\omega_2 = \frac{1}{2}B\Omega + \sqrt{\omega_o^2 + \frac{1}{4}B^2\Omega^2} \tag{3.68}$$

$$\omega_2' = \frac{1}{2}B\Omega - \sqrt{\omega_o^2 + \frac{1}{4}B^2\Omega^2}$$

La frecuencia  $s = -j\Omega$  también produce dos frecuencias, positiva y negativa, con  $A$  dB de atenuación:

$$\omega_1 = -\frac{1}{2}B\Omega + \sqrt{\omega_o^2 + \frac{1}{4}B^2\Omega^2} \tag{3.69}$$

$$\omega_1' = -\frac{1}{2}B\Omega - \sqrt{\omega_o^2 + \frac{1}{4}B^2\Omega^2}$$

Dado que estamos solo interesados en frecuencias positivas podemos decir en resumen que una frecuencia  $s = \pm j\Omega$  en el filtro paso de baja

prototipo da lugar a dos frecuencias positivas:

$$\omega_{1,2} = \mp \frac{1}{2} B \Omega + \sqrt{\omega_o^2 + \frac{1}{4} B^2 \Omega^2} \quad (3.70)$$

relacionadas mediante

$$\omega_1 \omega_2 = \omega_o^2 \quad (3.71)$$

Es decir, en el diagrama de atenuación transformado cada dos frecuencias de igual atenuación son geométricamente simétricas respecto a la frecuencia central  $\omega_o$ .

3) Las bordes de la banda de paso  $s = \pm j1$  se transforman en cuatro frecuencias. Las dos positivas vienen dadas por:

$$\omega_{p1,2} = \mp \frac{1}{2} B + \sqrt{\omega_o^2 + \frac{1}{4} B^2} \quad (3.72)$$

Por tanto:

$$\omega_{p2} - \omega_{p1} = B \quad (3.73)$$

es el ancho de banda del filtro paso de banda.

4) Las frecuencias  $s = \pm j\Omega_s$ , que definen la banda de rechazo, se corresponden con cuatro frecuencias. Las dos positivas se relacionan mediante:

$$\omega_{s2} - \omega_{s1} = B \Omega_s \quad (3.74)$$

La Fig. 3.26(b) muestra el diagrama de atenuación transformado. La propiedad más importante es la simetría geométrica. Esta es una limitación fundamental de la transformación LP→BP: no es posible diseñar filtros BP con simetría aritmética usando esta transformación.

Consideremos ahora el problema de encontrar una función de transferencia  $H_{BP}(p)$  para las especificaciones paso de banda de la Fig. 3.27. Para obtener una aproximación clásica primero hay que modificar las especifica-

ciones como sigue:

- 1) La atenuación de las bandas de rechazo debe hacerse constante ya que éste es el único caso que se considera en las aproximaciones clásicas. La atenuación mínima  $A_s$  debe hacerse igual al caso más desfavorable.
- 2) Deben redefinirse los bordes de las bandas de rechazo para que sean geométricamente simétricos. Para ello primero se halla la frecuencia central:

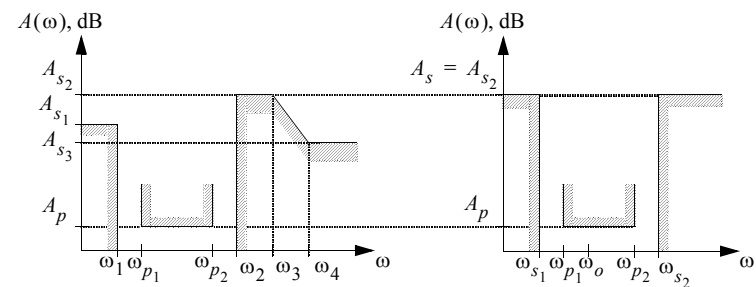
$$\omega_o = \sqrt{\omega_{p1} \omega_{p2}} \quad (3.75)$$

Entonces se evalúa:

$$\omega_{s1} = \frac{\omega_o^2}{\omega_2} \quad (3.76)$$

Si  $\omega_{s1} > \omega_1$  entonces los bordes de la banda de rechazo son  $\omega_{s1}$  y  $\omega_2$ . Pero si  $\omega_{s1} < \omega_1$  entonces se evalúa:

$$\omega_{s2} = \frac{\omega_o^2}{\omega_1} \quad (3.77)$$



**Figura 3.27: Modificación de las especificaciones del filtro BP.**

y se redefinen los bordes de la banda de rechazo como  $\omega_1$  y  $\omega_{s2}$ . Las especificaciones modificadas se muestran en la Fig. 3.27(b.)

El segundo paso es encontrar los parámetros del diagrama de especificaciones del filtro paso de baja prototipo.  $A_p$  y  $A_s$  son iguales que los de la Fig. 3.27(b). El factor de selectividad  $\Omega_s$  se obtiene de (3.74):

$$\Omega_s = \frac{\omega_{s2} - \omega_{s1}}{\omega_{p2} - \omega_{p1}} \quad (3.78)$$

Entonces se realiza una aproximación clásica del filtro paso de baja prototipo y se aplica la transformación LP→BP:

$$s = \frac{p^2 + \omega_o^2}{pB} \quad (3.79)$$

Conviene hacer notar que la aplicación de la transformación conduce a un filtro paso de banda desnormalizado en la frecuencia.

**Transformación paso de baja a paso de alta (LP→HP)**

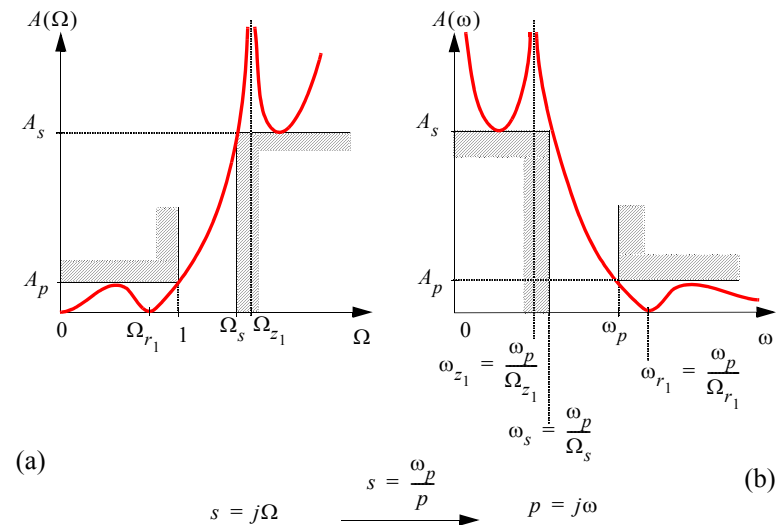
Esta transformación permite el diseño de un filtro HP mediante la transformación del diseño de un filtro LP prototipo. Esta transformación tiene una importancia especial ya que es válida para el diseño de cualquier filtro HP, no solamente para el caso de aproximaciones clásicas.

Consideremos la característica de atenuación paso de baja de la Fig. 3.28(a). A partir de ella dibujamos la función de atenuación  $A(\omega_p/\omega)$  donde  $\omega_p$  es una frecuencia constante. Resulta la función paso de alta de la Fig. 3.28(b). Por definición el valor de  $\omega_s$  se obtiene de  $\Omega_s = \omega_p/\omega_s$ . Luego la transformación LP→HP es,

$$\Omega = \frac{\omega_p}{\omega} \quad \text{ó} \quad s = \frac{\omega_p}{p} \quad (3.80)$$

**Transformación paso de baja a rechazo de banda (LP→BR)**

La transformación LP→BR se usa para diseñar filtros rechazo de banda



**Figura 3.28: Transformación paso de baja a paso de alta.**

de simetría geométrica mediante la transformación del filtro paso de baja correspondiente.

Consideremos la característica de atenuación paso de baja de la Fig. 3.29(a). Aplicando una transformación LP→HP con  $\omega_p = 1$  se obtiene la función de la Fig. 3.29(b). Esta transformación se obtiene mediante,

$$s = \frac{1}{s'} \quad (3.81)$$

Dado que la función de atenuación es una función par de la frecuencia se puede replicar para  $\Omega' < 0$ , tal como se muestra en la Fig. 3.29(c). La característica resultante es del tipo rechazo de banda con la banda de rechazo entre  $-1/\Omega_s$  y  $1/\Omega_s$ . La frecuencia central es 0. Las bandas de paso se extienden desde  $-1$  a  $-\infty$  y de  $1$  a  $\infty$ . Siguiendo el mismo procedimiento de la transformación LP→BP se puede trasladar esta característica de atenuación a cualquier punto del eje de frecuencia positivo mediante la transformación:

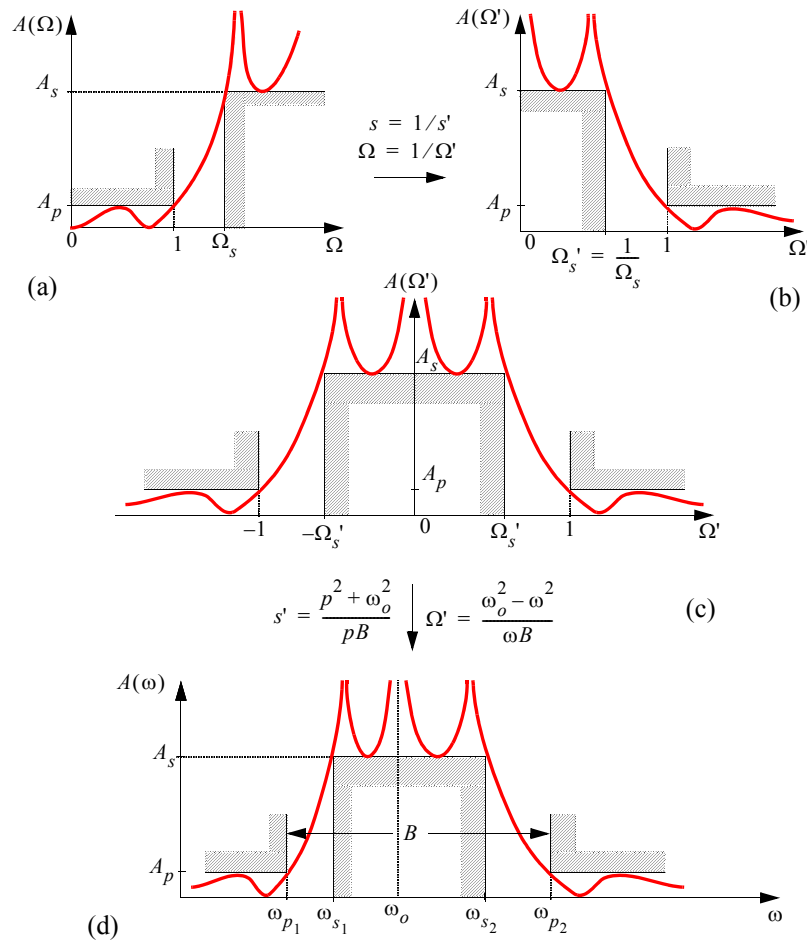


Figura 3.29: Transformación paso de baja a rechazo de banda.

$$s' = \frac{p^2 + \omega_o^2}{pB} \tag{3.82}$$

resultando la característica de atenuación de la Fig. 3.29(d).

Utilizando las propiedades de la transformación LP→BP tenemos que:

$$B = \omega_{p2} - \omega_{p1} \tag{3.83}$$

$$\omega_{s2} - \omega_{s1} = B\Omega_s' = \frac{B}{\Omega_s}$$

Luego la transformación LP→BR viene dada por,

$$s = \frac{pB}{p^2 + \omega_o^2} \tag{3.84}$$

El conjunto de pasos a realizar para obtener una aproximación a un conjunto de especificaciones de filtro rechazo de banda son:

- 1) Modificar las especificaciones haciendo constante la atenuación en las bandas de paso y de rechazo a su valor más bajo y más alto, respectivamente. También ha de transformarse el diagrama de forma que sea geoméricamente simétrico. Para ello consideraremos que  $\omega_o = \sqrt{\omega_{s1}\omega_{s2}}$  y redefiniremos convenientemente las especificaciones de los bordes de las bandas pasantes:  $\omega_{p1}$  y  $\omega_{p2}$ .
- 2) El filtro paso de baja prototipo correspondiente tendrá un factor de selectividad  $\Omega_s$  dado por:

$$\Omega_s = \frac{\omega_{p2} - \omega_{p1}}{\omega_{s2} - \omega_{s1}} \tag{3.85}$$

- 3) Encontrar una aproximación para el filtro paso de baja prototipo.
- 4) Aplicar la transformación LP→BR:

$$s = \frac{pB}{p^2 + \omega_o^2} \quad \text{donde} \quad \begin{aligned} B &= \omega_{p2} - \omega_{p1} \\ \omega_o^2 &= \omega_{p1}\omega_{p2} = \omega_{s1}\omega_{s2} \end{aligned} \tag{3.86}$$

## Problemas resueltos

3.4.- Un filtro paso de baja tiene la función característica  $K(s)$  dada por

$$|K(j\omega)|^2 = \frac{0.48807\omega^{10}}{(2-\omega^2)^2(3-\omega^2)^2} \quad (3.87)$$

Determinar los ceros de transmisión, el parámetro  $\varepsilon$ , la atenuación de la banda pasante en dB y  $H(s)$ .

### Solución:

En primer lugar tenemos, por la ecuación de Feldtkeller, que:

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + |K(j\omega)|^2} \quad (3.88)$$

y como

$$|K(j\omega)|^2 = \frac{|\hat{F}(j\omega)|^2}{|N(j\omega)|^2} \quad (3.89)$$

tenemos que:

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{|N(j\omega)|^2}{|N(j\omega)|^2 + |\hat{F}(j\omega)|^2} \quad (3.90)$$

así que los ceros de transmisión son los polos de la atenuación, de modo que tendremos ceros de transmisión en:

$$\omega = \pm\sqrt{2} \quad \text{y} \quad \omega = \pm\sqrt{3} \quad (3.91)$$

$$\text{o sea} \quad s = \pm j\sqrt{2} \quad \text{y} \quad s = \pm j\sqrt{3} \quad (3.92)$$

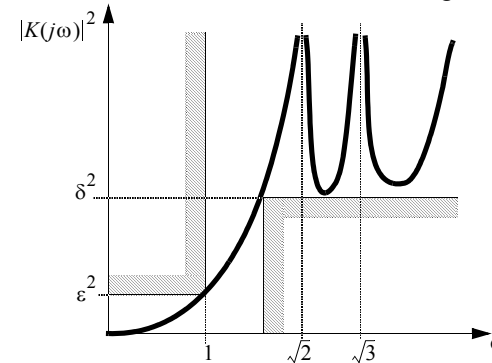
Por otra parte,  $\varepsilon^2 = |K(j1)|^2$ , de modo que:

$$\varepsilon = 0.3493 \quad (3.93)$$

Asimismo, como  $\varepsilon = \sqrt{10^{0.1A_p} - 1}$ , tenemos que

$$A_p = 10\log_{10}(1 + \varepsilon^2) = 0.5 \text{ dB} \quad (3.94)$$

La forma de la ecuación característica es la siguiente:



Para obtener  $H(s)$  partimos de:

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{(2-\omega^2)^2(3-\omega^2)^2}{(2-\omega^2)^2(3-\omega^2)^2 + 0.48807\omega^{10}} \quad (3.95)$$

si hacemos  $\omega = s/j$  llegamos a:

$$H(s)H(-s) = \frac{(s^2+2)^2(s^2+3)^2}{(s^2+2)^2(s^2+3)^2 - 0.48807s^{10}} \quad (3.96)$$

seguimos operando y:

$$H(s)H(-s) = \frac{(s^2+2)^2(s^2+3)^2}{36 + 60s^2 + 37s^4 + 10s^6 + s^8 - 0.48807s^{10}} \quad (3.97)$$

Las raíces del denominador (que es  $D(s)D(-s)$ ) son (calculadas con ayuda de un ordenador):

$$\begin{aligned} s_1 &= -2.6376 & s_2 &= 2.6376 \\ s_{3,5} &= -0.7876 \pm j1.3391 & s_{4,6} &= 0.7876 \pm j1.3391 \\ s_{7,9} &= -0.1845 \pm j1.1468 & s_{8,10} &= 0.1845 \pm j1.1468 \end{aligned} \quad (3.98)$$

de modo que para  $D(s)$  nos quedamos sólo con las que están en el semiplano izquierdo del plano  $s$ , o sea:  $s_1, s_3, s_5, s_7$  y  $s_9$ .

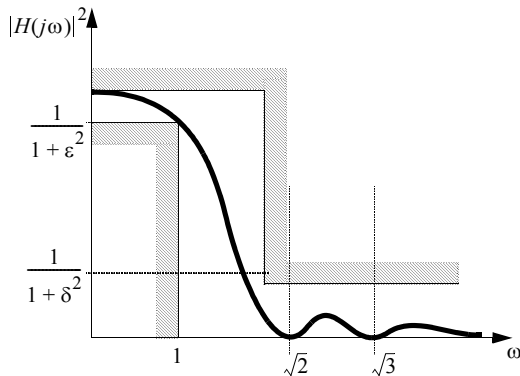
Así que:

$$H(s) = \frac{(s^2 + 2)(s^2 + 3)}{\sqrt{0.48807}(s + 2.6376)(s^2 + 0.3690s + 1.3491)(s^2 + 0.3690s + 1.3491)} \quad (3.99)$$

o sea:

$$H(s) = \frac{1.4314(s^2 + 2)(s^2 + 3)}{s^5 + 4.5817s^4 + 9.4717s^3 + 14.473s^2 + 11.210s + 8.5883} \quad (3.100)$$

cuya magnitud al cuadrado,  $|H(j\omega)|^2$ , tiene esta aproximadamente esta forma:



**3.5.-** Obtener la función de transferencia  $H(s)$  de un filtro paso de baja de segundo orden con una ganancia en dc de 10 y una ganancia máxima de 20 para  $\omega = 1$  rad/s. Especificar los valores de  $\omega_p$  y  $Q$ .

**Solución:**

Partimos de

$$H(s) = \frac{k\omega_p^2}{s^2 + \frac{\omega_p}{Q}s + \omega_p^2} \Rightarrow H(j\omega) = \frac{k\omega_p^2}{\omega_p^2 - \omega^2 + j\frac{\omega\omega_p}{Q}} \quad (3.101)$$

de modo que la magnitud de la función del sistema para  $s = j\omega$  será:

$$|H(j\omega)| = \frac{k\omega_p^2}{\sqrt{(\omega_p^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega\omega_p}{Q}\right)^2}} \quad (3.102)$$

y puesto que  $|H(j0)| = 10$  tendremos que:

$$k = 10 \quad (3.103)$$

Vamos a ver ahora cuanto tienen que valer  $\omega_p$  y  $Q$  para que el valor máximo de la ganancia sea 20 y ocurra para  $\omega = 1$  rad/s. Para ello hacemos:

$$\frac{d}{d\omega}(|H(j\omega)|) \Big|_{\omega = \omega_{\max}} = 0 \Rightarrow -2(\omega_p^2 - \omega_{\max}^2) + \frac{\omega_p^2}{Q^2} = 0 \quad (3.104)$$

lo que nos lleva a: 
$$\omega_{\max} = \omega_p \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \quad (3.105)$$

y así 
$$|H(j\omega_{\max})| = \frac{k}{\sqrt{Q^2 - \frac{1}{4Q^4}}} \quad (3.106)$$

y de aquí, puesto que  $k = 10$ :

$$Q^4 - 4Q^2 + 1 = 0 \Rightarrow Q^2 = \begin{cases} 3.7320 \\ 0.2679 \end{cases} \quad (3.107)$$

de estos dos valores seleccionamos el mayor, ya que  $Q^2 = 0.2679$  no nos llevaría a un máximo en  $\omega_{\max}$ . Por tanto  $Q = 1.9318$ .

Finalmente, de (3.105) extraemos el valor de  $\omega_p$ , dado que  $\omega_{\max}$  tiene que ser 1 rad/s:

$$\omega_p = \omega_{\max} \left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1.0746 \text{ rad/s} \quad (3.108)$$

**3.6.-** Determinar el mínimo orden  $n$  requerido para una función de transferencia de igual rizado en la banda pasante, con una atenuación máxima en la misma de  $1/2$  dB, que se extiende entre 0 y 1 rad/s, y la frecuencia de caída de  $-3.01$  dB no puede ser mayor de 1.1 rad/s.

**Solución:**

Antes de nada vamos a extraer convenientemente las especificaciones a partir del enunciado:

$$\begin{aligned}\omega_p &= 1.0 \text{ rad/s} & A_p &= 0.5 \text{ dB} \\ \omega_s &= 1.1 \text{ rad/s} & A_s &= 3.01 \text{ dB}\end{aligned}\quad (3.109)$$

Primero vamos a obtener el rizado en la banda pasante  $\varepsilon$ :

$$\varepsilon = \sqrt{10^{0.1A_p} - 1} = \sqrt{0.122202} = 0.3493 \quad (3.110)$$

y también el rizado en la banda de rechazo  $\delta$ :

$$\delta = \sqrt{10^{0.1A_s} - 1} = \sqrt{0.99999} \cong 1.0000 \quad (3.111)$$

así que el orden saldrá de:

$$n \geq \frac{\text{acosh}(\delta/\varepsilon)}{\text{acosh}\omega_s} = 3.8618 \quad (3.112)$$

de modo que el orden mínimo requerido para que se cumplan las especificaciones citadas es  $n = 4$ .

**3.7.-** Dado un filtro con un polo de atenuación en infinito, un polo de atenuación en 0 y dos ceros de reflexión en  $s = \pm j\omega_r$  (donde  $\omega_r > 1/2$ ) y con un rizado  $\varepsilon = 1$ , hallar el orden del filtro, su función de transferencia y los polos o modos naturales del filtro.

**Solución:**

Partimos de que  $H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$  y  $K(s) = \frac{\hat{F}(s)}{N(s)}$ . Si contabilizamos los polos y ceros en 0 y en infinito, el número de polos de  $H(s)$  es igual al número de ceros de  $H(s)$  y también al número de polos de la atenuación. Como el enunciado dice que la atenuación tiene dos polos, entonces:  $n = 2$ .

Tenemos polo de la atenuación en 0, y tenemos polo de la atenuación en  $\infty$ . Para ello necesitaremos que  $N(s) = k_1 s$  y que el orden de  $F(s)$  sea 2. Puesto que tenemos ceros de reflexión en  $s = \pm j\omega_r$ , podemos suponer que  $K(s)$  tiene la forma:

$$K(s) = \frac{k(s^2 + \omega_r^2)}{s} \quad (3.113)$$

donde la contante  $k$  engloba las posibles constantes de  $\hat{F}(s)$  y de  $N(s)$ .

O sea que

$$|K(j\omega)|^2 = \frac{k^2(\omega_r^2 - \omega^2)^2}{\omega^2} \quad (3.114)$$

Mediante la ecuación de Feldtkeller:

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + |K(j\omega)|^2} = \frac{\omega^2}{\omega^2 + k^2(\omega_r^2 - \omega^2)^2} \quad (3.115)$$

y ahora, haciendo  $\omega = s/j$

$$H(s)H(-s) = \frac{-s^2}{-s^2 + k^2(\omega_r^2 + s^2)^2} = \frac{-s^2/k^2}{s^4 + \left(2\omega_r^2 - \frac{1}{k^2}\right)s^2 + \omega_r^4} \quad (3.116)$$

Para encontrar las raíces del denominador de la función de transferencia, tendríamos que resolver la siguiente ecuación:

$$D(s)D(-s) = s^4 + (2\omega_r^2 - 1/k^2)s^2 + \omega_r^4 = 0 \quad (3.117)$$

Supongamos para ello que las raíces del denominador de  $H(s)$  son un par



de polos complejos conjugados,  $s_{1,2} = -\alpha \pm j\beta$ . De modo que las raíces de  $D(s)D(-s)$  serían esas dos, más  $s_{3,4} = \alpha \pm j\beta$ , si hacemos:

$$D(s)D(-s) = (s - s_1)(s - s_2)(s - s_3)(s - s_4) \quad (3.118)$$

llegamos a que:

$$D(s)D(-s) = s^4 + 2(\beta^2 - \alpha^2)s^2 + (\alpha^2 + \beta^2)^2 \quad (3.119)$$

Comparando (3.119) con (3.117) deducimos los valores de  $\alpha$  y  $\beta$ , y por tanto:

$$\begin{aligned} s_{1,2} &= -\frac{1}{2k} \pm j\frac{1}{2k} \sqrt{4k^2 \omega_r^2 - 1} \\ s_{3,4} &= \frac{1}{2k} \pm j\frac{1}{2k} \sqrt{4k^2 \omega_r^2 - 1} \end{aligned} \quad (3.120)$$

de modo que para  $D(s)$  me quedo con  $s_1$  y  $s_2$  que tienen parte real negativa y por tanto hacen que este sistema tenga los polos en el semiplano izquierdo del plano  $s$ , por lo que será estable. Finalmente, si llamamos  $\omega_r/Q$  a  $1/k$  tendremos:

$$H(s) = \frac{\frac{\omega_r}{Q}s}{s^2 + \frac{\omega_r}{Q}s + \omega_r^2} \quad (3.121)$$

con modos naturales:

$$p_{1,2} = -\omega_r \pm j\omega_r \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \quad (3.122)$$

**3.8.-** Considerar una aproximación de filtro paso de baja normalizada con  $\varepsilon = 1$  ( $A_p \cong 3$  dB). El filtro tiene tres ceros de reflexión en 0, un polo de atenuación en  $\infty$  y un par de polos de atenuación en  $s = \pm j\omega_z$ , con  $\omega_z = 2$ . Si  $\omega_s = \sqrt{3}$  encontrar el valor de  $A_s$ .

### Solución:

De manera análoga a como lo hemos hecho en el problema anterior, analizando el enunciado llegamos a la conclusión de que el filtro debe ser de orden 3, ya que tenemos tres polos de atenuación (contando los que existen en  $\infty$ ). De estos polos de atenuación, dos son finitos, están sobre el eje  $j\omega$ , en concreto en  $\omega = \pm\omega_z$ . Esto nos lleva a que en  $N(s)$  aparezca un factor del tipo:  $(s^2 + \omega_z^2)$ . Asimismo, puesto que existe un polo de la atenuación en infinito, el orden de  $\hat{F}(s)$  debe ser 3. Además, existiendo tres ceros de reflexión en  $s = 0$ , debemos tener un factor de la forma  $s^3$  en  $\hat{F}(s)$ . Así que, agrupando las posibles constantes en una, concluimos que:

$$K(s) = \frac{ks^3}{s^2 + \omega_z^2} \quad (3.123)$$

O sea que:

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{|N(j\omega)|^2}{|N(j\omega)|^2 + |\hat{F}(j\omega)|^2} = \frac{(\omega_z^2 - \omega^2)^2}{(\omega_z^2 - \omega^2)^2 + k^2 \omega^6} \quad (3.124)$$

Para averiguar el valor de  $k$  hemos de tener en cuenta que, en el borde de la banda pasante, para  $\omega = 1$ ,  $|H(j1)|^2 = 1/2$  (ya que  $A_p = 3$  dB), igualamos y:

$$|H(j1)|^2 = \frac{(\omega_z^2 - \omega_p^2)^2}{(\omega_z^2 - \omega_p^2)^2 + k^2 \omega_p^6} = \frac{(4-1)^2}{(4-1)^2 + k^2} = \frac{1}{2} \quad (3.125)$$

de donde tenemos que  $k = \pm\sqrt{2}$ .

Ahora, y puesto que  $\omega_s = \sqrt{3}$ , tenemos

$$|H(j\omega_s)|^2 = \frac{(\omega_z^2 - \omega_s^2)^2}{(\omega_z^2 - \omega_s^2)^2 + k^2 \omega_s^6} = \frac{(4-3)^2}{(4-3)^2 + (2 \cdot 27)} = \frac{1}{55} \quad (3.126)$$

o sea que:

$$A_s = -10\log_{10}|H(j\omega_s)|^2 = 10\log_{10}55 = 17.40\text{dB} \quad (3.127)$$

**3.9.-** Convencionalmente se estudian las funciones de transferencia todo polo máximamente planas alrededor de  $\omega = 0$ . Podría pensarse en una frecuencia  $\omega_o$  en la banda pasante  $0 < \omega_o < 1$  como frecuencia a la que la función fuera máximamente plana. Determinar la función característica para este caso  $K(s)$ . Para esta función obtener y dibujar  $|K(j\omega)|^2$  y  $|H(j\omega)|^2$ . ¿Cuál es el efecto de  $n$  y  $\omega_o$ ? ¿Qué restricciones debe cumplir  $\omega_o$  si  $|H(j0)| = |H(j1)|$  y  $\min(|H(j\omega)|^2) = 1/(1 + \epsilon^2)$  para  $0 \leq \omega \leq 1$ ?

**Solución:**

En el caso en que  $\omega_o = 0$  teníamos que  $|K(j\omega)|^2 = \epsilon^2 \omega^{2n}$ . En esta ocasión queremos trasladar el comportamiento que observábamos en  $\omega = 0$  a una  $\omega = \omega_o$ . Para ello vamos a realizar un cambio de variable.

Por ejemplo  $\omega = \bar{\omega} - \omega_o$ . El problema es que para que los coeficientes sean reales la función  $|K(j\omega)|^2 = \epsilon^2 \omega^{2n}$  debe seguir siendo par, y esta transformación no nos asegura que  $|K(j\bar{\omega})|^2$  sea par en  $\bar{\omega}$ .

Otro cambio posible sería  $\omega = \bar{\omega}^2 - \omega_o^2$ . Ahora el problema estaría en el valor del rizado para  $\bar{\omega} = 1$ , tendríamos:

$$|K(j1)|^2 = \epsilon^2(1 - \omega_o^2)^{2n} \quad (3.128)$$

Si redefinimos la transformación como

$$\omega = \frac{\bar{\omega}^2 - \omega_o^2}{1 - \omega_o^2} \quad (3.129)$$

la función característica pasa a ser:

$$|K(j\bar{\omega})|^2 = \epsilon^2 \left( \frac{\bar{\omega}^2 - \omega_o^2}{1 - \omega_o^2} \right)^{2n} \quad (3.130)$$

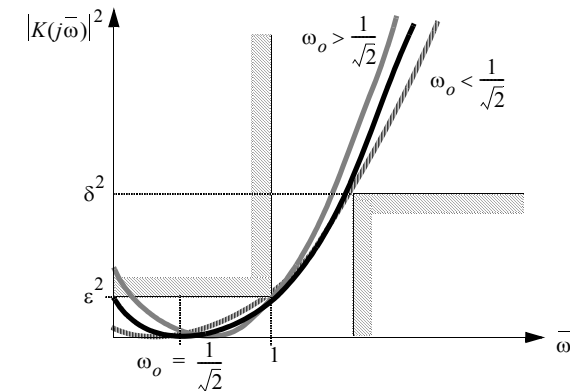
Si hacemos  $\bar{\omega} = \bar{s}/j$ :

$$K(\bar{s})K(-\bar{s}) = \epsilon^2 \left( \frac{\bar{s}^2 + \omega_o^2}{1 - \omega_o^2} \right)^{2n} \Rightarrow K(\bar{s}) = \epsilon \left( \frac{\bar{s}^2 + \omega_o^2}{1 - \omega_o^2} \right)^n \quad (3.131)$$

tenemos la forma de la función característica. Vemos que para  $\bar{\omega} = 0$  pueden darse diferentes situaciones:

$$|K(j0)|^2 = \epsilon^2 \left( \frac{-\omega_o^2}{1 - \omega_o^2} \right)^{2n} \begin{cases} \text{si } \omega_o \geq 1/\sqrt{2} \Rightarrow |K(j0)|^2 \geq \epsilon^2 \\ \text{si } \omega_o < 1/\sqrt{2} \Rightarrow |K(j0)|^2 < \epsilon^2 \end{cases} \quad (3.132)$$

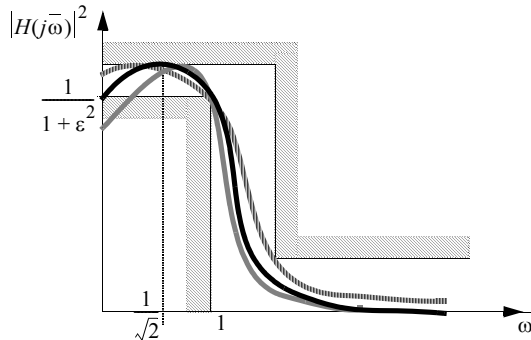
Veamos la forma de  $|K(j\bar{\omega})|^2$



Por otro lado  $|H(j\bar{\omega})|^2$  vale:

$$|H(j\bar{\omega})|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \left( \frac{\bar{\omega}^2 - \omega_o^2}{1 - \omega_o^2} \right)^{2n}} \quad (3.133)$$

que tiene la siguiente forma:



de modo que el valor de  $\omega_o$  fija el máximo rizado en la banda pasante. Si  $\omega_o \leq 1/\sqrt{2}$ , éste será  $\varepsilon$ , mientras que si  $\omega_o > 1/\sqrt{2}$ , el máximo rizado será  $\varepsilon[\omega_o^2/(1 - \omega_o^2)]^n$ , que ocurre para  $\bar{\omega} = 0$ .

Mientras tanto,  $n$  nos da el grado de planitud de la función de transferencia en  $\omega_o$ . Podemos comprobar que  $|K(j\omega_o)|^2 = 0$  y que las  $2n - 1$  derivadas del error de transmisión también son cero en  $\bar{\omega} = \omega_o$ . Tenemos que el error de transmisión es

$$\Delta(\bar{\omega}^2) = 1 - |H(j\bar{\omega})|^2 = \frac{1}{1 + |K(j\bar{\omega})|^2} \quad (3.134)$$

así que por la regla de la cadena:

$$\frac{d\Delta(\bar{\omega}^2)}{d(\bar{\omega}^2)} = \frac{d\Delta}{dK} \frac{dK}{d(\bar{\omega}^2)} \quad (3.135)$$

lo que significa que si  $dK/d(\bar{\omega}^2) = 0$  para  $\bar{\omega} = \omega_o$ , se anulará también  $d\Delta/d(\bar{\omega}^2) = 0$ . Si esto ocurre para las  $2n - 1$  derivadas sucesivas de

$|K(j\bar{\omega})|^2$  respecto de  $(\bar{\omega}^2)$ , también se anularán las  $2n - 1$  derivadas sucesivas de  $\Delta(\bar{\omega}^2)$  respecto de  $(\bar{\omega}^2)$ . De modo que veamos cuanto valen esas  $2n - 1$  derivadas de  $|K(j\bar{\omega})|^2$  respecto de  $(\bar{\omega}^2)$ :

$$\begin{aligned} \left. \frac{d|K(j\bar{\omega})|^2}{d(\bar{\omega}^2)} \right|_{\bar{\omega} = \omega_o} &= \frac{2n\varepsilon^2}{(1 - \omega_o^2)^{2n}} (\bar{\omega}^2 - \omega_o^2)^{2n-1} \Big|_{\bar{\omega} = \omega_o} = 0 \\ \left. \frac{d^2|K(j\bar{\omega})|^2}{d(\bar{\omega}^2)^2} \right|_{\bar{\omega} = \omega_o} &= \frac{2n(2n-1)\varepsilon^2(\bar{\omega}^2 - \omega_o^2)^{2n-2}}{(1 - \omega_o^2)^{2n}} \Big|_{\bar{\omega} = \omega_o} = 0 \\ \left. \frac{d^i|K(j\bar{\omega})|^2}{d(\bar{\omega}^2)^i} \right|_{\bar{\omega} = \omega_o} &= \frac{2n!}{(2n-i)!} \cdot \frac{\varepsilon^2(\bar{\omega}^2 - \omega_o^2)^{2n-i}}{(1 - \omega_o^2)^{2n}} \Big|_{\bar{\omega} = \omega_o} = 0 \end{aligned} \quad (3.136)$$

así que  $n$  nos da el grado de planitud de la función de transferencia en  $\omega_o$ .

Finalmente, para responder a la última pregunta, igualamos estas expresiones:

$$|H(j0)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \frac{\omega_o^{4n}}{(1 - \omega_o^2)^{2n}}} \quad \text{y} \quad |H(j1)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2} \quad (3.137)$$

de donde llegamos a que  $\omega_o = 1/\sqrt{2}$ , como ya habíamos identificado antes, y el valor mínimo de  $|H(j\bar{\omega})|^2$  en la banda pasante es precisamente  $|H(j1)|^2$ , o sea,  $1/(1 + \varepsilon^2)$ .

**3.10.-** Obtener una función de transferencia paso de baja  $H(s)$  que cumpla las siguientes condiciones:

- La banda pasante es máximamente plana con  $A_p \leq 2\text{dB}$  en  $0 \leq f \leq 6\text{kHz}$ .
- Tiene ceros de transmisión en  $f_1 = 12\text{kHz}$  y  $f_2 = 24\text{kHz}$ .
- Para altas frecuencias, la atenuación aumenta al menos  $40\text{dB/déc}$ .

**Solución:**

En primer lugar normalizamos respecto del borde de la banda pasante. De modo que como frecuencia de normalización tomamos  $\Omega_o = 2\pi \cdot 6\text{kHz}$  o sea  $\Omega_o = 12\pi \text{ rad/s}$ . De modo que:

$$\begin{aligned}\omega_p &= \frac{2\pi \cdot 6\text{kHz}}{2\pi \cdot 6\text{kHz}} = 1 \\ \omega_1 &= \frac{2\pi \cdot 12\text{kHz}}{2\pi \cdot 6\text{kHz}} = 2 \\ \omega_2 &= \frac{2\pi \cdot 24\text{kHz}}{2\pi \cdot 6\text{kHz}} = 4\end{aligned}\quad (3.138)$$

Como ya sabemos cual es la posición de los ceros de transmisión en la frecuencia normalizada, de esta función máximamente plana en al banda pasante, tenemos que:

$$N(s) = (s^2 + 4)(s^2 + 16) \quad (3.139)$$

$$\text{o sea } N(j\omega) = (4 - \omega^2)(16 - \omega^2) \quad (3.140)$$

Por otro lado, de la atenuación en la banda pasante extraemos el rizado:

$$\varepsilon^2 = 10^{0.14p} - 1 = 0.5849 \quad (3.141)$$

y puesto que  $|K(j\omega)|^2 = a_n \omega^{2n} / |N(j\omega)|^2$ , en el borde de la banda pasante,

$$|K(j1)|^2 = \frac{a_n}{|(4-1)^2(16-1)^2|} = \varepsilon^2 \quad (3.142)$$

de donde sale que  $a_n = 1184.42$ .

Para completar la función característica, nos dicen que a altas frecuencias la atenuación crece con al menos 40dB/déc de pendiente, o sea, el numerador de  $K(s)$  debe tener un orden superior en al menos 2 al orden de  $N(s)$ , esto es,  $n = 6$ , ya que  $\text{orden}[N(s)] = 4$ . Así que ya tenemos completada  $|K(j\omega)|^2$ :

$$|K(j\omega)|^2 = \frac{1184.42\omega^{12}}{(4-\omega^2)^2(16-\omega^2)^2} \quad (3.143)$$

Ahora vamos a obtener  $H(s)$ . En primer lugar tenemos

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{(4-\omega^2)^2(16-\omega^2)^2}{(4-\omega^2)^2(16-\omega^2)^2 + 1184.42\omega^{12}} \quad (3.144)$$

$$\text{así que: } H(s)H(-s) = \frac{(s^2+4)^2(s^2+16)^2}{1184.42s^{12} + (s^2+4)^2(s^2+16)^2} \quad (3.145)$$

o sea:

$$H(s)H(-s) = \frac{(s^2+4)^2(s^2+16)^2}{1184.42s^{12} + s^8 + 40s^6 + 528s^4 + 2560s^2 + 4096} \quad (3.146)$$

Para encontrar los modos naturales de  $H(s)$  hace falta resolver la ecuación  $1184.42s^{12} + s^8 + 40s^6 + 528s^4 + 2560s^2 + 4096 = 0$ . Con ayuda de un programa de ordenador obtenemos:

$$\begin{aligned}s_{1,2} &= -1.1219 \pm j0.3393 & s_{3,4} &= 1.1219 \pm j0.3393 \\ s_{5,6} &= -0.7325 \pm j0.8329 & s_{7,8} &= 0.7325 \pm j0.8329 \\ s_{9,10} &= -0.2388 \pm j1.0215 & s_{11,12} &= 0.2388 \pm j1.0215\end{aligned}\quad (3.147)$$

y de estas sólo nos quedamos con las que están en el semiplano izquierdo del plano  $s$ , las que tienen parte real negativa, o sea  $s_{1,2}$ ,  $s_{5,6}$  y  $s_{9,10}$ .

Así:

$$H(s) = \frac{(s^2+4)(s^2+16)}{\sqrt{1184.42}[(s+1.1219)^2 + 0.3393^2]} \cdot \frac{1}{[(s+0.7325)^2 + 0.8329^2][(s+0.2388)^2 + 1.0215^2]} \quad (3.148)$$

o bien:

$$H(s) = \frac{s^4 + 20s^2 + 64}{\sqrt{1184.42(s^6 + 4.1864s^5 + 8.7631s^4 + 11.6683s^3 + \dots + 10.4531s^2 + 6.0600s + 1.8599)}} \quad (3.149)$$

Para terminar tendríamos que desnormalizar en frecuencia. Esta operación la indicamos. Así tendríamos una  $H(s')$ , donde  $s'$  es la frecuencia normalizada, que se obtiene de hacer:

$$H(s') = H(s) \Big|_{s = \frac{s'}{\Omega_o}} \quad (3.150)$$

con el  $\Omega_o$  calculado al principio.

- 3.11.- a)** Hallar la función característica, los modos naturales y la función de transferencia de un filtro Chebyshev que cumpla las siguientes especificaciones:  $f_p=10\text{KHz}$ ,  $f_s=15\text{KHz}$ ,  $A_p \leq 0.5\text{dB}$  y  $A_s \geq 50\text{dB}$ .
- b)** Hallar los mismos parámetros de un filtro Chebyshev inverso que satisfaga las mismas especificaciones.

**Solución:**

Parte (a)

En primer lugar obtenemos el rizado

$$\varepsilon = \sqrt{10^{0.1A_p} - 1} = 0.3493 \quad (3.151)$$

y también  $\delta$ :

$$\delta = \sqrt{10^{0.1A_s} - 1} = 316.23 \quad (3.152)$$

y normalizamos la frecuencia con respecto al borde de la banda pasante:

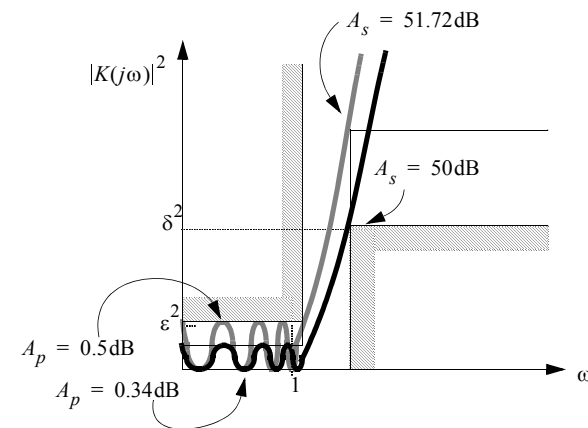
$$\begin{aligned} \Omega_o &= 2\pi \cdot 10^4 \text{ rad/s} & \omega_p &= \frac{10\text{kHz}}{10\text{kHz}} = 1 \\ & & \omega_s &= \frac{15\text{kHz}}{10\text{kHz}} = 1.5 \end{aligned} \quad (3.153)$$

A continuación evaluamos el orden del filtro Chebyshev que cumple estas especificaciones:

$$n \geq \frac{\text{acosh}(\delta/\varepsilon)}{\text{acosh}\omega_s} = 7.7943 \Rightarrow n = 8 \quad (3.154)$$

de modo que es  $n = 8$  el orden necesario para cumplir las especificaciones que se cumplen, eso sí, en exceso. Usualmente se prefiere ajustar la aproximación a las especificaciones en la banda de paso e invertir el exceso en la atenuación en la banda de rechazo. Esto significaría que  $A_p = 0.5\text{dB}$ , por tanto  $\varepsilon = 0.3493$  y nos queda  $A_s = 51.72\text{dB}$ , que es más de lo que nos piden.

Sin embargo, podríamos haber disminuido la atenuación máxima en la banda pasante ajustando la aproximación a las especificaciones en la banda de rechazo. O sea, mantenemos  $A_s = 50\text{dB}$ , lo que nos lleva a  $\varepsilon = 0.2864$  y por lo tanto  $A_p = 0.34\text{dB}$ . La siguiente figura ilustra este punto:



De todos modos, nos vamos a quedar con la solución más habitual, mantenemos  $A_p = 0.5\text{dB}$ , lo que resulta en  $A_s = 51.72\text{dB}$ .

Independientemente del valor que asignemos al rizado,  $\varepsilon$ , las posiciones de los ceros de reflexión son las mismas en un filtro de Chebyshev, y vienen indicadas por, en un filtro de orden par:

$$\omega_{r_k} = \pm \cos\left(\frac{2k+1}{n}\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{con } k = 0, 1, 2, \dots, \frac{n}{2} - 1 \quad (3.155)$$

o sea:

$$\begin{aligned} \omega_{r_{0,7}} &= \pm 0.9808 & \omega_{r_{2,5}} &= \pm 0.5556 \\ \omega_{r_{1,6}} &= \pm 0.8315 & \omega_{r_{3,4}} &= \pm 0.1950 \end{aligned} \quad (3.156)$$

de modo que  $K(j\omega)$  queda:

$$K(j\omega) = \varepsilon 2^{n-1} \prod_{k=0}^3 (\omega^2 - \omega_{r_k}^2) \quad (3.157)$$

$$\begin{aligned} K(j\omega) &= 44.7104(\omega^2 - 0.9620)(\omega^2 - 0.6194)\dots \\ &\dots(\omega^2 - 0.3087)(\omega^2 - 0.0380) \end{aligned} \quad (3.158)$$

y si hacemos  $\omega^2 = -s^2$ :

$$\begin{aligned} K(s) &= 44.7104(s^2 + 0.9620)(s^2 + 0.6194)\dots \\ &\dots(s^2 + 0.3087)(s^2 + 0.0380) \end{aligned} \quad (3.159)$$

Por otro lado, los modos naturales salen de:

$$\begin{aligned} s_k &= -\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{1}{\varepsilon} + \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + 1} \right)^{1/n} - \left( \frac{1}{\varepsilon} + \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + 1} \right)^{-1/n} \right] \text{sen}\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right) + \\ &+ j \left[ \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{1}{\varepsilon} + \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + 1} \right)^{1/n} + \left( \frac{1}{\varepsilon} + \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + 1} \right)^{-1/n} \right] \cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right) \right] \end{aligned} \quad (3.160)$$

$$\begin{aligned} s_{0,7} &= -0.0436 \pm j1.0050 \\ \text{o sea } s_{1,6} &= -0.1242 \pm j0.8520 \\ s_{2,5} &= -0.1859 \pm j0.5693 \\ s_{3,4} &= -0.2193 \pm j0.1999 \end{aligned} \quad (3.161)$$

Podemos calcular la frecuencia de polo y el factor de calidad para cada una de estas parejas de polos:

$$\begin{aligned} \omega_{o_{0,7}} &= 1.0059 & Q_{0,7} &= 11.54 \\ \omega_{o_{1,6}} &= 0.8610 & Q_{1,6} &= 3.466 \\ \omega_{o_{2,5}} &= 0.5989 & Q_{2,5} &= 1.611 \\ \omega_{o_{3,4}} &= 0.2967 & Q_{3,4} &= 0.6766 \end{aligned} \quad (3.162)$$

La función de transferencia vendrá dada por:

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{1/44.7104}{[(s + 0.0436)^2 + 1.0050^2][(s + 0.1242)^2 + 0.8520^2]\dots} \\ &\dots[(s + 0.1859)^2 + 0.5693^2][(s + 0.2193)^2 + 0.1999^2]} \end{aligned} \quad (3.163)$$

También podríamos haberla buscado en la tabla de filtros Chebyshev para  $\varepsilon = 0.3493$  y  $n = 8$ :

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{0.0224}{s^8 + 1.1461s^7 + 2.6567s^6 + 2.1492s^5 + 2.1840s^4 + \dots} \\ &\dots + 1.1486s^3 + 0.5736s^2 + 0.1525s + 0.0237 \end{aligned} \quad (3.164)$$

Finalmente tendríamos que desnormalizar:

$$H(s') = H(s) \Big|_{s = \frac{s'}{\Omega_o}} \quad (3.165)$$

### Parte (b)

Para calcular un filtro Chebyshev inverso, partimos de un filtro Chebyshev convencional, el cual estará calculado para un  $\varepsilon$  diferente del que nos

marcan las especificaciones. Veamos, en nuestro caso necesitamos un filtro Chebyshev inverso que cumpla  $\bar{\varepsilon} = 0.3493$  y  $\bar{A}_s \geq 50\text{dB}$ .

Puesto que la transformación nos lleva a:

$$|K(j\omega)|^2 = 1/\varepsilon^2 C_n^2(1/\omega) \quad (3.166)$$

con el  $\varepsilon$  del Chebyshev convencional auxiliar que utilizaremos para calcular el filtro Chebyshev inverso, tendremos que en el borde de la banda de paso del Chebyshev inverso, o sea en  $\bar{\omega}_p = 1/\omega_s$  debe cumplirse que:

$$\bar{\varepsilon}^{-2} = 1/\varepsilon^2 C_n^2(\omega_s) \quad (3.167)$$

$$\text{por tanto } 20\log_{10}\frac{1}{\bar{\varepsilon}} - 20\log_{10}\varepsilon = 20\log_{10}C_n(\omega_s) \quad (3.168)$$

y como  $\bar{A}_s = 10\log_{10}\left(1 + \frac{1}{\bar{\varepsilon}^2}\right) \approx -20\log_{10}\bar{\varepsilon}$  se cumple debido a cómo hemos hecho la transformación de Chebyshev convencional a Chebyshev inverso, llegamos a la misma ecuación que teníamos antes para calcular el orden del filtro Chebyshev, para las mismas especificaciones, de modo que el orden del Chebyshev inverso que necesitamos es también  $n = 8$ .

Para calcularlo vamos a hallar los ceros de reflexión y los modos naturales de un filtro Chebyshev convencional con un rizado

$$\varepsilon = \sqrt{1/\bar{\varepsilon}^2 C_8^2(\omega_s)} = 1/\bar{\varepsilon} C_8(1.5) = 0.002594 \quad (3.169)$$

Para este filtro los ceros de reflexión están en el mismo sitio que para el anterior, de modo que los ceros de transmisión del filtro Chebyshev inverso estarán en los inversos de dichos ceros de reflexión, o sea:

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_{z_{0,7}} &= \pm 1.0196 & \bar{\omega}_{z_{2,5}} &= \pm 1.7999 \\ \bar{\omega}_{z_{1,6}} &= \pm 1.2026 & \bar{\omega}_{z_{3,4}} &= \pm 5.1282 \end{aligned} \quad (3.170)$$

que estarán normalizados con respecto al borde de la banda de rechazo. Para desnormalizar tenemos que hacer, primero, una desnormalización respecto

del borde de la banda de rechazo, y luego, respecto de la frecuencia de normalización:

$$s = \frac{s'}{\omega_s} = \frac{1}{\omega_s} \left( \frac{s''}{\Omega_o} \right) \quad (3.171)$$

Por otro lado, si calculamos los modos naturales para un filtro Chebyshev directo (o convencional) que tenga orden 8 y un  $\varepsilon = 0.002594$ , obtenemos:

$$\begin{aligned} s_{0,7} &= -0.1814 \pm j1.3394 \\ s_{1,6} &= -0.5166 \pm j1.1355 \\ s_{2,5} &= -0.7732 \pm j0.7587 \\ s_{3,4} &= -0.9120 \pm j0.2664 \end{aligned} \quad (3.172)$$

y si calculamos los inversos de estos polos,

$$\begin{aligned} \bar{s}_{0,7} &= -0.0993 \pm j0.7332 \\ \bar{s}_{1,6} &= -0.3320 \pm j0.7296 \\ \bar{s}_{2,5} &= -0.6589 \pm j0.6465 \\ \bar{s}_{3,4} &= -1.0102 \pm j0.2951 \end{aligned} \quad (3.173)$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} &0.14477(s^2 + 1.0196^2)(s^2 + 1.2026^2) \dots \\ H(s) &= \frac{\dots(s^2 + 1.7999^2)(s^2 + 5.1282^2)}{[(s + 0.0993)^2 + 0.7332^2][(s + 0.3320)^2 + 0.7296^2] \dots} \quad (3.174) \\ &\dots[(s + 0.6589)^2 + 0.6465^2][(s + 1.0102)^2 + 0.2951^2] \end{aligned}$$

La constante  $k$  sale de hacer  $|H(j0)| = 1$ , y luego no olvidemos desnormalizar:

$$H(s'') = H(s') \Big|_{s' = \frac{s''}{\Omega_o}} = H(s) \Big|_{s = \frac{s''}{\omega_s \Omega_o}} \quad (3.175)$$

**3.12.-** Obtener una función de transferencia paso de baja tal que la atenuación no sea mayor de 3dB para  $\omega \leq 7000\text{rad/s}$  y el retraso sea máximamente plano siendo  $\tau = 0.25\text{ms}$  en dc con un error de retraso menor del 4% hasta  $\omega_1 = 6000\text{rad/s}$ .

**Solución:**

En primer lugar normalizamos respecto del retraso en dc:

$$\Omega_o = \frac{1}{\tau_o} = \frac{1}{0.25\text{ms}} = 4000\text{s}^{-1} \quad (3.176)$$

de modo que:

$$\omega_1 = \frac{7000\text{rad/s}}{4000\text{rad/s}} = 1.75 \quad (3.177)$$

$$\omega_2 = \frac{6000\text{rad/s}}{4000\text{rad/s}} = 1.5$$

Por otro lado tenemos que el filtro de Bessel, normalizado respecto de  $\Omega_o = 1/\tau_o$ , de orden 3 tiene la forma:

$$H_3(s) = \frac{15}{s^3 + 6s^2 + 15s + 15} \quad (3.178)$$

y el de orden 4:

$$H_4(s) = \frac{105}{s^4 + 10s^3 + 45s^2 + 105s + 105} \quad (3.179)$$

O sea que:

$$|H_3(j\omega)|^2 = \frac{15^2}{(15 - 6\omega^2)^2 + (15\omega - \omega^3)^2} \quad (3.180)$$

$$y \quad |H_4(j\omega)|^2 = \frac{105^2}{(105 - 45\omega^2 + \omega^4)^2 + (105\omega - 10\omega^3)^2} \quad (3.181)$$

por lo que:

$$\begin{aligned} |H_3(j\omega_2)|^2 &= 0.50244 & |H_3(j\omega_2)|_{\text{dB}} &= -2.9891\text{dB} \\ |H_4(j\omega_2)|^2 &= 0.63030 & |H_4(j\omega_2)|_{\text{dB}} &= -2.0041\text{dB} \end{aligned} \quad (3.182)$$

ambos filtros cumplen las especificaciones de magnitud.

Veamos que pasa con el retraso, de momento la fase para cada uno es:

$$\phi_3(\omega) = -\arctg \frac{15\omega - \omega^3}{15 - 6\omega^2} \quad (3.183)$$

$$\phi_4(\omega) = -\arctg \frac{105\omega - 10\omega^3}{105 - 45\omega^2 + \omega^4}$$

por tanto

$$\begin{aligned} \tau_3(\omega) &= -\frac{d\phi_3}{d\omega}(\omega) = \frac{(15 - 3\omega^2)(15 - 6\omega^2) + 12\omega(15 - 3\omega^2)}{(15 - 6\omega^2)^2 + (15\omega - \omega^3)^2} \\ &\quad - \frac{(105 - 30\omega^2)(105 - 45\omega^2 + \omega^4) - (4\omega^3 - 90\omega)}{(105\omega - 10\omega^3)^2} \\ \tau_4(\omega) &= \frac{(105 - 30\omega^2)(105 - 45\omega^2 + \omega^4) - (4\omega^3 - 90\omega)}{(105\omega - 10\omega^3)^2} \\ &\quad - \frac{1 + (105 - 45\omega^2 + \omega^4)^2}{(105\omega - 10\omega^3)^2} \end{aligned} \quad (3.184)$$

de donde tenemos que

$$\begin{aligned} \tau_3(\omega_1) &= 0.9690 \\ \tau_4(\omega_1) &= 0.9983 \end{aligned} \quad (3.185)$$

Según los resultados obtenidos, bastaría usar un filtro de Bessel de orden 3 para cumplir las especificaciones del enunciado, por lo tanto

$$H(s) = \frac{15}{s^3 + 6s^2 + 15s + 15} \quad (3.186)$$

y si desnormalizamos  $s = s'/\Omega_o = s'\tau_o$ :



$$H(s') = \frac{15}{1.56 \cdot 10^{-11} \cdot s'^3 + 3.75 \cdot 10^{-7} \cdot s'^2 + 3.75 \cdot 10^{-3} \cdot s' + 15} \quad (3.187)$$

**3.13.-** Obtener una función de transferencia pasa todo con un retraso constante de  $400\mu\text{s}$ . El error de retraso no debe ser mayor del 1.2% para  $\omega \leq 4.5\text{Krad/s}$ .

**Solución:**

Partimos de que la forma general para un filtro pasa-todo es

$$H_{\text{AP}}(s) = \pm \frac{D_{\text{AP}}(-s)}{D_{\text{AP}}(s)} \quad (3.188)$$

de modo que la fase para el filtro pasa-todo vendrá dada por

$$\phi_{\text{AP}}(\omega) = -2\text{arctg}\left(\frac{\text{Im}[D_{\text{AP}}(\omega)]}{\text{Re}[D_{\text{AP}}(\omega)]}\right) \quad (3.189)$$

y el retraso, por definición es

$$\tau_{\text{AP}}(\omega) = -\frac{d\phi_{\text{AP}}(\omega)}{d\omega} \quad (3.190)$$

Según esto, el retraso del filtro pasa-todo es el doble que el de un filtro paso de baja todo-polo con el mismo denominador. Podemos obtener el filtro que buscamos mediante la aproximación de Bessel, sólo que calcularemos el filtro de Bessel para un retraso nominal que sea la mitad del retraso que queremos para el filtro pasa-todo.

$$\text{O sea} \quad \Omega_o = \frac{1}{\tau_o/2} = \frac{1}{200\mu\text{s}} = 5000\text{rad/s} \quad (3.191)$$

De modo que

$$\omega_1 = \frac{4.5\text{Krad/s}}{\Omega_o} = 0.9 \quad (3.192)$$

Si consultamos la carta de diseño para los filtros de Bessel, comprobamos que nos es suficiente un filtro de orden 3 para cumplir las especificaciones en magnitud y retraso. Así:

$$H_3(s) = \frac{15}{s^3 + 6s^2 + 15s + 15} \quad (3.193)$$

es la función de transferencia del filtro Bessel, mientras que para el “all-pass”:

$$H_{\text{AP}}(s) = \frac{-s^3 + 6s^2 + -15s + 15}{s^3 + 6s^2 + 15s + 15} \quad (3.194)$$

Finalmente sólo nos queda desnormalizar:

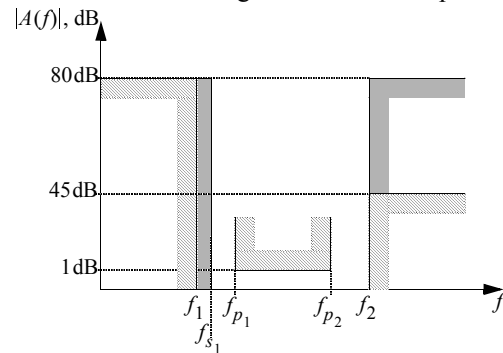
$$H_{\text{AP}}(s') = H_{\text{AP}}(s) \Big|_{s = \frac{s'}{\Omega_o} = \frac{s'\tau_o}{2}} \quad (3.195)$$

**3.14.-** Obtener la función de transferencia  $H(s)$  de un filtro paso de banda todo polo con banda pasante máximamente plana que cumpla las siguientes especificaciones:

- a)  $A_p \leq 1\text{dB}$  para  $18\text{kHz} \leq f \leq 23\text{kHz}$
- b)  $A_s \geq 45\text{dB}$  para  $f \geq 35\text{kHz}$  y  $A_s > 80\text{dB}$  para  $f \leq 9\text{kHz}$

**Solución:**

Primero vamos a hacer un diagrama con estas especificaciones:



Para la frecuencia central de la banda de paso y para el ancho de banda del filtro tenemos:

$$\omega_o = 2\pi \sqrt{f_{p1} f_{p2}} = 2\pi \cdot 20.35 \text{Krad/s}$$

$$B = \omega_{p2} - \omega_{p1} = 2\pi \cdot 5 \text{Krad/s}$$

(3.196)

Veamos si es necesario redefinir los bordes de la banda de rechazo, con el fin de que el filtro BP resultante sea simétrico geoméricamente. Así;

$$\omega_{s1} = \frac{\omega_o^2}{2\pi f_2} = 2\pi \frac{f_{p1} f_{p2}}{f_2} = 2\pi \cdot 11.83 \text{Krad/s} > 2\pi f_1$$

(3.197)

y tendremos como nuevos bordes de las bandas de rechazo  $\omega_{s1} = 2\pi \cdot 11.83 \text{Krad/s}$  y  $\omega_{s2} = 2\pi \cdot 35 \text{Krad/s}$ .

Asimismo, las especificaciones de atenuación en las bandas de rechazo no son homogéneas, por lo que tomaremos  $A_s = 80 \text{dB}$  para ambas bandas de rechazo. Por tanto, como se indica la figura, las especificaciones del filtro paso de banda son ahora

- a)  $A_p \leq 1 \text{dB}$  para  $18 \text{kHz} \leq f \leq 23 \text{kHz}$
- b)  $A_s > 80 \text{dB}$  para  $f \leq 11.83 \text{kHz}$  y  $f \geq 35 \text{kHz}$

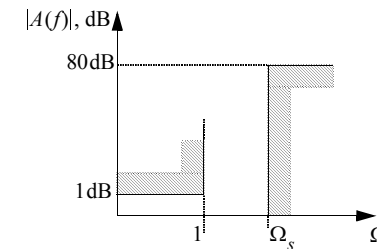
A continuación calculamos el factor de selectividad para el prototipo

paso de baja:

$$\Omega_s = \frac{\omega_{s2} - \omega_{s1}}{B} = \frac{\omega_{s2} - \omega_{s1}}{\omega_{p2} - \omega_{p1}} = 4.63$$

(3.198)

de modo que las especificaciones del filtro prototipo paso de baja son:



Primero vamos a obtener el valor del rizado en la banda pasante:

$$\epsilon = \sqrt{10^{0.1A_p} - 1} = 0.5088$$

(3.199)

y para la banda de rechazo:

$$\delta = \sqrt{10^{0.1A_s} - 1} \cong 10^4$$

(3.200)

A continuación, obtenemos el orden de la aproximación máximamente plana (Butterworth, ya que es todopolo):

$$n \geq \frac{\ln(\delta/\epsilon)}{\ln \Omega_s} = 6.45 \text{ o sea } n = 7$$

(3.201)

de modo que la función de transferencia sería, para  $\epsilon = 1$ :

$$H_{LP}(s) = \frac{1}{s^7 + 4.4940s^6 + 10.0978s^5 + 14.5918s^4 + \dots + 14.5918s^3 + 10.0978s^2 + 4.4940s + 1}$$

(3.202)

sin embargo, puesto que  $\epsilon = 0.5088$ , tendremos que hacer la siguiente transformación:

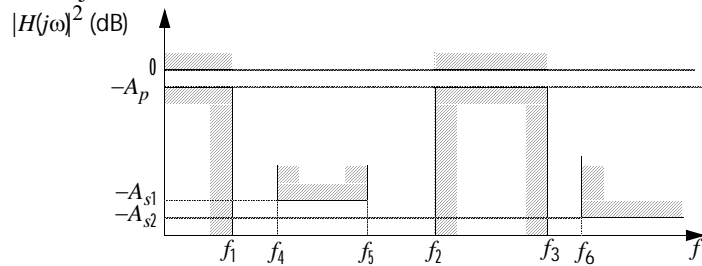
$$H_{LP}(s') = H_{LP}(s) \Big|_{s = \epsilon^{1/7} s'}$$

(3.203)

Y, finalmente, realizamos la transformación LP → BP :

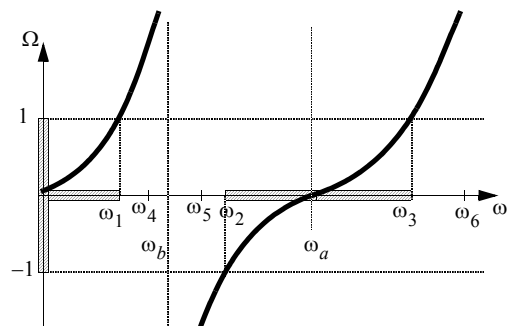
$$H_{BP}(p) = H_{LP}(s') \Big|_{s' = \frac{p^2 + \omega_o^2}{pB}} \quad \text{con} \quad \begin{aligned} \omega_o &= 2\pi 20.35 \text{Krad/s} \\ B &= 2\pi 5 \text{Krad/s} \end{aligned} \quad (3.204)$$

**3.15.-** Obtener una transformación en frecuencia adecuada para transformar las especificaciones de la figura en las de una función prototipo paso de baja.



**Solución:**

Vamos a hacer primero una representación gráfica de la transformación que queremos realizar:



Esta transformación, en la que las dos bandas de paso se transforman en la banda de -1 a 1 en el prototipo paso de baja, tendrá:

- un cero en 0
- 1 cero en  $\pm\omega_a$
- 1 polo en  $\pm\omega_b$
- 1 polo en  $\infty$

así que tenemos la siguiente transformación:

$$\Omega = f(\omega) = \frac{k\omega(\omega^2 - \omega_a^2)}{\omega^2 - \omega_b^2} \quad (3.205)$$

Para determinar cuanto valen  $k$ ,  $\omega_a$  y  $\omega_b$  tendremos que imponer que los bordes de las bandas de paso se transformen en 1 y -1, o sea:

$$\begin{aligned} f(\omega_1) = 1 &\Rightarrow \frac{k\omega_1(\omega_1^2 - \omega_a^2)}{\omega_1^2 - \omega_b^2} = 1 \\ f(\omega_2) = -1 &\Rightarrow \frac{k\omega_2(\omega_2^2 - \omega_a^2)}{\omega_2^2 - \omega_b^2} = -1 \\ f(\omega_3) = 1 &\Rightarrow \frac{k\omega_3(\omega_3^2 - \omega_a^2)}{\omega_3^2 - \omega_b^2} = 1 \end{aligned} \quad (3.206)$$

por tanto tenemos estas tres ecuaciones:

$$\begin{aligned} k\omega_1^3 - k\omega_1\omega_a^2 - \omega_1^2 + \omega_b^2 &= 0 \\ k\omega_2^3 - k\omega_2\omega_a^2 + \omega_2^2 - \omega_b^2 &= 0 \\ k\omega_3^3 - k\omega_3\omega_a^2 - \omega_3^2 + \omega_b^2 &= 0 \end{aligned} \quad (3.207)$$

y operando llegamos a:

$$\omega_a = \sqrt{\frac{\omega_1^3(\omega_2^2 - \omega_3^2) + \omega_2^3(\omega_1^2 - \omega_3^2) + \omega_3^3(\omega_1^2 - \omega_2^2)}{\omega_1(\omega_2^2 - \omega_3^2) + \omega_2(\omega_1^2 - \omega_3^2) + \omega_3(\omega_1^2 - \omega_2^2)}} \quad (3.208)$$

$$k = \frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{\omega_1^3 + \omega_2^3 - \omega_a^2(\omega_1 + \omega_2)}$$

$$\omega_b = \sqrt{k\omega_2^3 - k\omega_2\omega_a + \omega_2^2}$$

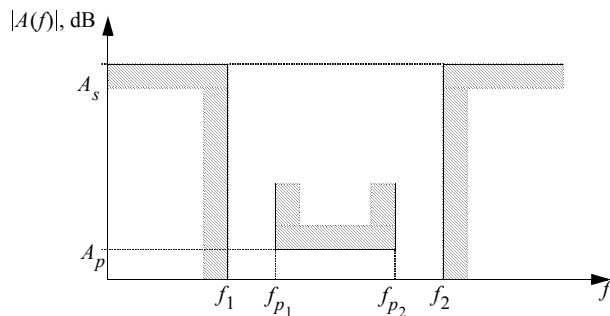
**3.16.-** Hallar una función de transferencia paso de banda que cumpla las siguientes especificaciones:

a) Banda pasante de igual rizado con una atenuación  $A_p = 0.9\text{dB}$  en la banda  $35\text{kHz} \leq f \leq 60\text{kHz}$ .

b) Bandas de rechazo máximamente plana con una atenuación  $A_s \geq 19\text{dB}$  para  $f \leq 28\text{kHz}$  y  $f \geq 75\text{kHz}$ .

**Solución:**

Tenemos



así que lo primero que vamos a hacer es comprobar si es necesario redefinir las bandas de rechazo o no para que el filtro resultante tenga simetría geométrica. Por un lado:

$$f_o = \sqrt{f_{p_1} f_{p_2}} = \sqrt{35 \cdot 60} \text{ kHz} = 45.83\text{kHz} \quad (3.209)$$

y si calculamos  $f_{s_1}$ :

$$f_{s_1} = \frac{f_o^2}{f_2} = 28\text{kHz} \equiv f_1 \quad (3.210)$$

de modo que  $f_1$  y  $f_2$  serán los bordes de las bandas de rechazo inferior y superior respectivamente. Nos queda calcular el ancho de banda:

$$B = 2\pi(f_{p_2} - f_{p_1}) = 2\pi \cdot 25\text{krad/s} \quad (3.211)$$

y el factor de selectividad del prototipo paso de baja:

$$\Omega_s = \frac{f_{s_2} - f_{s_1}}{f_{p_2} - f_{p_1}} = 1.88 \quad (3.212)$$

de modo que las especificaciones para el prototipo paso de baja son:

$$\begin{aligned} A_p &= 0.9\text{dB} \\ A_s &= 19\text{dB} \end{aligned} \quad \Omega_s = 1.88 \quad (3.213)$$

El rizado de la banda pasante sale de:

$$\varepsilon = \sqrt{10^{0.1A_p} - 1} = 0.4799 \quad (3.214)$$

y el de la banda de rechazo:

$$\delta = \sqrt{10^{0.1A_s} - 1} = 8.856 \quad (3.215)$$

Puesto que se trata de una aproximación Chebyshev, igual rizado en la banda pasante, el orden viene dado por

$$n \geq \frac{\text{acosh}(\delta/\varepsilon)}{\text{acosh}\omega_s} = 2.8986 \Rightarrow n = 3 \quad (3.216)$$

Si empleamos la fórmula:

$$s_k = -\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{1}{\epsilon} + \sqrt{\frac{1}{\epsilon^2} + 1} \right)^{1/3} - \left( \frac{1}{\epsilon} + \sqrt{\frac{1}{\epsilon^2} + 1} \right)^{-1/3} \right] \operatorname{sen} \left( \frac{2k+1}{6} \pi \right) + j \left( \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{1}{\epsilon} + \sqrt{\frac{1}{\epsilon^2} + 1} \right)^{1/3} + \left( \frac{1}{\epsilon} + \sqrt{\frac{1}{\epsilon^2} + 1} \right)^{-1/3} \right] \cos \left( \frac{2k+1}{6} \pi \right) \right) \quad (3.217)$$

por tanto tendremos que:

$$\begin{aligned} s_{1,2} &= -0.2570 \pm j0.9738 \\ s_3 &= -0.5141 \end{aligned} \quad (3.218)$$

y así:

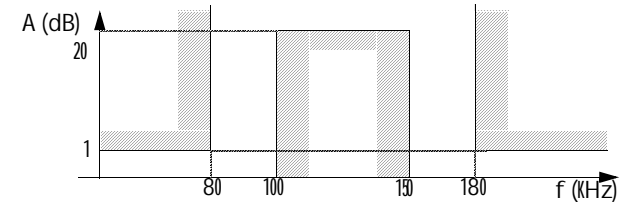
$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{1/4\epsilon}{(s-s_1)(s-s_2)(s-s_3)} = \\ &= \frac{0.5208}{s^3 + 1.0282s^2 + 1.2783s + 0.5208} \end{aligned} \quad (3.219)$$

Finalmente sólo queda hacer la transformación en frecuencia:

$$\begin{aligned} H_{\text{LPP}}(s) &= \frac{0.5208}{s^3 + 1.0282s^2 + 1.2783s + 0.5208} \\ H_{\text{BP}}(p) &= H_{\text{LPP}}(s) \Big|_{s = \frac{p^2 + \omega_o^2}{pB}} \end{aligned} \quad (3.220)$$

$$\text{con } \begin{cases} \omega_o = 2\pi f_o = 2.88 \cdot 10^5 \text{ rad/s} \\ B = 2\pi(f_{p_2} - f_{p_1}) = 1.57 \cdot 10^5 \text{ rad/s} \end{cases}$$

**3.17.-** Obtener la función de transferencia de un filtro que cumpla las especificaciones de atenuación de la figura. La banda pasante ha de ser máximamente plana, y el orden del filtro paso de baja prototipo no puede ser superior a 4.



**Solución:**

Tenemos las siguientes especificaciones para el BR:

$$\begin{aligned} A_p &= 1 \text{ dB} & A_s &= 20 \text{ dB} \\ f_{p_1} &= 80 \text{ kHz} & f_{p_2} &= 180 \text{ kHz} \\ f_{s_1} &= 100 \text{ kHz} & f_{s_2} &= 150 \text{ kHz} \end{aligned} \quad (3.221)$$

Calculamos primero la frecuencia central,  $f_o$ , que en este caso es:

$$f_o = \sqrt{f_{s_1} f_{s_2}} = 122.47 \text{ kHz} \quad (3.222)$$

ahora vemos si los bordes de las bandas de paso guardan simetría geométrica con respecto a dicha frecuencia central:

$$\begin{aligned} f_{p_1}^* &= f_o^2 / f_{p_2} = 83.33 \text{ kHz} > f_{p_1} \\ f_{p_2}^* &= f_o^2 / f_{p_1} = 187.5 \text{ kHz} > f_{p_2} \end{aligned} \quad (3.223)$$

de forma que para no violar las especificaciones, seleccionaremos  $f_{p_1}^*$  y  $f_{p_2}^*$  como los bordes de las bandas de paso, de modo que el ancho de banda vendrá dado por:

$$B = 2\pi(f_{p_2}^* - f_{p_1}^*) = 2\pi \cdot 96.67 \text{ krad/s} \quad (3.224)$$

De modo que el factor de selectividad (frecuencia del borde de la banda de rechazo normalizada) del prototipo paso de baja será:

$$\Omega_s = \frac{f_{p_2}^* - f_{p_1}^*}{f_{s_2} - f_{s_1}} = 1.9334 \quad (3.225)$$

Así que las especificaciones del prototipo paso de baja son:

$$\begin{aligned} A_p &= 1 \text{ dB} & A_s &= 20 \text{ dB} \\ \Omega_p &= 1 & \Omega_s &= 1.9334 \end{aligned} \quad (3.226)$$

por tanto el rizado en la banda pasante será:

$$\varepsilon = \sqrt{10^{0.1A_p} - 1} = 0.5089 \quad (3.227)$$

y en la banda de rechazo:

$$\delta = \sqrt{10^{0.1A_s} - 1} = 9.9499 \quad (3.228)$$

Calculamos el orden para una aproximación Butterworth:

$$n \geq \frac{\ln(\delta/\varepsilon)}{\ln\Omega_s} = 4.51 \quad (3.229)$$

y vemos que necesitaríamos un filtro de orden mayor que 4, lo cual no nos está permitido. Veamos cual sería el orden para un filtro Chebyshev inverso:

$$n \geq \frac{\text{acosh}(\delta/\varepsilon)}{\text{acosh}\Omega_s} = 2.87 \quad (3.230)$$

o sea, un filtro Chebyshev inverso de orden 3 cumple las especificaciones del prototipo paso de baja.

De modo que empezamos por calcular los ceros de reflexión de un filtro Chebyshev convencional de orden 3:

$$\Omega_{r_{0,2}} = \pm \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \pm 0.8660 \quad \Omega_{r_1} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad (3.231)$$

por tanto los ceros de transmisión del Chebyshev inverso de orden 3 serán los inversos de estos ceros de reflexión:

$$\bar{\Omega}_{z_{0,2}} = \pm 1.1547 \quad \bar{\Omega}_{z_1} = \infty \quad (3.232)$$

que están normalizados respecto del borde de la banda de rechazo (para el Chebyshev inverso  $\bar{\Omega}_s = 1$ ).

A continuación vamos a obtener los modos naturales del filtro Chebyshev inverso. Para ello necesitamos calcular primero los modos naturales de un filtro Chebyshev convencional cuyo rizado sea:

$$\varepsilon' = \frac{1}{\varepsilon \cdot C_3(\Omega_s)} = 0.0850 \quad (3.233)$$

por lo que sus polos, usando (3.39), estarán en:

$$\begin{aligned} s_{1,3} &= -0.6296 \pm j1.3925 \\ s_2 &= -1.2591 \end{aligned} \quad (3.234)$$

de modo que para el Chebyshev inverso, los modos naturales estarán en los inversos de estos polos:

$$\begin{aligned} \bar{s}_{1,3} &= -0.2696 \pm j0.5962 \\ \bar{s}_2 &= -0.7943 \end{aligned} \quad (3.235)$$

todos normalizados respecto del borde de la banda de rechazo.

Así que, teniendo localizados los polos y los ceros:

$$H_{LPP}(\bar{s}) = \frac{k(\bar{s}^{-2} + 1.333)}{(\bar{s} + 0.7943)[(\bar{s} + 0.2696)^2 + 0.5962^2]} \quad (3.236)$$

es la función de transferencia del prototipo paso de baja normalizado respecto del borde de la banda de rechazo ( $\bar{\Omega}_s = 1$ ). Para determinar  $k$  obligamos a que  $|H_{LPP}(\bar{s} = j0)| = 1$ , por lo que  $k = 3.9208^{-1}$ , y así:

$$H_{LPP}(\bar{s}) = \frac{\bar{s}^{-2} + 1.333}{3.9208(\bar{s} + 0.7943)[(\bar{s} + 0.2696)^2 + 0.5962^2]} \quad (3.237)$$

Antes de hacer la transformación LP  $\rightarrow$  BR tendremos que tener una función de transferencia normalizada con respecto del borde de la banda pasante. Esto significa desnormalizar  $H_{LPP}(\bar{s})$ , teniendo en cuenta que la frecuencia de normalización es  $\Omega_s = 1.9334$ , o sea que tendremos:

$$H_{LP}(s) = H_{LPP}(\bar{s}) \Big|_{\bar{s} = \frac{s}{1.9334}} \quad (3.238)$$

que resulta en una  $H_{LP}(s)$  normalizada respecto del borde de la banda pasante, a la cual podemos aplicar la transformación en frecuencia:

$$H_{BR}(p) = H_{LP}(s) \Big|_{s = \frac{pB}{p^2 + \omega_o^2}} = H_{LPP}(\bar{s}) \Big|_{\bar{s} = \frac{pB}{\Omega_s(p^2 + \omega_o^2)}} \quad (3.239)$$

$$B = 2\pi \cdot 96.67 \text{krad/s}$$

donde  $\omega_o = 2\pi \cdot 122.47 \text{krad/s}$  (3.240)

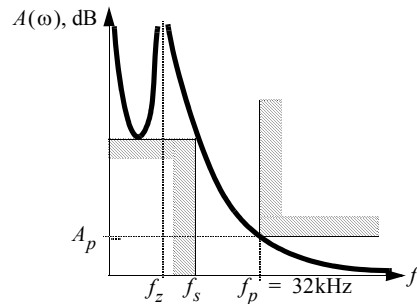
$$\Omega_s = 1.9334$$

**3.18.-** Obtener una función de transferencia de tercer orden paso de alta que cumpla las siguientes especificaciones:

- a) Banda pasante máximamente plana en  $f \geq 32\text{kHz}$  con atenuación  $A_p \leq 2\text{dB}$ .
- b) Cero de transmisión en  $f_z = 10\text{kHz}$ .

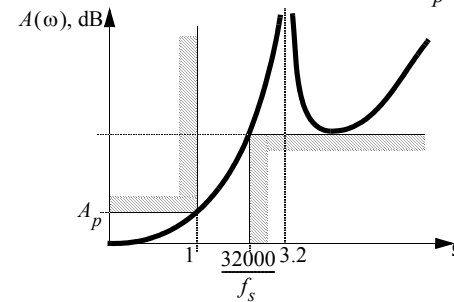
**Solución:**

El diagrama de la atenuación para estas especificaciones es



y la transformación que vamos a realizar es  $s = \omega_p/p$ , donde  $\omega_p = 2\pi f_p$

y donde  $s$  es la variable para el prototipo paso de baja. O sea, si  $s = j\Omega$ , la transformación LP  $\rightarrow$  HP será:  $\Omega = \omega_p/\omega$ :



$$\Omega_p = 1$$

$$\Omega_s = \frac{2\pi \cdot 32000}{2\pi \cdot f_s} = \frac{32000}{f_s}$$

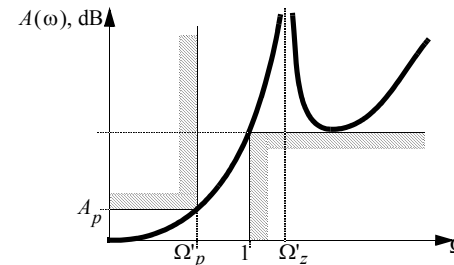
$$\Omega_z = \frac{2\pi \cdot 32000}{2\pi \cdot f_z} = 3.2$$

Como tenemos un cero de transmisión no podemos utilizar una aproximación de Butterworth. Por otro lado, si usáramos una aproximación máximamente plana genérica:

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{|N(j\omega)|^2}{|N(j\omega)|^2 + a_n^2 \omega^{2n}} \quad (3.241)$$

tendríamos que resolver una ecuación de 6º grado, ya que  $N(s)$  es de orden 2 y  $D(s)$  tiene que ser de orden 3 para tener cero de transmisión en infinito. De modo que vamos a utilizar una aproximación Chebyshev inversa.

Antes de continuar estamos interesados en conocer  $\Omega_s$ , puesto que la aproximación Chebyshev inversa estará normalizada respecto del borde de la banda de rechazo. Así, si hiciéramos esta normalización  $s' = s/\Omega_s$ , el borde de la banda de rechazo sería  $\Omega'_s = 1$ . En concreto tendríamos



$$\Omega'_p = \Omega_p/\Omega_s = \frac{f_s}{32000}$$

$$\Omega_s = 1$$

$$\Omega'_z = \Omega_z/\Omega_s = \frac{f_s}{10000}$$

Y de aquí es fácil extraer el valor de  $f_s$  ya que los ceros de transmisión

del filtro Chebyshev inverso son los inversos de los ceros de reflexión del filtro Chebyshev convencional del mismo orden. Puesto que el orden es 3, hay 3 ceros de transmisión, dos en  $f_z$  y uno en infinito, los ceros de reflexión de un filtro Chebyshev de orden 3 son:

$$\bar{\Omega}_{r_{0,2}} = \pm \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \pm 0.8660 \quad (3.242)$$

$$\bar{\Omega}_{r_1} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

por tanto los ceros de transmisión del Chebyshev inverso de orden 3 serán los inversos de estos ceros de reflexión:

$$\Omega'_{z_{0,2}} = \pm 1.1547 \quad (3.243)$$

$$\Omega'_{z_1} = \infty$$

así que  $f_s/10000 = 1.1547$ , o sea

$$f_s = 11.547 \text{kHz} \quad (3.244)$$

y por tanto  $\Omega_s = 32000/f_s = 2.7713$ .

Así que tenemos que diseñar un filtro Chebyshev inverso paso de baja con las siguientes especificaciones:

$$\begin{aligned} A_p &= 2 \text{dB} & n &= 3 \\ \Omega_p &= 1 & \Omega_s &= 2.7713 & \Omega_z &= 3.2 \end{aligned} \quad (3.245)$$

Para los ceros de transmisión hemos visto que tenemos

$$\Omega'_{z_{0,2}} = \pm 1.1547 \quad \Omega'_{z_1} = \infty \quad (3.246)$$

que están normalizados respecto del borde de la banda de rechazo.

Para los modos naturales, primero calculamos el  $\bar{\varepsilon}$  que corresponde al Chebyshev convencional a través del cual vamos a obtener los polos del Chebyshev inverso. Tenemos, según las especificaciones, que para el Chebyshev inverso:

$$\varepsilon = \sqrt{10^{0.1A_p} - 1} = 0.7648 \quad (3.247)$$

de modo que para  $\bar{\varepsilon}$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon \cdot C_3(\Omega_s)} = 0.01702 \quad (3.248)$$

por lo que sus polos, usando (3.39), estarán en:

$$\begin{aligned} \bar{s}_{1,3} &= -1.1735 \pm j2.2097 \\ \bar{s}_2 &= -2.347 \end{aligned} \quad (3.249)$$

de modo que para el Chebyshev inverso, los modos naturales estarán en los inversos de estos polos:

$$\begin{aligned} s'_{1,3} &= -0.1875 \pm j0.3530 \\ s'_2 &= -0.4261 \end{aligned} \quad (3.250)$$

también normalizados respecto del borde de la banda de rechazo.

De momento tenemos:

$$H_{\text{LPP}}(s') = \frac{k(s'^2 + 1.333)}{(s' + 0.4261)[(s' + 0.1875)^2 + 0.1246]} \quad (3.251)$$

y si imponemos que  $|H_{\text{LPP}}(s' = j0)| = 1$ , obtenemos  $k = 0.05106$ .

Así sólo queda volver a la forma normalizada respecto de la banda de paso y realizar la transformación en frecuencia LP  $\rightarrow$  HP, de modo que el resultado es:

$$H_{\text{HP}}(p) = H_{\text{LPP}}(s) \Big|_{s = \frac{\omega_p}{p}} = H_{\text{LPP}}(s') \Big|_{s' = \frac{\omega_p}{\Omega_s p}} \quad (3.252)$$

$$\text{donde } H_{\text{LPP}}(s') = \frac{k(s'^2 + 1.333)}{(s' + 0.4261)[(s' + 0.1875)^2 + 0.1246]} \quad (3.253)$$

$$\Omega_s = 2.7713 \text{ y } \omega_p = 2\pi \cdot 32 \cdot 10^3 \text{ rad/s.}$$



## Problemas propuestos

**3.19.-** Un filtro paso de baja con las siguientes especificaciones de atenuación:

$$\begin{aligned} A &\leq 0.1 \text{ dB} & 0 \leq \omega \leq 2.5 \text{ rad/s} \\ A &\geq 80 \text{ dB} & \omega \geq 3 \text{ rad/s} \end{aligned} \quad (3.254)$$

se conecta en cascada con un filtro paso de alta cuyas especificaciones de atenuación son:

$$\begin{aligned} A &\leq 0.1 \text{ dB} & 1.5 \leq \omega \leq \infty \text{ rad/s} \\ A &\geq 50 \text{ dB} & \omega \leq 1 \text{ rad/s} \end{aligned} \quad (3.255)$$

Obtener las especificaciones de atenuación del filtro total y averiguar el tipo de filtro.

**3.20.-** Obtener la magnitud  $|H(j\omega)|^2$  de una función de transferencia paso de baja máximamente plana alrededor de  $\omega = 0$  y que tiene dos ceros arbitrarios en la banda de rechazo. El rizado de la banda pasante es 3dB y la frecuencia de corte  $\omega_p$  es 1 rad/s.

**3.21.-** Discutir las características de la siguiente aproximación:

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \frac{\omega^n}{2}[1 + C_n(\omega)]} \quad \text{con } n \text{ par} \quad (3.256)$$

**3.22.-** Determinar los valores de  $a_1$  y  $b_1$  de la función de transferencia

$$H(s) = \frac{s^2 + sa_1 + a_1b_1}{s^3 + s^2(1 + a_1) + sb_1 + a_1b_1} \quad (3.257)$$

para que su magnitud sea máximamente plana en  $\omega=0$ .

**3.23.-** Encontrar una función de transferencia paso de banda con una banda pasante de igual rizado en  $6.6\text{KHz} < f < 8.4\text{KHz}$  con atenuación máxima de 1dB y una atenuación de al menos 26dB en  $f_{s2} \geq 11.5\text{KHz}$  y  $f_{s1} \leq 5.2\text{KHz}$ .

**3.24.-** Obtener una función de transferencia paso de banda todo polo con las siguientes especificaciones:

- Banda pasante máximamente plana con  $A_p = 0.9\text{dB}$  para  $35\text{kHz} \leq f \leq 60\text{kHz}$
- Banda de rechazo con atenuación  $A_s \geq 19\text{dB}$  para  $f \leq 25\text{kHz}$  y  $A_s \geq 17\text{dB}$  para  $f \geq 75\text{kHz}$ .

**3.25.-** Aproximar un filtro paso de banda todo-polo con un rizado de 1.7dB en la banda pasante, que se extiende entre 10KHz y 18KHz. La atenuación en la banda de rechazo es  $A_s \geq 42\text{dB}$  para  $f \geq 26\text{KHz}$ .

**3.26.-** Obtener una función de transferencia que satisfaga las siguientes especificaciones:

- Banda pasante máximamente plana que se extiende en el rango de frecuencias:  $50\text{KHz} < f \leq 70\text{KHz}$  y con una atenuación mínima  $A_p \leq 1\text{dB}$ .
  - Banda de rechazo en  $f \geq 80\text{KHz}$  con atenuación  $A_s \geq 20\text{dB}$ .
  - Cero de transmisión en  $f_o$  en la banda de rechazo.
- Determinar  $f_o$  y la atenuación mínima en la banda de rechazo.

## Apéndice 3.1: Polinomios de Chebyshev

En primer lugar veamos que en efecto

$$\cos(n \arccos x) = \cosh(n \operatorname{acosh} x) \quad (3.258)$$

$$\text{Partimos de que } \cos jz = \frac{e^{j(jz)} + e^{-j(jz)}}{2} = \cosh z \equiv x \quad (3.259)$$

$$\text{por tanto: } jz = \operatorname{acos} x \quad z = \operatorname{acosh} x \quad (3.260)$$

de donde se deduce que:

$$\operatorname{acos} x = j \operatorname{acosh} x \quad (3.261)$$

Por tanto:

$$C_n(x) = \cos(n \operatorname{acos} x) = \cos(nj \operatorname{acosh} x) = \cosh(n \operatorname{acosh} x) \quad (3.262)$$

A continuación, supongamos que  $y = \operatorname{acosh} x$ , de modo que  $x = \cosh y$ . Así que tenemos que

$$x = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \quad (3.263)$$

o lo que es lo mismo:

$$e^{2y} - 2xe^y + 1 = 0 \quad (3.264)$$

así como

$$e^{-2y} - 2xe^{-y} + 1 = 0 \quad (3.265)$$

De estas ecuaciones llegamos a que:

$$\operatorname{acosh} x = \pm \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad \text{siempre que } x \geq 1 \quad (3.266)$$

donde hemos eliminado el signo menos dentro del logaritmo porque nos llevaría a tratar de obtener el logaritmo de un número real negativo, lo cual resulta en un número complejo. A partir de esto, si calculamos

$$\cosh(n \operatorname{acosh} x) = \cosh\left(\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})^{\pm n}\right) \quad (3.267)$$

y para ambos valores:

$$\cosh(n \operatorname{acosh} x) = \frac{1}{2} \left[ (x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x + \sqrt{x^2 - 1})^{-n} \right] \quad (3.268)$$

que es lo que tratábamos de demostrar.

## Apéndice 3.2: Cálculo de los polos de la aproximación Chebyshev

Las posiciones de los polos del filtro Chebyshev vendrán dadas igualando a 0 el denominador de

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 C_n^2(\omega)} \quad (3.269)$$

y haciendo  $\omega = s/j$ :

$$C_n^2\left(\frac{s}{j}\right) = \cos^2\left(n \operatorname{acos}\left(\frac{s}{j}\right)\right) = -\frac{1}{\varepsilon^2} \quad (3.270)$$

Supongamos que denominamos a las raíces,

$$s_k = \sigma_k + j\omega_k \quad (3.271)$$

$\operatorname{acosh}(s/j)$  será en general un número complejo:

$$W = \operatorname{acosh}(s/j) = u + jv \quad (3.272)$$

$$\text{luego } s = j \cos(u + jv) = \operatorname{sen} u \operatorname{sen} h v + j \cos u \cosh v \quad (3.273)$$

Igualando parte real e imaginaria se obtiene,

$$\begin{aligned} \sigma_k &= \operatorname{sen} u \operatorname{sen} h v \\ \omega_k &= \cos u \cosh v \end{aligned} \quad (3.274)$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}\cos(nW) &= \pm \frac{j}{\varepsilon} = \cos[n(u + jv)] = \\ &= \cos n u \cosh n v - j \operatorname{senn} u \operatorname{senh} n v\end{aligned}\quad (3.275)$$

$$\text{Igualando la parte real:} \quad \cos n u \cosh n v = 0 \quad (3.276)$$

$$\text{luego} \quad u = \left(\frac{2k+1}{n}\right)\frac{\pi}{2} \quad k = 0, 1, 2, \dots, 2n-1 \quad (3.277)$$

E igualando la parte imaginaria

$$-\operatorname{senn} u \operatorname{senh} n v = \pm \frac{1}{\varepsilon} \quad (3.278)$$

Eliminamos el signo  $-$  y lo tendremos en cuenta en el resultado final.

Sustituyendo el valor de  $u$ :

$$\operatorname{senh} n v = \frac{1}{\varepsilon} \quad (3.279)$$

$$\text{o bien} \quad v = \frac{1}{n} \operatorname{asenh} \frac{1}{\varepsilon} \quad (3.280)$$

Cogemos el signo necesario para obtener sólo las raíces del semiplano izquierdo:

$$\begin{aligned}s_k &= -\operatorname{sen}\left(\frac{2k+1}{n}\frac{\pi}{2}\right) \operatorname{senh}\left(\frac{1}{n} \operatorname{asenh} \frac{1}{\varepsilon}\right) + \\ &+ j \cos\left(\frac{2k+1}{n}\frac{\pi}{2}\right) \cosh\left(\frac{1}{n} \operatorname{asenh} \frac{1}{\varepsilon}\right)\end{aligned}\quad (3.281)$$

Mediante las relaciones trigonométricas de  $\cosh$  y  $\sinh$ :

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{asenh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad \text{si } 2x \geq 1 \quad (3.282)$$

$$\operatorname{acosh} x = \pm \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

se obtiene:

$$\sigma_k = -\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{1}{\varepsilon} + \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + 1} \right)^{1/n} - \left( \frac{1}{\varepsilon} + \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + 1} \right)^{-1/n} \right] \sin\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right) \quad (3.283)$$

$$\omega_k = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{1}{\varepsilon} + \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + 1} \right)^{1/n} + \left( \frac{1}{\varepsilon} + \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + 1} \right)^{-1/n} \right] \cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right)$$

### Apéndice 3.3: Simetría geométrica de los ceros de reflexión y transmisión en los filtros elípticos.

Consideremos por ejemplo el filtro elíptico de sexto orden cuya función característica al cuadrado se representa en la Fig. 3.30(a). Si transformamos  $\omega$  en  $\omega_s/\omega$  obtenemos la función característica paso de alta  $|K(j\omega_s/\omega)|^2$  (Fig. 3.30(b)). Si construimos una nueva función característica definida por:

$$|\bar{K}(j\omega)|^2 = \frac{1}{|K(j\omega_s/\omega)|^2} \quad (3.284)$$

que se muestra en la Fig. 3.30(c), tendremos también un filtro elíptico de sexto orden. Dado que la función característica de un filtro elíptico determina de forma única los polos y ceros para un  $\omega_s$  dado, los polos y ceros de  $\bar{K}(j\omega)$  deben coincidir con los de  $K(j\omega)$ . Luego:

$$R_n(\omega) = r \frac{\prod_{i=1}^{(n-1)/2} (\omega^2 - (\omega_s/\omega_{z_i})^2)}{\prod_{i=1}^{(n-1)/2} (\omega^2 - \omega_{z_i}^2)} \quad \text{para } n \text{ impar}$$

$$R_n(\omega) = r \frac{\prod_{i=1}^{n/2} (\omega^2 - (\omega_s/\omega_{z_i})^2)}{\prod_{i=1}^{n/2} (\omega^2 - \omega_{z_i}^2)} \quad \text{para } n \text{ par}$$

(3.285)

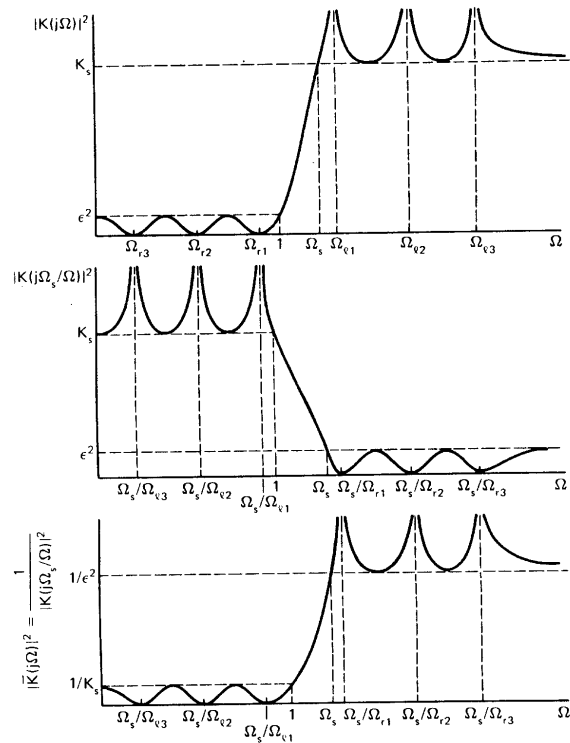


Figura 3.30: Ilustrando la simetría geométrica de los ceros