

TEMA 5

SÍNTESIS DE FILTROS ACTIVOS.
BIQUADS

5.1 Introducción

Las funciones de transferencia bicuadráticas de la forma,

$$H(s) = \frac{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{s^2 + s \frac{\omega_o}{Q} + \omega_o^2} \quad (5.1)$$

juegan un papel fundamental en el diseño de filtros activos. En muchas ocasiones se utilizan simplemente estas secciones de segundo orden en equipos de comunicaciones o de medida para eliminar ruido o interferencias. Pero también se utilizan como bloque básico en la construcción de filtros de mayor orden.

A la hora de seleccionar filtros adecuados deben tenerse en cuenta diferentes criterios:

a) Un criterio fundamental es conseguir una baja sensibilidad a las variaciones de los componentes.

Tal como se demuestra en el apéndice A.1 y se representa gráficamente en la Fig. 5.1, la magnitud de la función de transferencia es mucho más sensible a variaciones en ω_o que a variaciones en Q por lo que como

criterio de diseño resulta prioritario minimizar las sensibilidades de ω_o .

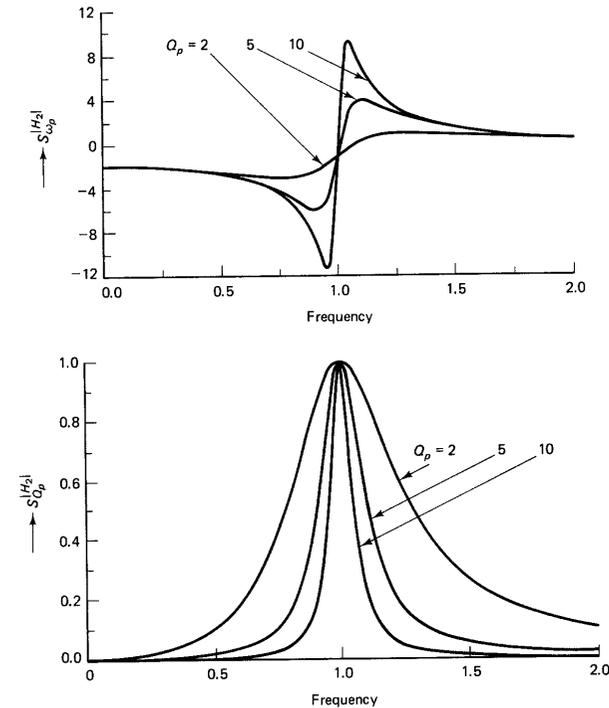


Figura 5.1: Sensibilidades de la magnitud de la función de transferencia a la frecuencia de polo ω_o y al factor de calidad de los polos Q .

- b) Los valores de los componentes deben ser prácticos y la diferencia entre el máximo y el mínimo no sea excesivamente grande.
- c) Los filtros requieren normalmente un proceso de ajuste posterior por lo que dicho ajuste debe ser sencillo, preferiblemente los parámetros importantes, ω_o y Q , deben poder ajustarse independientemente.
- d) Los biquads tienen grandes cargas, como otros biquads en conexiones en cascada o realimentadas de lazo múltiple, por lo que es necesario

que tengan baja impedancia de salida y alta impedancia de entrada.

5.2 Biquads monoamplificador

La combinación de un circuito RC con un elemento de ganancia en una configuración realimentada permite obtener funciones de transferencia con polos complejos. Consideremos el esquema general de circuito RC activo realimentado de la Fig. 5.2. En él se han asignado nombres a todos los terminales y las flechas indican terminales que son entradas del circuito RC.

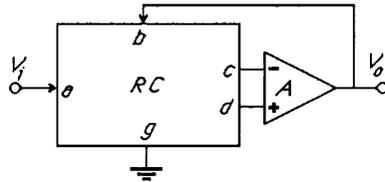


Figura 5.2: Configuración general RC-activa realimentada.

Referenciando las tensiones a tierra y denotando las funciones de transferencia de la red RC mediante:

$$T_{kl}(s) = \frac{V_k}{V_l} = \frac{N_{kl}(s)}{D_o(s)} \quad k = c, d; l = a, b \quad (5.2)$$

se obtiene:

$$\frac{1}{A(s)} V_o = [T_{da}(s) - T_{ca}(s)] V_i + [T_{db}(s) - T_{cb}(s)] V_o \quad (5.3)$$

por lo que la función de transferencia es:

$$H(s) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{T_{da}(s) - T_{ca}(s)}{T_{cb}(s) - T_{db}(s) + 1/A(s)} \quad (5.4)$$

Para que $H(s)$ sea de segundo orden es necesario que la red RC sea de seg-

undo orden. Puede observarse que los ceros de transmisión del circuito RC activo están determinados por el camino de propagación directo mientras que los polos están determinados por el lazo de realimentación.

Las frecuencias naturales del circuito están determinadas por:

$$T_{cb}(s) - T_{db}(s) + 1/A(s) = 0 \quad (5.5)$$

que es independiente del nudo a, independiente de la conexión V_i , lógico puesto que las frecuencias naturales se obtienen con la respuesta a entrada cero. Puesto que los polos se obtienen para $V_i=0$ y los ceros dependen de donde se aplica la señal de entrada (el numerador depende de a) se deduce que se pueden crear los ceros de una función de transferencia sin afectar a los polos, conectando la señal de entrada a nudos que estuvieran conectados previamente a tierra. Por tanto, si tenemos un circuito con los polos deseados se pueden crear los ceros de transmisión necesarios sin más que eliminar total o parcialmente la conexión a tierra de algún elemento y conectando el terminal de entrada en ese punto.

Ejercicio

5.1.- Demostrar que el circuito de la Fig. 5.3 puede tener polos complejos y determinar los tipos de funciones de filtrado que pueden obtenerse desconectando total o parcialmente de tierra las resistencias R_2 , R_3 y R .

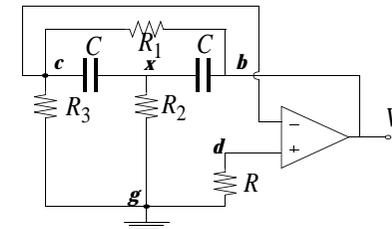


Figura 5.3: Biquad monoamplificador sin excitación.

Solución detallada

Los polos vienen dados por la solución de la ecuación:

$$T_{cb}(s) - T_{db}(s) + 1/A(s) = 0 \quad (5.6)$$

$1/A(s) = 0$ puesto que para obtener el comportamiento principal consideramos el amplificador operacional ideal. $T_{db}(s) = 0$ puesto que no hay camino de propagación de señal entre esos dos nudos. Para calcular $T_{cb}(s)$ aplicamos análisis nodal:

$$\begin{aligned} G_2 V_x + sC(V_x - V_b) + sC(V_x - V_c) &= 0 \\ G_3 V_c + sC(V_c - V_x) + G_1(V_c - V_b) &= 0 \end{aligned} \quad (5.7)$$

Resolviendo V_x de la primera ecuación:

$$V_x = \frac{sCV_b + sCV_c}{G_2 + 2sC} \quad (5.8)$$

y sustituyendo en la segunda ecuación se obtiene:

$$T_{cb}(s) = \frac{V_c}{V_b} = \frac{s^2 C^2 + 2sCG_1 + G_1 G_2}{s^2 C^2 + sC[2(G_1 + G_3) + G_2] + G_2(G_1 + G_3)} \quad (5.9)$$

Los polos son las raíces del numerador por lo que identificando con $s^2 + s\frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2$ se obtiene:

$$\begin{aligned} \omega_o &= \frac{\sqrt{G_1 G_2}}{C} \\ Q &= \frac{\omega_o C}{2G_1} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{G_2}{G_1}} \end{aligned} \quad (5.10)$$

Para que tenga polos complejo conjugados debe ser $Q > \frac{1}{2}$ por lo que debe ser:

$$R_1 > R_2 \quad (5.11)$$

Para obtener funciones de filtrado hemos de introducir señal por elementos desconectados total o parcialmente de tierra. Hacemos las desconexiones parciales de tierra que se muestran en la Fig. 5.4.

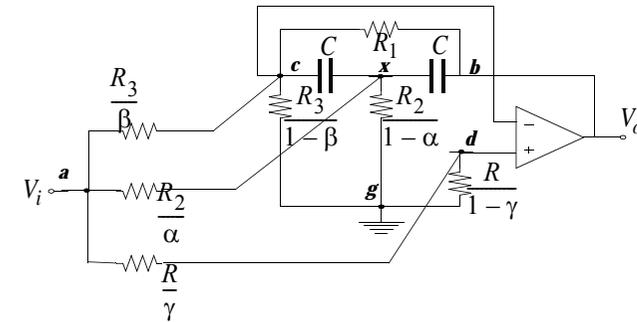


Figura 5.4: Biquad monoamplificador.

Para obtener la función de filtrado debemos obtener la función de transferencia. Una posibilidad es calcularla a partir de las funciones de transferencia de la red pasiva:

$$H(s) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{T_{da}(s) - T_{ca}(s)}{T_{cb}(s) - T_{db}(s)} \quad (5.12)$$

Queda por calcular $T_{da}(s)$ que lo calculamos por el divisor de tensiones:

$$T_{da}(s) = \left. \frac{V_d}{V_a} \right|_{V_b=0} = \frac{\frac{R}{1-\gamma}}{\frac{R}{1-\gamma} + \frac{R}{\gamma}} = \gamma \quad (5.13)$$

y

$$T_{ca}(s) = \left. \frac{V_c}{V_a} \right|_{V_b=0} \quad (5.14)$$

para lo cual aplicamos análisis nodal:

$$\begin{aligned} G_2(1-\alpha)V_x + sCV_x + sC(V_x - V_c) + \alpha G_2(V_x - V_a) &= 0 \\ G_3(1-\beta)V_c + sC(V_c - V_x) + G_1V_c + \beta G_3(V_c - V_a) &= 0 \end{aligned} \quad (5.15)$$

Resolviendo V_x de la segunda ecuación:

$$V_x = \frac{G_3 + sC + G_1}{sC} V_c - \frac{\beta G_3}{sC} V_a \quad (5.16)$$

y sustituyendo en la primera se obtiene:

$$T_{ca}(s) = \frac{\alpha s C G_2 + 2s C \beta G_3 + \beta G_2 G_3}{s^2 C^2 + s C [2(G_1 + G_3) + G_2] + G_2(G_1 + G_3)} \quad (5.17)$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} H(s) = \frac{V_o}{V_i} &= \frac{\gamma - \frac{\alpha s C G_2 + 2s C \beta G_3 + \beta G_2 G_3}{s^2 C^2 + s C [2(G_1 + G_3) + G_2] + G_2(G_1 + G_3)}}{\frac{s^2 C^2 + 2s C G_1 + G_1 G_2}{s^2 C^2 + s C [2(G_1 + G_3) + G_2] + G_2(G_1 + G_3)}} = \\ &= \frac{\gamma s^2 + s \frac{\gamma [2(G_1 + G_3) + G_2] - \alpha G_2 - 2\beta G_3}{C} + \frac{\gamma G_2(G_1 + G_3) - \beta G_2 G_3}{C^2}}{s^2 + 2s \frac{G_1}{C} + \frac{G_1 G_2}{C^2}} \end{aligned} \quad (5.18)$$

La técnica anterior suele ser más adecuada porque descompone el problema de calcular la función de transferencia del biquad activo completo en el cálculo de la función de transferencia de varios circuitos RC más sencillos. No obstante, siempre está abierta la posibilidad de calcular la función de transferencia del circuito completo. Lo hacemos como ejemplo. Aplicando análisis nodal al circuito de la Fig. 5.4 se obtiene:

$$\begin{aligned} G_2(1-\alpha)V_x + sC(V_x - V_o) + sC(V_x - V_c) + \alpha G_2(V_x - V_i) &= 0 \\ G_3(1-\beta)V_c + sC(V_c - V_x) + G_1(V_c - V_o) + \beta G_3(V_c - V_i) &= 0 \\ \gamma G(V_d - V_i) + G(1-\gamma)V_d &= 0 \\ V_c &= V_d \end{aligned} \quad (5.19)$$

Se sustituye la cuarta ecuación en las anteriores. De la tercera se resuelve:

$$V_c = \gamma V_i \quad (5.20)$$

y sustituyendo en las dos primeras se obtiene:

$$\begin{aligned} G_2V_x + 2sCV_x - sCV_o - sC\gamma V_i - \alpha G_2V_i &= 0 \\ G_3\gamma V_i + sC\gamma V_i - sCV_x + G_1\gamma V_i - G_1V_o - \beta G_3V_i &= 0 \end{aligned} \quad (5.21)$$

De la segunda ecuación:

$$V_x = \frac{G_3\gamma + sC\gamma + G_1\gamma - \beta G_3}{sC} V_i - \frac{G_1}{sC} V_o \quad (5.22)$$

y sustituyendo en la primera se obtiene:

$$H(s) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{\gamma s^2 + s \frac{\gamma [2(G_1 + G_3) + G_2] - \alpha G_2 - 2\beta G_3}{C} + \frac{\gamma G_2(G_1 + G_3) - \beta G_2 G_3}{C^2}}{s^2 + 2s \frac{G_1}{C} + \frac{G_1 G_2}{C^2}} \quad (5.23)$$

que lógicamente coincide con la anterior.

Las funciones de filtrado posibles son:

Filtro paso de baja

Para anular el coeficiente de s^2 debe ser $\gamma = 0$ pero entonces no hay forma de cancelar el coeficiente de s sin cancelar también el término independiente. Solamente puede hacerse pues con un cero en el semiplano de la izquierda.

Filtro paso de banda

Se puede anular término independiente y coeficiente de s^2 haciendo:

$$\beta = \gamma = 0 \quad (5.24)$$

quedando una función paso de banda inversora.

Filtro paso de alta

Para anular el término independiente:

$$\gamma = \frac{\beta G_3}{G_1 + G_3} \quad (5.25)$$

Para anular entonces el coeficiente de s :

$$\alpha = \frac{\beta G_3}{G_1 + G_3} \quad (5.26)$$

Una buena solución es $\beta = 1$ puesto que ahorra elementos.

Filtro rechazo de banda

Para anular el coeficiente de s :

$$\alpha = \frac{\gamma[2(G_1 + G_3) + G_2]}{G_2} - 2\beta \frac{G_3}{G_2} \quad (5.27)$$

Para que sea rechazo de banda simétrico deben ser iguales los términos independientes de numerador y denominador:

$$G_2(G_1 + G_3) - \frac{\beta}{\gamma} G_2 G_3 = G_1 G_2 \quad (5.28)$$

simplificando:

$$G_2 G_3 \left(1 - \frac{\beta}{\gamma}\right) = 0 \quad (5.29)$$

por lo que

$$\beta = \gamma \quad (5.30)$$

y

$$\alpha = \frac{\gamma[2G_1 + G_2]}{G_2} \quad (5.31)$$

tal que $\alpha \leq 1$.

Si $\beta > \gamma$ tendremos un "high-pass notch" y si $\beta < \gamma$ tendremos un "low-pass notch".

En el caso del rechazo de banda simétrico otra posible solución para (5.29) es:

$$G_3 = 0 \quad (5.32)$$

Esto puede hacerse puesto que los polos no dependían de G_3 por lo que es un parámetro libre. En realidad, (5.30) puede hacerse confluír a esta segunda solución puesto que no aparece ninguna condición sobre G_3 por lo que una solución eficiente en este caso es hacerla nula, con lo cual resulta igual a (5.32). La condición en (5.31) permanece inalterada.

Filtro pasa todo

Debe cumplirse:

$$G_2(G_1 + G_3) - \frac{\beta}{\gamma} G_2 G_3 = G_1 G_2 \quad (5.33)$$

$$2(G_1 + G_3) + G_2 - \frac{\alpha}{\gamma} G_2 - 2\frac{\beta}{\gamma} G_3 = -2G_1$$

De la primera ecuación en (5.33) se obtiene:

$$G_2 G_3 \left(1 - \frac{\beta}{\gamma}\right) = 0 \quad (5.34)$$

Una posible solución es:

$$\beta = \gamma \tag{5.35}$$

y otra posible solución es:

$$G_3 = 0 \tag{5.36}$$

(5.35) puede hacerse confluír a esta segunda solución puesto que no aparece ninguna condición sobre G_3 por lo que una solución eficiente en este caso es hacerla nula, con lo cual resulta igual a (5.36).

Para cualquiera de las dos soluciones se obtiene de la segunda ecuación en (5.33):

$$\alpha = \gamma \left(\frac{4G_1}{G_2} + 1 \right) \tag{5.37}$$

Una implementación conveniente de la configuración general de la Fig. 5.2 la constituyen la estructura ENF de la Fig. 5.5a.

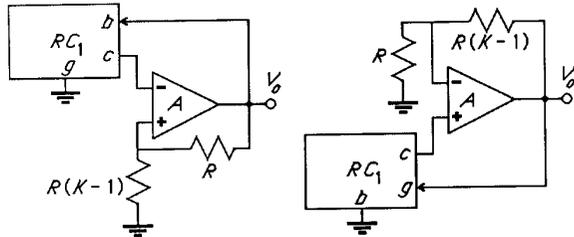


Figura 5.5: (a) Estructura ENF, (b) estructura EPF.

Los polos vienen entonces determinados por:

$$T_{cb}(s) - \frac{K-1}{K} + \frac{1}{A(s)} = \frac{1}{D_1(s)} \left[N_{cb}(s) - \frac{K-1}{K} D_1(s) + \frac{D_1(s)}{A(s)} \right] \tag{5.38}$$

El camino principal de realimentación va al terminal inversor del A.O. pero también hay algo de realimentación positiva. Esto permite obtener factores de calidad más altos por lo que se llama circuito de realimentación negativa

mejorada (ENF).

Mediante una sustitución simétrica se obtiene el circuito de la Fig. 5.5b que se denomina circuito de realimentación positiva mejorada (EPF). Este circuito es el circuito complementario del ENF y se puede obtener a partir de él mediante el proceso de transformación complementaria, que dice que los polos de un circuito RC activo con un A.O. no cambian si se intercambian los terminales de entrada del A.O. y la salida del A.O. con tierra. Para comprobarlo con el circuito de la Fig. 5.5b mediante análisis directo se obtiene que los polos están determinados por:

$$\frac{1}{K} - T_{cg}(s) + \frac{1}{A(s)} = 0 \tag{5.39}$$

y

$$T_{cg}(s) = \frac{V_{cb}}{V_{gb}} = \frac{V_{cg} + V_{gb}}{V_{gb}} = 1 - \frac{V_{cg}}{V_{bg}} = 1 - T_{cb} \tag{5.40}$$

por lo que los polos son los mismos que los de (5.38). Por tanto, la dependencia respecto a los elementos de circuito de los polos de los circuitos ENF y EPF son idénticas. Por tanto, si los circuitos RC son iguales, los circuitos ENF y EPF, además de todos sus casos particulares tendrán las mismas sensibilidades de los polos. Ya que éstas son las que controlan de forma más crítica el comportamiento en la banda pasante, los argumentos en favor de uno u otro no son demasiado relevantes. A menudo se utilizan filtros con A.O. en configuración de realimentación positiva con ganancia unidad o realimentación negativa con ganancia infinita, tal como se muestra en la Fig. 5.6. Estos no son más que casos especiales de los circuitos ENF y EPF para $K=1$. Los polos vienen dados por:

$$T_{cb}(s) + \frac{1}{A(s)} = 1 - T_{cg}(s) + \frac{1}{A(s)} = 0 \tag{5.41}$$

La dependencia de los polos respecto al A.O. es la misma luego aparente-

mente no hay ninguna diferencia respecto al comportamiento en sensibilidad de la estructura de ganancia unidad y de la de ganancia infinita.

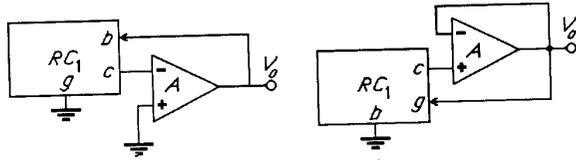


Figura 5.6: Casos especiales de las estructuras ENF y EPF: (a) estructura de realimentación negativa con ganancia infinita (NF); (b) estructura de realimentación positiva con ganancia unidad (PF).

5.2.1 Circuitos ENF: condiciones para minimizar sensibilidades de la frecuencia de polo

La red pasiva RC debe ser un circuito de segundo orden por lo que su función de transferencia en general es:

$$T_{cb}(s) = \frac{N_{cb}}{D_1(s)} = \frac{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{s^2 + s\omega_1/q_p + \omega_1^2} \quad (5.42)$$

donde $q_p < 0.5$ ya que los polos de circuitos pasivos RC son simples, reales y negativos.

La expresión de los polos según (5.38) viene dada por las raíces de:

$$D(s) = N_{cb} - \left(\frac{K-1}{K} - \frac{1}{A} \right) D_1(s) \quad (5.43)$$

Utilizando el modelo de un polo del A.O.:

$$A(s) = \frac{GB}{s + \sigma} = \frac{1}{s/GB + 1/A_0} \quad (5.44)$$

y llamando

$$k_0 = \frac{K-1}{K} - \frac{1}{A_0} \quad (5.45)$$

se obtiene:

$$D(s) = \frac{s^3}{GB} + \left(a_2 - k_0 + \frac{\omega_1}{GBq_p} \right) s^2 + \left(a_1 - k_0 \frac{\omega_1}{q_p} + \frac{\omega_1^2}{GB} \right) s + a_0 - k_0 \omega_1^2 \quad (5.46)$$

Si consideramos el A.O. con producto ganancia-ancho de banda infinito se simplifica (5.46) a un polinomio de segundo orden:

$$D(s) = (a_2 - k_0) s^2 + \left(a_1 - k_0 \frac{\omega_1}{q_p} \right) s + (a_0 - k_0 \omega_1^2) \quad (5.47)$$

El apéndice A.1 demuestra que las funciones de transferencia de segundo orden son $2Q$ veces más sensible a cambios en ω_o que a cambios en Q . Por tanto, es más importante conseguir sensibilidades pequeñas de ω_o que sensibilidades pequeñas de Q .

De (5.47) la frecuencia de polo es:

$$\omega_0^2 = \frac{a_0 - k_0 \omega_1^2}{a_2 - k_0} \quad (5.48)$$

En primer lugar tratamos de minimizar la sensibilidad de ω_o respecto a la ganancia en dc del amplificador operacional A_o .

Caso $a_0 = a_2 = 0$

Una posibilidad para hacer ω_o independiente de A_o es:

$$a_0 = a_2 = 0 \quad (5.49)$$

Entonces T_{cb} es una función paso de banda:

$$T_{cb}(s) = \frac{(\omega_1/q_z)s}{s^2 + s\omega_1/q_p + \omega_1^2} \quad (5.50)$$

Pero esta no es una solución válida ya que con el modelo del amplificador operacional en (5.44) los coeficientes de s^3 y s^0 en (5.46) tienen distinto signo y por tanto hay alguna raíz en el semiplano derecho y el filtro ENF no es estable.

Caso $a_0 = a_2\omega_1^2$

La otra posibilidad es:

$$a_0 = a_2\omega_1^2 \quad (5.51)$$

En este caso, T_{cb} queda:

$$T_{cb}(s) = a_2 \frac{s^2 + s\omega_1/q_z + \omega_1^2}{s^2 + s\omega_1/q_p + \omega_1^2} \quad (5.52)$$

De (5.48) se obtiene que

$$\omega_0 = \omega_1 \quad (5.53)$$

El denominador de la función de transferencia vendrá dado por:

$$\begin{aligned} N_{cb}(s) - \left(\frac{K-1}{K} - \frac{1}{A_0}\right)D_1(s) &= N_{cb}(s) - k_0D_1(s) = \\ &= a_2(s^2 + s\omega_1/q_z + \omega_1^2) - k_0(s^2 + s\omega_1/q_p + \omega_1^2) \end{aligned} \quad (5.54)$$

Si comparamos esto con la forma general del denominador de una función de transferencia de segundo orden:

$$s^2 + s\frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2 \quad (5.55)$$

se obtiene igualando coeficientes en (5.54) y (5.55):

$$\frac{\omega_0}{Q} = \frac{a_2\frac{\omega_1}{q_z} - k_0\frac{\omega_1}{q_p}}{a_2 - k_0} \quad (5.56)$$

$$(a_2q_p - k_0q_z)Q = q_zq_p(a_2 - k_0)$$

por lo que el factor de calidad:

$$Q = \frac{q_zq_p(a_2 - k_0)}{a_2q_p - k_0q_z} = \frac{q_z(a_2 - k_0)}{a_2 - k_0(1 + q)} = \frac{q_z}{1 - \frac{k_0}{a_2}q} \quad (5.57)$$

donde

$$\frac{q_z}{q_p} = 1 + q \quad (5.58)$$

De (5.56) deduce que si $a_2 > k_0$ para que $Q > 0$ es necesario que:

$$\frac{qk_0}{a_2 - k_0} < 1 \quad (5.59)$$

Operando sobre esta ecuación:

$$qk_0 < a_2 - k_0$$

$$k_0\frac{q_z}{q_p} < a_2$$

$$\frac{K-1}{K} - \frac{1}{A_0} < \frac{a_2q_p}{q_z} \quad (5.60)$$

$$1 - \frac{1}{K} - \frac{1}{A_0} < \frac{a_2q_p}{q_z}$$

resulta

$$\frac{1}{K} > 1 - \frac{1}{A_0} - a_2 \frac{q_p}{q_z} \approx 1 - a_2 \frac{q_p}{q_z} \quad (5.61)$$

La frecuencia de polo ω_o es igual a la frecuencia de polo ω_1 del circuito RC pasivo. Por tanto, está determinada únicamente por elementos pasivos. Ya que por análisis dimensional ω_1 debe ser de la forma,

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}} \quad (5.62)$$

se deduce que las sensibilidades de ω_o respecto a los elementos pasivos tienen el mínimo valor teórico: 0.5. A esto hay que añadir que la sensibilidad de ω_o respecto a A_o es nula.

5.2.2 Circuitos EPF: condiciones para minimizar sensibilidades de la frecuencia de polo

El circuito RC del filtro EPF debe tener la misma forma de (5.42):

$$T_{cg}(s) = \frac{N_{cg}(s)}{D_1(s)} = \frac{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{s^2 + s\omega_1/q_p + \omega_1^2} \quad (5.63)$$

Según (5.39) los polos vienen dado por los ceros de:

$$D(s) = \left(\frac{1}{K} + \frac{1}{A}\right) D_1(s) - N_{cg}(s) \quad (5.64)$$

Sustituyendo (5.44) para la ganancia del A.O. y definiendo:

$$k_1 = \frac{1}{K} + \frac{1}{A_0} \quad (5.65)$$

se obtiene que $D(s)$ es:

$$\begin{aligned} D(s) &= \\ &= \frac{s^3}{GB} + s^2 \left(k_1 - a_2 + \frac{\omega_1}{GB q_p} \right) + s \left(k_1 \frac{\omega_1}{q_p} - a_1 + \frac{\omega_1^2}{GB} \right) + k_1 \omega_1^2 - a_0 \end{aligned} \quad (5.66)$$

Para $GB \rightarrow \infty$ se simplifica a:

$$D(s) = s^2 (k_1 - a_2) + s \left(k_1 \frac{\omega_1}{q_p} - a_1 \right) + k_1 \omega_1^2 - a_0 \quad (5.67)$$

Por tanto la frecuencia de polo ω_o es:

$$\omega_0^2 = \frac{a_0 - k_1 \omega_1^2}{a_2 - k_1} \quad (5.68)$$

que es igual al ENF y por tanto conduce a las mismas conclusiones.

Caso $a_0 = a_2 = 0$

La primera posibilidad de hacer ω_o independiente de A_o es hacer $a_0 = a_2 = 0$ con lo que $T_{cg}(s)$ es:

$$T_{cg}(s) = \frac{(\omega_1/q_z)s}{s^2 + s\omega_1/q_p + \omega_1^2} \quad (5.69)$$

La frecuencia de polo resultante es:

$$\omega_0 = \omega_1 \quad (5.70)$$

El denominador de la función de transferencia viene dado por:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{K} + \frac{1}{A_0}\right) D_1(s) - N_{cg}(s) &= k_1 D_1(s) - N_{cg}(s) = \\ &= k_1 (s^2 + s\omega_1/q_p + \omega_1^2) - s\omega_1/q_z \end{aligned} \quad (5.71)$$

Si comparamos esto con la forma general del denominador de una función

de transferencia de segundo orden:

$$s^2 + s\frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2 \quad (5.72)$$

se obtiene identificando términos en (5.71) y (5.72):

$$\frac{\omega_0}{Q} = \frac{k_1 \frac{\omega_1}{q_p} - \frac{\omega_1}{q_z}}{k_1} \quad (5.73)$$

$$(k_1 q_z - q_p)Q = q_z q_p k_1$$

por lo que el factor de calidad:

$$Q = \frac{q_z q_p k_1}{k_1 q_z - q_p} = \frac{q_z}{1 + q - \frac{1}{k_1}} = \frac{q_z}{q - (1 - k_1)/k_1} \quad (5.74)$$

Para que el sistema sea estable debe ser $Q > 0$ y por tanto:

$$q > \frac{(1 - k_1)}{k_1} \quad (5.75)$$

Sustituyendo los valores de q y k_1 :

$$\frac{q_z}{q_p} - 1 > \frac{1}{k_1} - 1 \quad (5.76)$$

$$\frac{1}{K} + \frac{1}{A_0} > \frac{q_p}{q_z}$$

Caso $a_0 = a_2 \omega_1^2$

La segunda posibilidad es hacer:

$$a_0 = a_2 \omega_1^2 \quad (5.77)$$

Entonces $T_{cg}(s)$ debe ser de la forma:

$$T_{cg}(s) = a_2 \frac{s^2 + s\omega_1/q_z + \omega_1^2}{s^2 + s\omega_1/q_p + \omega_1^2} \quad (5.78)$$

Por tanto, la frecuencia de polo es:

$$\omega_0 = \omega_1 \quad (5.79)$$

y al igual que en el filtro ENF el factor de calidad es:

$$Q = \frac{q_z}{1 - \frac{k_1}{a_2 - k_1} q} \quad (5.80)$$

Si $a_2 - k_1 > 0$ entonces la solución no es válida puesto que de acuerdo con (5.66) el sistema es inestable. Si $a_2 - k_1 < 0$ la solución sí puede ser válida, aunque en circuitos EPF se suele usar sólo la primera posibilidad, con $T_{cg}(s)$ del tipo paso de banda.

Estos diseños hacen ω_0 independiente de K y A_0 . Q es función de ambos parámetros y puede utilizarse k_0 o k_1 para mejorar el valor de Q . Si en el circuito ENF escogemos $K=1$ entonces se obtiene el circuito NF de la Fig. 5.6a. Entonces $k_0 = -1/A_0 \approx 0$ y por tanto, $Q = q_z$. De forma similar, si escogemos $K=1$ en el circuito EPF obtenemos el circuito PF de la Fig. 5.6b. Entonces $k_1 = 1 + 1/A_0 \approx 1$ y $Q = q_z/q$.

5.2.3 Circuito EPF: sensibilidades del factor de calidad

Una vez minimizadas las sensibilidades de ω_0 es interesante considerar las sensibilidades del factor de calidad y utilizar el resto de parámetros libres de diseño para minimizarlas. Dependen de la topología de la red pasiva por lo que se calcularán y minimizarán para cada caso de diseño particular.

5.2.4 Circuito ENF: sensibilidades del factor de calidad

Al igual que en el caso anterior se utilizan parámetros de diseño para minimizarlas.

5.2.5 Desviaciones debido a la dependencia con la frecuencia

La dependencia con la frecuencia del amplificador operacional va a causar desviaciones importantes de las características. El desarrollo sobre la influencia del ancho de banda finito aparece en el apéndice A.2 y resulta que la desviación producida en la frecuencia de polo nominal y el factor de calidad son:

$$\frac{\Delta\omega_o}{\omega_o} \cong -\frac{1}{2Q} \Gamma_{A_0} \frac{1}{|A(j\omega_o)|} \quad \frac{\Delta Q}{Q} \cong \frac{1}{2Q} \Gamma_{A_0} \frac{1}{|A(j\omega_o)|} \quad (5.81)$$

Estas ecuaciones muestran que los errores en ω_o y Q son inversamente proporcionales a la ganancia del amplificador operacional a la frecuencia ω_o y que aumentan con el producto ganancia-sensibilidad. De ahí que sea interesante minimizarlo.

5.3 Circuitos RC pasivos

La red pasiva RC debe implementar una función de transferencia de la forma:

$$T(s) = \frac{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{s^2 + s\omega_1/q_p + \omega_1^2} \quad (5.82)$$

donde debe cumplirse $a_0 = a_2 \omega_1^2$ o bien $a_2 = a_0 = 0$ dependiendo del tipo de estructura.

5.3.1 Bipuertas LBT

La bipuerta "loaded bridged T" (LBT) que es una bipuerta complementaria a sí misma, ella y su complementaria tienen la misma topología, y se muestran en la Fig. 5.7.

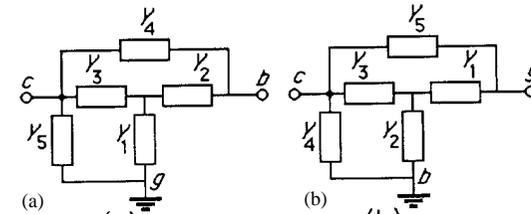


Figura 5.7: Circuito LBT y su complementario.

Ejercicio

5.2.- Obtener la función $T_{cb}(s)$ para el circuito de la Fig. 5.7a.

Solución detallada

Aplicando análisis nodal a la Fig. 5.7a:

$$\begin{cases} Y_4(V_c - V_b) + Y_3(V_c - V_x) + Y_5 V_c = 0 \\ Y_3(V_x - V_c) + Y_2(V_x - V_b) + Y_1 V_x = 0 \end{cases}$$

$$V_x = \frac{Y_3}{Y_1 + Y_2 + Y_3} V_c + \frac{Y_2}{Y_1 + Y_2 + Y_3} V_b \quad (5.83)$$

$$(Y_3 + Y_4 + Y_5)V_c = Y_4 V_b + \frac{Y_3^2}{Y_1 + Y_2 + Y_3} V_c + \frac{Y_2 Y_3}{Y_1 + Y_2 + Y_3} V_b$$

Luego la función de transferencia:

$$T_{cb}(s) = \frac{N_{cb}(s)}{D(s)} = \frac{Y_2 Y_3 + Y_4(Y_1 + Y_2 + Y_3)}{(Y_1 + Y_2 + Y_3)(Y_4 + Y_5) + Y_3(Y_1 + Y_2)} \quad (5.84)$$

Ejercicio

5.3.- Obtener la función $T_{cg}(s)$ para el circuito de la Fig. 5.7b.

Solución

Se obtiene para la función de transferencia del circuito de la Fig. 5.7b:

$$T_{cg}(s) = \frac{N_{cg}(s)}{D(s)} = \frac{Y_1 Y_3 + Y_5(Y_1 + Y_2 + Y_3)}{(Y_1 + Y_2 + Y_3)(Y_4 + Y_5) + Y_3(Y_1 + Y_2)} \quad (5.85)$$

Como era de esperar ambas funciones tienen los mismos polos.

Como ya hemos dicho anteriormente los ceros de transmisión se crean desconectando total o parcialmente elementos conectados a tierra, como se muestra en los circuitos de la Fig. 5.8 correspondientes a los circuitos de la Fig. 5.7.

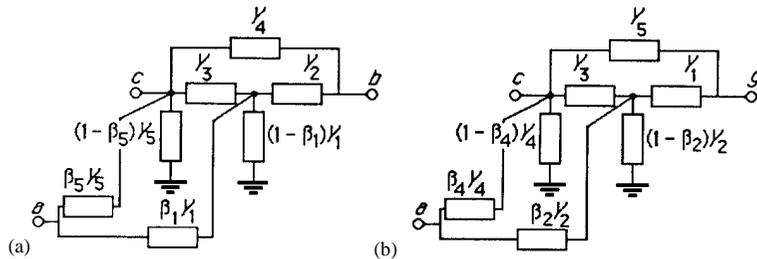


Figura 5.8: Circuitos de la Fig. 5.7 con desconexión parcial de los elementos conectados a tierra.

Ejercicio

5.4.- Obtener la función $T_{ca}(s)$ para el circuito de la Fig. 5.8a.

Solución

Calculamos la función de transferencia $T_{ca}(s)$ para la Fig. 5.8a formulando ecuaciones nodales:

$$\begin{cases} \beta_1 Y_1 (V_x - V_a) + Y_3 (V_x - V_c) + (1 - \beta_1) Y_1 V_x + Y_2 V_x = 0 \\ Y_3 (V_c - V_x) + Y_4 V_c + (1 - \beta_5) Y_5 V_c + \beta_5 Y_5 (V_c - V_a) = 0 \end{cases}$$

$$V_x = \frac{Y_3 + Y_4 + Y_5}{Y_3} V_c - \frac{\beta_5 Y_5}{Y_3} V_a$$

$$- \beta_1 Y_1 V_a - Y_3 V_c + (Y_1 + Y_2 + Y_3)(Y_3 + Y_4 + Y_5) V_c - \frac{\beta_5 Y_5 (Y_1 + Y_2 + Y_3)}{Y_3} V_a = 0$$

$$T_{ca}(s) = \left. \frac{V_c}{V_a} \right|_{V_b=0} = \frac{\beta_1 Y_1 Y_3 + \beta_5 Y_5 (Y_1 + Y_2 + Y_3)}{(Y_1 + Y_2 + Y_3)(Y_3 + Y_4 + Y_5) - Y_3^2}$$

Ejercicio

5.5.- Obtener la función $T_{ca}(s)$ para el circuito de la Fig. 5.8b.

Solución

Se obtiene para la función de transferencia del circuito de la Fig. 5.8b:

$$T_{ca}(s) = \left. \frac{V_c}{V_a} \right|_{V_g=0} = \frac{\beta_2 Y_2 Y_3 + \beta_4 Y_4 (Y_1 + Y_2 + Y_3)}{(Y_1 + Y_2 + Y_3)(Y_4 + Y_5) + Y_3 (Y_1 + Y_2)} \quad (5.87)$$

Veamos la forma concreta que debe tener el circuito para implementar un filtro ENF.

Ejercicio

5.6.- Demostrar que para minimizar las sensibilidades de la frecuencia de polo de un biquad ENF utilizando la bipuerta LBT de la Fig. 5.7a debe ser $Y_5 = 0$.

Para que $T_{cb}(s)$ sea una función de transferencia de segundo orden hay dos opciones:

Caso A

Consiste en hacer

$$Y_1 = G_1 \quad Y_2 = sC_2 \quad Y_3 = sC_3 \quad Y_4 = G_4 \quad (5.88)$$

Las funciones de transferencia resultantes por simple sustitución son:

$$T_{cb}(s) = \frac{s^2 C_2 C_3 + s(C_2 + C_3)G_4 + G_1 G_4}{s^2 C_2 C_3 + s[C_3(G_1 + G_4) + C_2 G_4] + G_1 G_4} \quad (5.89)$$

$$T_{ca}(s) = \frac{s\beta_1 G_1 C_3}{s^2 C_2 C_3 + s[C_3(G_1 + G_4) + C_2 G_4] + G_1 G_4}$$

El circuito resultante para este caso con los posibles elementos conectados a la entrada se muestra en la Fig. 5.9a.

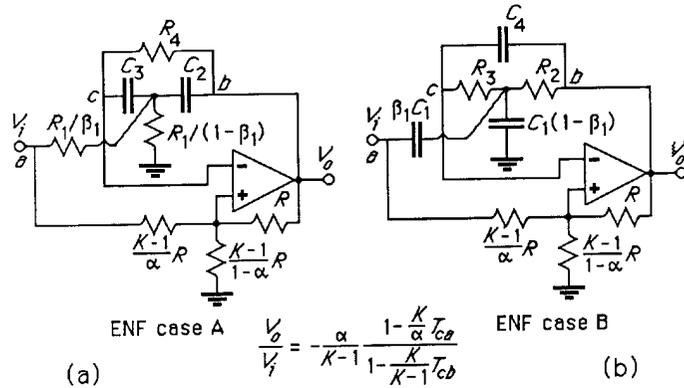


Figura 5.9: Circuitos ENF con bipuertas LBT para los dos casos estudiados.

Ejercicio

5.7.- Obtener la función de transferencia del biquad de la Fig. 5.9a así como el factor de calidad y la frecuencia de polo.

Solución detallada

Con el modelo ideal del A.O. únicamente queda por obtener $T_{da}(s)$ de la función de transferencia. Utilizando el divisor de tensiones:

$$T_{da}(s) = \left(\frac{(K-1)R}{1-\alpha} \parallel R \right) = \frac{\frac{R(K-1)}{K-\alpha}}{\frac{K-1}{\alpha}R + \frac{R(K-1)}{K-\alpha}} = \frac{\alpha}{K} \quad (5.90)$$

La función de transferencia es pues:

$$\begin{aligned}
 H(s) &= \frac{T_{da}(s) - T_{ca}(s)}{T_{cb}(s) - T_{db}(s)} = \\
 &= \frac{\frac{\alpha}{K} \frac{s\beta_1 G_1 C_3}{s^2 C_2 C_3 + s[C_3(G_1 + G_4) + C_2 G_4] + G_1 G_4}}{\frac{s^2 C_2 C_3 + s(C_2 + C_3)G_4 + G_1 G_4}{s^2 C_2 C_3 + s[C_3(G_1 + G_4) + C_2 G_4] + G_1 G_4} - \frac{K-1}{K}} \\
 &= \frac{\alpha s^2 C_2 C_3 + s\alpha[C_3(G_1 + G_4) + C_2 G_4] + \alpha G_1 G_4 - sK\beta_1 G_1 C_3}{[s^2 C_2 C_3 + s(C_2 + C_3)G_4 + G_1 G_4]K - (K-1)[s^2 C_2 C_3 + s[C_3(G_1 + G_4) + C_2 G_4] + G_1 G_4]} \\
 &= \alpha \frac{s^2 + s \left[G_4 \left(\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right) + \frac{G_1}{C_2} \left(1 - \beta_1 \frac{K}{\alpha} \right) \right] + \omega_o^2}{s^2 + s \frac{[C_3(G_1 + G_4) + C_2 G_4 - KC_3 G_1]}{C_2 C_3} + \omega_o^2}
 \end{aligned} \quad (5.91)$$

Veamos el término en s del denominador para obtener el valor de Q :

$$\frac{C_3(G_1 + G_4) + C_2 G_4 - KC_3 G_1}{C_2 C_3} = \frac{\omega_o}{Q} = \sqrt{\frac{G_1 G_4}{C_2 C_3}} \frac{1}{Q} \quad (5.92)$$

De donde:

$$\begin{aligned}
Q &= \frac{\sqrt{G_1 G_4 C_2 C_3}}{C_3(G_1 + G_4) + C_2 G_4 - K C_3 G_1} = \\
&= \frac{\sqrt{G_1/G_4}}{\sqrt{\frac{C_3}{C_2} \left(1 + \frac{G_1}{G_4}\right) + \sqrt{\frac{C_2}{C_3}} - K \sqrt{\frac{C_3 G_1}{C_2 G_4}}} = \\
&= \frac{\sqrt{G_1/G_4}}{\sqrt{\frac{C_3}{C_2} \left(1 + \frac{C_2}{C_3} - (K-1) \frac{G_1}{G_4}\right)}} = \\
&= \frac{\sqrt{G_1/G_4}}{\sqrt{\frac{C_3}{C_2} \left(1 + \frac{C_2}{C_3}\right) - \frac{(K-1)G_1/G_4}{\left(1 + \frac{C_2}{C_3}\right)}}} = \\
&= \frac{\sqrt{G_1/G_4}}{\sqrt{\frac{C_3}{C_2} + \sqrt{\frac{C_2}{C_3}} - \frac{(K-1)G_1/G_4}{\left(1 + \frac{C_2}{C_3}\right)}}}
\end{aligned} \tag{5.93}$$

La función de transferencia implementada es:

$$H(s) = \frac{V_o}{V_i} = \alpha \frac{s^2 + s \left[G_4 \left(\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right) + \frac{G_1}{C_2} \left(1 - \beta_1 \frac{K}{\alpha} \right) \right] + \omega_o^2}{s^2 + s \omega_o / Q + \omega_o^2} \tag{5.94}$$

Este circuito puede realizar funciones de filtrado paso de banda, pasa todo y rechazo de banda con los valores adecuados de α y β_1 .

Caso B

Consiste en hacer

$$Y_1 = sC_1 \quad Y_2 = G_2 \quad Y_3 = G_3 \quad Y_4 = sC_4 \tag{5.95}$$

Las funciones de transferencia resultantes por simple sustitución son:

$$\begin{aligned}
T_{cb}(s) &= \frac{s^2 C_1 C_4 + s(G_2 + G_3)C_4 + G_2 G_3}{s^2 C_1 C_4 + s[C_4(G_2 + G_3) + C_1 G_3] + G_2 G_3} \\
T_{ca}(s) &= \frac{s \beta_1 C_1 G_3}{s^2 C_1 C_4 + s[C_4(G_2 + G_3) + C_1 G_3] + G_2 G_3}
\end{aligned} \tag{5.96}$$

El circuito resultante con los posibles elementos conectados a la entrada se muestra en la Fig. 5.9b.

Ejercicio

5.8.- Obtener la función de transferencia del biquad de la Fig. 5.9b así como el factor de calidad y la frecuencia de polo.

Solución detallada

Logicamente $T_{da}(s)$ será igual que en el caso A:

$$T_{da}(s) = \frac{\alpha}{K} \tag{5.97}$$

La función de transferencia es pues:

$$\begin{aligned}
 H(s) &= \frac{T_{da}(s) - T_{ca}(s)}{T_{cb}(s) - T_{db}(s)} = \\
 &= \frac{\frac{\alpha}{K} \frac{s\beta_1 C_1 G_3}{s^2 C_1 C_4 + s[C_4(G_2 + G_3) + C_1 G_3] + G_2 G_3}}{s^2 C_1 C_4 + s(G_2 + G_3)C_4 + G_2 G_3} - \frac{K-1}{K} \\
 &= \frac{\alpha s^2 C_1 C_4 + s\alpha[C_4(G_2 + G_3) + C_1 G_3] + \alpha G_2 G_3 - sK\beta_1 C_1 G_3}{[s^2 C_1 C_4 + s(G_2 + G_3)C_4 + G_2 G_3]K - (K-1)[s^2 C_1 C_4 + s[C_4(G_2 + G_3) + C_1 G_3] + G_2 G_3]} \quad (5.98) \\
 &= \alpha \frac{s^2 + s \left[\frac{G_2 + G_3}{C_1} + \frac{G_3}{C_4} \left(1 - \beta_1 \frac{K}{\alpha} \right) \right] + \omega_o^2}{s^2 + s \frac{[C_4(G_2 + G_3) + C_1 G_3(1-K)]}{C_1 C_4} + \omega_o^2}
 \end{aligned}$$

Veamos el término en s del denominador para obtener el valor de Q :

$$\frac{[C_4(G_2 + G_3) + C_1 G_3(1-K)]}{C_1 C_4} = \frac{\omega_o}{Q} = \sqrt{\frac{G_2 G_3}{C_1 C_4}} \frac{1}{Q} \quad (5.99)$$

De donde:

$$\begin{aligned}
 Q &= \frac{\sqrt{C_1 C_4 G_2 G_3}}{C_4(G_2 + G_3) + C_1 G_3(1-K)} = \\
 &= \frac{\sqrt{G_3/G_2} \sqrt{C_1/C_4}}{1 + \frac{G_3}{G_2} - (K-1) \frac{G_3 C_1}{G_2 C_4}} \quad (5.100)
 \end{aligned}$$

La función de transferencia es pues:

$$H(s) = \frac{V_o}{V_i} = \alpha \frac{s^2 + s \left[\frac{G_2 + G_3}{C_1} + \frac{G_3}{C_4} \left(1 - \beta_1 \frac{K}{\alpha} \right) \right] + \omega_o^2}{s^2 + s\omega_o/Q + \omega_o^2} \quad (5.101)$$

Ambos circuitos son equivalentes y pueden utilizarse para implementar una función de transferencia de segundo orden.

Veamos la forma concreta que debe tener la bipuerta pasiva LBT para implementar un filtro EPF. Para la bipuerta LBT de la Fig. 5.7(b):

$$T_{cg}(s) = \frac{N_{cg}(s)}{D(s)} = \frac{Y_1 Y_3 + Y_5(Y_1 + Y_2 + Y_3)}{(Y_1 + Y_2 + Y_3)(Y_4 + Y_5) + Y_3(Y_1 + Y_2)} \quad (5.102)$$

En ese caso se ha visto que la solución usual es que $T_{cg}(s)$ sea de la forma paso de banda, con únicamente coeficiente de s en el numerador.

Ejercicio

5.9.- Demostrar que para la minimización de las sensibilidades de la frecuencia de polo de un biquad EPF utilizando la bipuerta LBT de la Fig. 5.7b debe ser $Y_5 = 0$.

Debe ser $Y_5 = 0$, porque caso contrario sería imposible conseguir los coeficientes adecuados en el denominador.

Caso A

Consiste en hacer

$$\begin{aligned}
 Y_1 &= G_1 & Y_2 &= sC_2 & Y_3 &= sC_3 & Y_4 &= G_4 \\
 Y_5 &= 0
 \end{aligned} \quad (5.103)$$

El biquad EPF resultante para este caso con los posibles elementos conectados a la entrada se muestra en la Fig. 5.10(b)

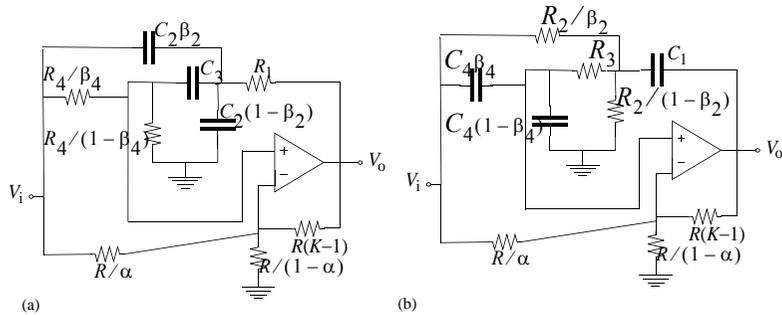


Figura 5.10: Circuitos EPF con bpuertas LBT para los dos casos estudiados.

Ejercicio

5.10.-Obtener la función de transferencia del biquad EPF de la Fig. 5.10(a), su frecuencia de polo y el factor de calidad.

Solución

La función de transferencia es:

$$H(s) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{T_{ca}(s) - T_{da}(s)}{T_{dg}(s) - T_{cg}(s)}$$

$$= -K \frac{s^2(\eta - \beta_2) + s \left[G_4 \left(\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right) (\eta - \beta_4) + \frac{G_1}{C_2} \eta \right] + \omega_o^2 (\eta - \beta_4)}{s^2 + s\omega_o/Q + \omega_o^2} \quad (5.104)$$

donde

$$\eta = \alpha \frac{K-1}{k} \quad (5.105)$$

$$\omega_o = \sqrt{\frac{G_1 G_4}{C_2 C_3}} \quad (5.106)$$

y

$$Q = \frac{\sqrt{G_4/G_1}}{\sqrt{C_3/C_2}} \quad (5.107)$$

$$\frac{G_4}{G_1} \left(1 + \frac{C_2}{C_3} \right) + 1 - K$$

Caso B

Consiste en hacer

$$Y_1 = sC_1 \quad Y_2 = G_2 \quad Y_3 = G_3 \quad Y_4 = sC_4$$

$$Y_5 = 0 \quad (5.108)$$

Ejercicio

5.11.-Obtener la función de transferencia del biquad EPF de la Fig. 5.10(a).

Solución

La función de transferencia es:

$$H(s) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{T_{ca}(s) - T_{da}(s)}{T_{dg}(s) - T_{cg}(s)}$$

$$= -K \frac{s^2(\eta - \beta_4) + s \left[\frac{G_2 + G_3}{C_1} (\eta - \beta_4) + \frac{G_3}{C_4} \eta \right] + \omega_o^2 (\eta - \beta_2)}{s^2 + s\omega_o/Q + \omega_o^2} \quad (5.109)$$

donde

$$\eta = \alpha \frac{K-1}{k} \quad (5.110)$$

$$\omega_o = \sqrt{\frac{G_2 G_3}{C_1 C_4}} \quad (5.111)$$

y

$$Q = \frac{\frac{\sqrt{G_2/G_3}}{\sqrt{C_1/C_4}}}{\frac{C_4}{C_1} \left(1 + \frac{G_2}{G_3}\right) + 1 - K} \quad (5.112)$$

Ejercicio

5.12.-Aplicar una entrada al circuito de la Fig. 5.11 de forma que se obtenga un filtro paso de alta con ganancia unidad a la frecuencia de polo. Diseñar el circuito de forma que se obtenga $Q=5$ y $\omega_o=6.28\text{Krad/s}$. Minimizar en lo posible las sensibilidades y el rango de valores de los elementos. Comparar los resultados con los obtenidos si se tratara de un circuito PF.

Suponer que el producto ganancia-ancho de banda del A.O. es $GB=1.5\text{MHz}$. Estimar las desviaciones en ω_o y Q causadas por el producto ganancia-ancho de banda finito. ¿Cuál sería la desviación para la configuración PF?

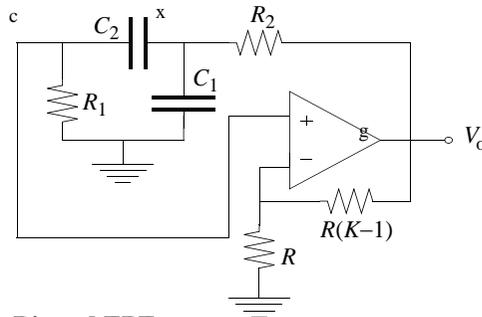


Figura 5.11: Biquad EPF.

Solución detallada

El denominador de cualquier función de filtrado que se obtenga mediante desconexión parcial de elementos estará contenido en:

$$D(s) = \frac{1}{K} - T_{cg}(s) + \frac{1}{A(s)} \quad (5.113)$$

Para obtener las posiciones de los polos consideramos el amplificador operacional ideal por lo que $\frac{1}{A(s)} = 0$.

Para el cálculo de $T_{cg}(s)$ analizamos la bipuerta pasiva RC aplicando análisis nodal:

$$\begin{aligned} G_2(V_x - V_g) + sC_2(V_x - V_c) + sC_1 V_x &= 0 \\ sC_2(V_c - V_x) + G_1 V_x &= 0 \end{aligned} \quad (5.114)$$

De la segunda ecuación en (5.114):

$$V_x = \frac{sC_2 + G_1}{sC_2} V_c \quad (5.115)$$

y sustituyendo en la primera ecuación en (5.114):

$$(G_2 + sC_2 + sC_1) \frac{sC_2 + G_1}{sC_2} V_c - sC_2 V_c = G_2 V_g \quad (5.116)$$

por lo que:

$$\begin{aligned} T_{cg}(s) = \frac{V_c}{V_g} &= \frac{sC_2 G_2}{s^2 C_1 C_2 + sC_2 G_2 + sC_1 G_1 + sC_2 G_1 + G_1 G_2} = \\ &= \frac{sG_2/C_1}{s^2 + s \left(\frac{G_1 + G_2}{C_1} + \frac{G_1}{C_2} \right) + \frac{G_1 G_2}{C_1 C_2}} \end{aligned} \quad (5.117)$$

$T_{cg}(s)$ tiene únicamente término en s en el numerador por lo que cumple las

condiciones de minimización de la sensibilidad para estructuras EPF. Es decir, la sensibilidad de la frecuencia de polo ω_o respecto a la ganancia a baja frecuencia del operacional A_o es nula y las sensibilidades pasivas son las mínimas posibles. Los polos de la función de filtrado vendrán dados por:

$$0 = \frac{1}{K} - T_{cg}(s) = \frac{1}{K} - \frac{sG_2/C_1}{s^2 + s\left(\frac{G_1+G_2}{C_1} + \frac{G_1}{C_2}\right) + \frac{G_1G_2}{C_1C_2}} \quad (5.118)$$

de donde:

$$s^2 + s\left(\frac{G_1+G_2}{C_1} + \frac{G_1}{C_2}\right) + \frac{G_1G_2}{C_1C_2} - sK\frac{G_2}{C_1} = 0 \quad (5.119)$$

Introducimos las variables:

$$c = \frac{C_1}{C_2} \quad g = \frac{G_2}{G_1} \quad (5.120)$$

cuya dispersión respecto a la unidad refleja los rangos de valores de los elementos. (5.119) queda entonces:

$$s^2 + s\left(\frac{1+g}{c} + \frac{G_1}{C_2} - K\frac{g}{c}\right) + \frac{g}{c}\left(\frac{G_1}{C_2}\right)^2 = 0 \quad (5.121)$$

Identificando el término independiente con el de $s^2 + s\frac{\omega_o}{Q} + \omega_o^2$ se obtiene:

$$\omega_o^2 = \omega_1^2 = \frac{g}{c}\left(\frac{G_1}{C_2}\right)^2 \quad (5.122)$$

e identificando el término en s:

$$\frac{\omega_o}{Q} = \frac{\sqrt{g}G_1}{\sqrt{c}C_2} = \frac{G_1}{C_2c}(1+g+c-Kg) \quad (5.123)$$

de donde el factor de calidad:

$$Q = \frac{\sqrt{gc}}{1+c+g(1-K)} \quad (5.124)$$

Como se esperaba las sensibilidades de la frecuencia de polo respecto a los elementos pasivos son las mínimas teóricas. Aún hay tres parámetros, c, g, y K, que deben proporcionar el valor requerido de Q en (5.124). Utilizaremos los restantes grados de libertad para minimizar las sensibilidades pasivas de Q y el producto ganancia-sensibilidad.

Las sensibilidades pasivas de Q son:

$$\begin{aligned} S_{G_1}^Q &= S_g^Q S_{G_1}^g \\ S_{G_2}^Q &= S_g^Q S_{G_2}^g \\ S_{C_1}^Q &= S_c^Q S_{C_1}^c \\ S_{C_2}^Q &= S_c^Q S_{C_2}^c \end{aligned} \quad (5.125)$$

Calculamos cada una de estas sensibilidades:

$$\begin{aligned} S_{G_1}^g &= \frac{G_1}{g} \left(-\frac{G_2}{G_1^2} \right) = -1 & S_{G_2}^g &= \frac{G_2}{g} \left(\frac{1}{G_1} \right) = 1 \\ S_{C_1}^c &= \frac{C_1}{c} \left(\frac{1}{C_2} \right) = 1 & S_{C_2}^c &= \frac{C_2}{c} \left(-\frac{C_1}{C_2^2} \right) = 1 \end{aligned} \quad (5.126)$$

y

$$\begin{aligned}
S_g^Q &= \frac{g}{Q} \frac{[1+c+g(1-K)]\frac{\sqrt{c}}{2\sqrt{g}} - (1-K)\sqrt{cg}}{[1+c+g(1-K)]^2} = \\
&= \frac{g}{Q} \frac{[1+c-g(1-K)]\frac{1}{2}\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{g}}}{[1+c+g(1-K)]^2} \quad (5.127) \\
S_c^Q &= \frac{c}{Q} \frac{[1+c+g(1-K)]\frac{1}{2}\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{c}} - \sqrt{cg}}{[1+c+g(1-K)]^2}
\end{aligned}$$

Pero según (5.124), c , g , y K no son independientes por lo que para expresar la sensibilidad en función de parámetros independientes despejamos K de (5.124):

$$K = \frac{1+c+g}{g} - \sqrt{\frac{c}{g}} \frac{1}{Q} \quad (5.128)$$

y sustituimos en (5.127):

$$\begin{aligned}
S_g^Q &= \frac{Q}{c} \frac{1}{2\sqrt{g}} \left[1+c - \frac{\sqrt{cg}}{Q} + 1+c \right] = Q \sqrt{\frac{c}{g}} \frac{1+c}{c} - \frac{1}{2} = S_{G_2}^Q = -S_{G_1}^Q \\
S_c^Q &= \frac{c}{Q} \frac{Q^2}{cg} [1-c+g(1-K)] \frac{1}{2} \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{c}} = \quad (5.129) \\
&= \frac{Q}{2\sqrt{cg}} \left[1-c + \frac{\sqrt{cg}}{Q} - 1-c \right] = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{c}{g}} Q = S_{C_1}^Q = -S_{C_2}^Q
\end{aligned}$$

Con respecto al producto ganancia-sensibilidad en principio habría que analizar el circuito considerando un modelo de amplificador operacional en que la ganancia apareciera de forma explícita pero podemos evitar dicho análisis en base al siguiente razonamiento. El producto ganancia-sensibilidad es:

$$\Gamma_{A_o}^Q = A_o S_{A_o}^Q \quad (5.130)$$

Pero en (5.65) se introdujo el parámetro:

$$k_1 = \frac{1}{K} + \frac{1}{A_o} \quad (5.131)$$

de tal forma que la dependencia del factor de calidad Q respecto a la ganancia del operacional es a través de este parámetro por lo que se puede escribir:

$$\Gamma_{A_o}^Q = A_o S_{A_o}^Q = A_o S_{k_1}^Q S_{A_o}^{k_1} = A_o \frac{A_o}{k_1} \left(-\frac{1}{A_o} \right) S_{k_1}^Q = -\frac{1}{k_1} S_{k_1}^Q \quad (5.132)$$

Por otra parte podemos definir un producto ganancia sensibilidad:

$$\Gamma_K^Q = K S_K^Q \quad (5.133)$$

Como la dependencia respecto de K es también únicamente a través de (5.131):

$$\Gamma_K^Q = K S_K^Q = K S_{k_1}^Q S_K^{k_1} = K \frac{K}{k_1} \left(-\frac{1}{K} \right) S_{k_1}^Q = -\frac{1}{k_1} S_{k_1}^Q \quad (5.134)$$

Por lo tanto,

$$\Gamma_{A_o}^Q = \Gamma_K^Q \quad (5.135)$$

y puede utilizarse el conocimiento de la dependencia de Q respecto de K para calcular $\Gamma_{A_o}^Q$. Por tanto,

$$\Gamma_{A_o}^Q = \Gamma_K^Q = \frac{K^2}{Q} \frac{g\sqrt{cg}}{[1+c+g(1-K)]^2} \quad (5.136)$$

y sustituyendo el valor de K en (5.128):

$$\Gamma_{A_o}^Q = \frac{K^2}{Q} g \frac{Q^2}{\sqrt{cg}} = Q \sqrt{\frac{c}{g}} \left(\frac{1+c+g}{g} - \sqrt{\frac{c}{g}} \frac{1}{Q} \right)^2 \quad (5.137)$$

Es interesante ver para qué valor de los parámetros se produce el mínimo de esta función, veremos en qué punto se anula la derivada. Para facilitar el cálculo de la derivada es razonable despreciar $\sqrt{\frac{c}{g}} \frac{1}{Q}$ frente a $\frac{1+c+g}{g}$. En este caso:

$$\Gamma_{A_o}^Q \approx Q \sqrt{\frac{g}{c}} \left(1 + \frac{1+c}{g}\right)^2 \quad (5.138)$$

Calculamos la derivada de $\Gamma_{A_o}^Q$ respecto a g e igualamos a cero:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma_{A_o}^Q}{\partial g} &= 2Q \sqrt{\frac{g}{c}} \left(1 + \frac{1+c}{g}\right) \left(-\frac{1+c}{g^2}\right) + \frac{1}{\sqrt{g/c}} Q \left(1 + \frac{1+c}{g}\right)^2 = \\ &= \left(1 + \frac{1+c}{g}\right) Q \left[-2 \sqrt{\frac{g}{c}} \frac{1+c}{g^2} + \frac{1}{2c \sqrt{g/c}} \left(1 + \frac{1+c}{g}\right)\right] = 0 \end{aligned} \quad (5.139)$$

La única solución posible es:

$$\frac{-2(1+c)}{\sqrt{c}} + \frac{g}{2\sqrt{c}} + \frac{1+c}{2\sqrt{c}} = 0 \quad (5.140)$$

por lo que:

$$g = 3(1+c) \quad (5.141)$$

Para este valor de g las sensibilidades del factor de calidad quedan:

$$\begin{aligned} \Gamma_{A_o}^Q &\approx \frac{16}{3\sqrt{3}} Q \sqrt{\frac{1+c}{c}} \\ S_{C_1}^Q &= -S_{C_2}^Q = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{c}{1+c}} \frac{Q}{\sqrt{3}} \\ S_{G_1}^Q &= -S_{G_2}^Q = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1+c}{c}} \frac{Q}{\sqrt{3}} \end{aligned} \quad (5.142)$$

Nótese que las sensibilidades pasivas y el producto ganancia sensibilidad son proporcionales al factor de calidad Q . El valor de c influye de manera inversa en distintas sensibilidades por lo que teniendo en cuenta un compromiso entre dichas sensibilidades y la minimización del rango de valores de elementos una buena elección es $c = 1$. Con esta elección $g = 6$, que es un valor razonable para el rango de valores de resistencias. Las sensibilidades quedan:

$$\Gamma_{A_o}^Q = 21 \quad |S_{C_i}^Q| = 1.5 \quad |S_{G_i}^Q| = 3.6 \quad (5.143)$$

El valor de K resulta:

$$K = 1 + \frac{1+c}{g} - \sqrt{\frac{c}{g}} \frac{1}{Q} = 1.2517 \quad (5.144)$$

que es un valor realizable. Resistencias y condensadores aún aparecen relacionados por la ecuación (5.122). Dado un valor adecuado de las capacidades, por ejemplo 5nF para realización discreta resulta:

$$R_1 = \frac{\sqrt{g}}{\omega_o C_2} = 78K\Omega \quad (5.145)$$

y de (5.120):

$$R_2 = \frac{R_1}{g} = 13K\Omega \quad (5.146)$$

Puede ser interesante comprobar cual ha sido la desviación como consecuencia de realizar la aproximación en (5.138). La derivada sin hacer la aproximación:

$$\frac{\partial \Gamma_{A_o}^Q}{\partial g} = 2Q \sqrt{\frac{g}{c}} \left(1 + \frac{1+c}{g} - \sqrt{\frac{c}{gQ}} \right) \left(-\frac{1+c}{g^2} + \frac{1}{2Q} \sqrt{\frac{c}{gg}} \right) + \frac{1}{\sqrt{g/c}} Q \left(1 + \frac{1+c}{g} - \sqrt{\frac{c}{gQ}} \right)^2 = 0 \quad (5.147)$$

De donde simplificando la ecuación se obtiene:

$$1 - 3\frac{1+c}{g} + \sqrt{\frac{c}{gQ}} = 0 \quad (5.148)$$

Esto se puede transformar en una ecuación de segundo grado que proporciona la solución:

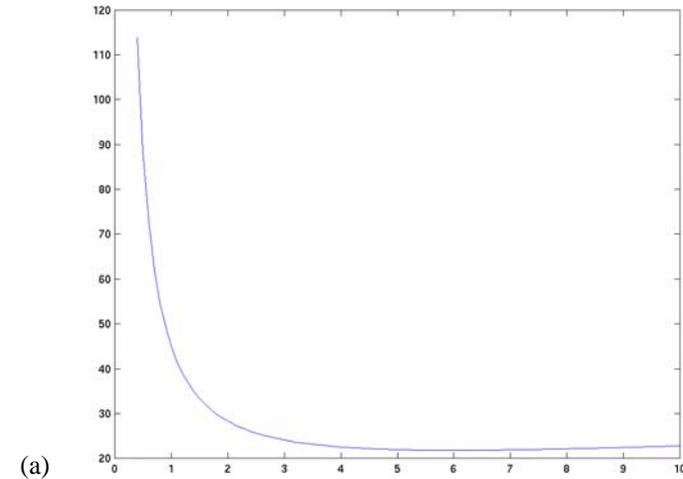
$$g = \frac{1}{\left(\frac{\frac{1}{Q} \sqrt{c} \pm \sqrt{12(1+c)} \left(1 + \frac{c}{24Q^2(1+c)} \right)}{6(1+c)} \right)^2} \quad (5.149)$$

Para $c = 1$ resultan las soluciones $g = 5.66$ y $g = 6.51$. De estas dos soluciones sólo la primera es válida. Esta solución es más precisa pero es importante hacer notar que en este caso no es posible hacer de forma útil una sustitución similar a la de (5.142), que proporcionaba información acerca de los compromisos entre sensibilidades.

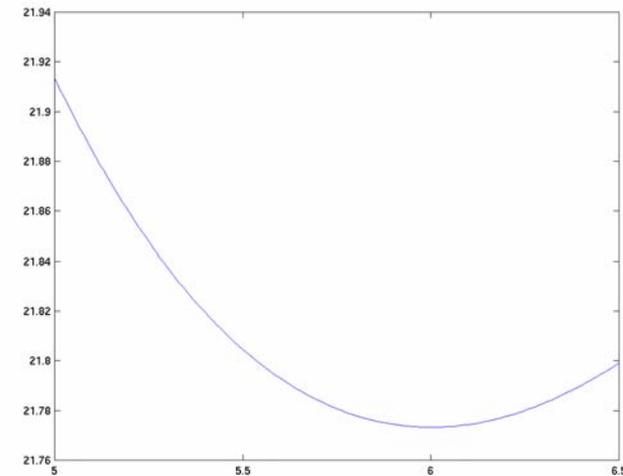
Las representaciones gráficas de la Fig. 5.12 y Fig. 5.13 ilustran aún más la evolución de la sensibilidad y el error cometido en la aproximación.

Para crear los ceros de transmisión es preciso hacer desconexión parcial de elementos conectados a tierra. El circuito correspondiente a la Fig. 5.11 con las posibles desconexiones parciales se muestra en la Fig. 5.14.

Para poder obtener la función de transferencia del biquad de la Fig. 5.14, y en particular, los ceros de transmisión hay que obtener la funciones

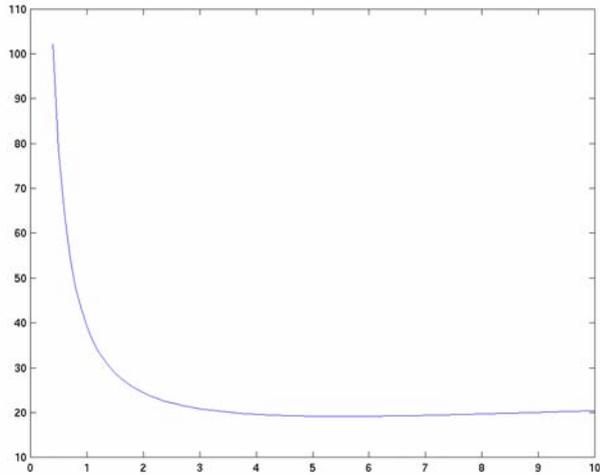


(a)

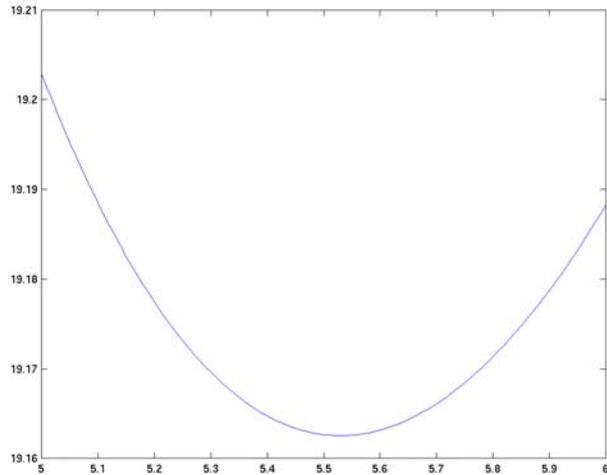


(b)

Figura 5.12:(a) Representación gráfica del producto ganancia-sensibilidad simplificado en (5.138) para $c=1$; (b) zoom en la región del mínimo de la función.



(a)



(b)

Figura 5.13:(a) Representación gráfica del producto ganancia-sensibilidad en (5.137) para $c=1$; (b) zoom en la región del mínimo de la función.

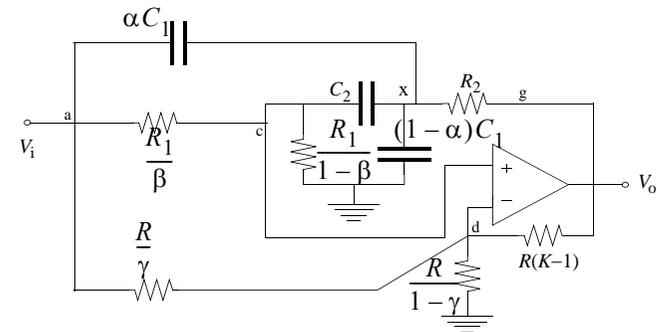


Figura 5.14: Biquad EPF con desconexión parcial de elementos. de transferencia de la red pasiva $T_{ca}(s)$ y $T_{da}(s)$. Para obtener $T_{da}(s)$ aplicamos análisis nodal en el nudo d:

$$(1-\gamma)GV_d + \frac{G}{K-1}V_d + \gamma G(V_d - V_a) = 0 \tag{5.150}$$

de donde:

$$T_{da}(s) = \left. \frac{V_d}{V_a} \right|_{V_g=0} = \frac{\gamma(K-1)}{K} \tag{5.151}$$

Para obtener $T_{ca}(s)$ aplicamos análisis nodal en los nudos c y g:

$$\begin{aligned} \beta G_1(V_c - V_a) + (1-\beta)G_1V_c + sC_2(V_c - V_x) &= 0 \\ s\alpha C_1(V_x - V_a) + s(1-\alpha)C_1V_x + G_2V_x + sC_2(V_x - V_c) &= 0 \end{aligned} \tag{5.152}$$

De la primera ecuación:

$$V_x = \frac{sC_2 + G_1}{sC_2}V_c - \frac{\beta G_1}{sC_2}V_a \tag{5.153}$$

y sustituyendo en la segunda ecuación de (5.152):

$$s\alpha C_1 V_a + sC_2 V_c = (sC_1 + sC_2 + G_2) \left[\frac{sC_2 + G_1}{sC_2} V_c - \frac{\beta G_1}{sC_2} V_a \right] \quad (5.154)$$

$$\begin{aligned} [s^2 \alpha C_1 C_2 + \beta G_1 (sC_1 + sC_2 + G_2)] V_a &= \\ &= [G_1 (sC_1 + sC_2 + G_2) + sC_2 (sC_1 + G_2)] V_c \end{aligned}$$

por lo que:

$$T_{ca}(s) = \left. \frac{V_c}{V_a} \right|_{V_g=0} = \frac{s^2 \alpha + s\beta G_1 \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) + \frac{\beta G_1 G_2}{C_1 C_2}}{s^2 + s \left(\frac{G_1 + G_2}{C_1} + \frac{G_1}{C_2} \right) + \frac{G_1 G_2}{C_1 C_2}} \quad (5.155)$$

Por tanto, la función de transferencia:

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{T_{ca}(s) - T_{da}(s)}{\frac{1}{K} - T_{cg}(s)} = \\ &= \frac{s^2 \alpha + s\beta G_1 \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) + \frac{\beta G_1 G_2}{C_1 C_2} - \frac{\gamma(K-1)}{K}}{s^2 + s \left(\frac{G_1 + G_2}{C_1} + \frac{G_1}{C_2} \right) + \frac{G_1 G_2}{C_1 C_2}} = \\ &= \frac{\frac{1}{K} - \frac{sG_2/C_1}{s^2 + s \left(\frac{G_1 + G_2}{C_1} + \frac{G_1}{C_2} \right) + \frac{G_1 G_2}{C_1 C_2}}}{\frac{1}{K} - \frac{sG_2/C_1}{s^2 + s \left(\frac{G_1 + G_2}{C_1} + \frac{G_1}{C_2} \right) + \frac{G_1 G_2}{C_1 C_2}}} \quad (5.156) \end{aligned}$$

$$\frac{s^2 \left[\alpha - \frac{\gamma(K-1)}{K} \right] + s \left[\beta G_1 \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) - \frac{\gamma(K-1)}{K} \left(\frac{G_1 + G_2}{C_1} + \frac{G_1}{C_2} \right) \right] + \frac{\beta G_1 G_2}{C_1 C_2} - \frac{\gamma(K-1)}{K} \frac{G_1 G_2}{C_1 C_2}}{\frac{1}{K} \left[s^2 + s \left(\frac{G_1 + G_2}{C_1} + \frac{G_1}{C_2} \right) + \frac{G_1 G_2}{C_1 C_2} \right] - sG_2/C_1}$$

Para tener una función paso de alta interese que el término independiente del numerador se anule:

$$\beta = \frac{\gamma(K-1)}{K} \quad (5.157)$$

Con esta solución para que se anule el coeficiente de s en el numerador debe ser $\gamma = 0$ y por tanto $\beta = 0$.

Por tanto,

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{\alpha s^2}{\frac{1}{K} \left[s^2 + s \left(\frac{G_1 + G_2}{C_1} + \frac{G_1}{C_2} \right) + \frac{G_1 G_2}{C_1 C_2} \right] - sG_2/C_1} = \\ &= \frac{\alpha K s^2}{s^2 + s \left(\frac{G_1 + G_2}{C_1} + \frac{G_1}{C_2} - K \frac{G_2}{C_1} \right) + \frac{G_1 G_2}{C_1 C_2}} \quad (5.158) \end{aligned}$$

A la frecuencia de polo $s = j\omega_o$ la magnitud de la función de transferencia:

$$|H(j\omega_o)| = \left| \frac{-\alpha K \omega_o^2}{-\omega_o^2 + j\omega_o \frac{\omega_o}{Q} + \omega_o^2} \right| = \alpha K Q \quad (5.159)$$

Se desea que la ganancia a esa frecuencia sea la unidad por lo que:

$$\alpha = \frac{1}{KQ} = 0.16 \quad (5.160)$$

con lo que queda concluido el diseño. Para comparar con el diseño de una estructura PF, se pueden reutilizar los desarrollos sin más que hacer $K = 1$.

De (5.124) el factor de calidad es:

$$Q = \sqrt{\frac{g}{c} \frac{c}{1+c}} \quad (5.161)$$

De (5.137) el producto ganancia sensibilidad es:

$$\Gamma_{A_o}^Q = Q \sqrt{\frac{g}{c}} \quad (5.162)$$

En este caso, c y g no son independientes sino que están relacionadas por (5.161), por lo que:

$$\Gamma_{A_o}^Q = \frac{1+c}{c} Q^2 \quad (5.163)$$

Nótese que en este caso el producto ganancia sensibilidad es proporcional al cuadrado del factor de calidad lo que hace esta estructura desventajosa en este aspecto frente a la EPF, especialmente si Q es grande.

Las sensibilidades pasivas son:

$$s_{G_2}^Q = -s_{G_1}^Q = Q \sqrt{\frac{c}{g}} \frac{1+c}{c} - \frac{1}{2} \quad (5.164)$$

$$s_{C_1}^Q = -s_{C_2}^Q = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{c}{g}} Q$$

De nuevo, c y g están relacionadas por (5.161), por lo que:

$$s_{G_2}^Q = -s_{G_1}^Q = \frac{c}{1+c} - \frac{1}{2} \quad (5.165)$$

$$s_{C_1}^Q = -s_{C_2}^Q = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

Las dos son buenas puesto que la primera vale como mucho $\pm \frac{1}{2}$.

El rango de valores de las resistencias puede obtenerse de (5.161):

$$g = \frac{(1+c)^2}{c} Q^2 \quad (5.166)$$

por lo que también resulta proporcional al cuadrado del factor de calidad, siendo peor por tanto al caso EPF para filtros de alta Q .

En cuanto a las desviaciones de ω_o y Q debido al producto ganancia ancho de banda finito vienen dadas aproximadamente por (5.81):

$$\frac{\Delta \omega_o}{\omega_o} \cong -\frac{\Delta Q}{Q} \cong -\frac{1}{2Q} \Gamma_{A_o}^Q \frac{1}{|A(j\omega_o)|} \quad (5.167)$$

Utilizando un modelo de un polo para el amplificador operacional:

$$|A(j\omega_o)| = \frac{GB}{\omega_o} \quad (5.168)$$

resultan las desviaciones para el caso EPF:

$$\frac{\Delta \omega_o}{\omega_o} \cong -\frac{\Delta Q}{Q} \cong -\frac{1}{2 \cdot 5} 21.8 \frac{6.28 \cdot 10^3}{2\pi \cdot 1.5 \cdot 10^6} = -0.144\% \quad (5.169)$$

Para el caso PF, con la misma elección de c que en el caso EPF, $c = 1$, resulta:

$$\Gamma_{A_o}^Q = Q \frac{2(1+c)}{c} = 50 \quad (5.170)$$

por lo que las desviaciones:

$$\frac{\Delta \omega_o}{\omega_o} \cong -\frac{\Delta Q}{Q} \cong -\frac{1}{2 \cdot 5} 50 \frac{6.28 \cdot 10^3}{2\pi \cdot 1.5 \cdot 10^6} = -0.33\% \quad (5.171)$$

produciéndose en esta estructura mayores desviaciones debido al GB finito.

Ejercicio

5.13.-Diseñar un filtro rechazo de banda simétrico con $Q=5$ y $f_o=1000\text{Hz}$ utilizando el circuito ENF de la Fig. 5.15. Utilizar los parámetros de diseño para minimizar el producto ganancia-sensibilidad.

¿Es posible realizar un filtro paso de baja con el mismo circuito? ¿Y un

filtro paso de banda?

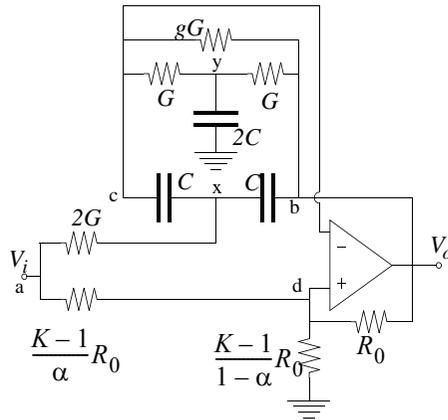


Figura 5.15:

Solución detallada

Se trata de un biquad activo monoamplificador ENF en el que la desconexión parcial o total de elementos está dada de antemano. Como puede observarse la relación entre valores de elementos pasivos ya está establecida en muchos casos y únicamente en el caso de una resistencia aparece el parámetro g como relación con los valores de otras resistencias.

La función de transferencia del biquad viene dada por:

$$H(s) = \frac{T_{da}(s) - T_{ca}(s)}{T_{cb}(s) - T_{db}(s) + \frac{1}{A(s)}} \quad (5.172)$$

Para obtener las posiciones de los polos consideramos el amplificador operacional ideal por lo que $\frac{1}{A(s)} = 0$.

Para el cálculo de $T_{cb}(s)$ analizamos la bipuerta pasiva RC aplicando análisis nodal:

$$\begin{aligned} 2sCV_y + G(V_y - V_c) + G(V_y - V_b) &= 0 \\ 2GV_x + sC(V_x - V_c) + sC(V_x - V_b) &= 0 \\ sC(V_c - V_x) + G(V_c - V_y) + gG(V_c - V_b) &= 0 \end{aligned} \quad (5.173)$$

De la primera ecuación en (5.173):

$$V_y = \frac{GV_c + GV_b}{2G + 2sC} \quad (5.174)$$

y de la segunda ecuación en (5.173):

$$V_x = \frac{sCV_c + sCV_b}{2G + 2sC} \quad (5.175)$$

y sustituyendo en la tercera ecuación en (5.173):

$$[sC + G(1 + g)]V_c = gGV_b + sC \frac{sCV_c + sCV_b}{2G + 2sC} + G \frac{GV_c + GV_b}{2G + 2sC} \quad (5.176)$$

por lo que:

$$\begin{aligned} T_{cb}(s) = \frac{V_c}{V_b} \Big|_{V_a=0} &= \frac{s^2C^2 + 2sCgG + G^2(1 + 2g)}{s^2C^2 + 2sCG(2 + g) + G^2(1 + 2g)} = \\ &= \frac{s^2 + 2sg\frac{G}{C} + \frac{G^2}{C^2}(1 + 2g)}{s^2 + 2s\frac{G}{C}(2 + g) + \frac{G^2}{C^2}(1 + 2g)} \end{aligned} \quad (5.177)$$

Como puede observarse $T_{cb}(s)$ cumple la condición (5.51) para minimización de sensibilidad de estructuras ENF:

$$a_0 = a_2\omega_1^2 \quad (5.178)$$

Es decir, la sensibilidad de la frecuencia de polo ω_o respecto a la ganancia

a baja frecuencia del operacional A_o es nula y las sensibilidades pasivas son las mínimas posibles.

Con respecto a $T_{db}(s)$ por el divisor de tensiones se obtiene:

$$T_{db}(s) = \frac{V_d}{V_b} \Big|_{V_a=0} = \frac{K-1}{K} \quad (5.179)$$

Los polos de la función de filtrado vendrán dados por:

$$0 = T_{cb}(s) - T_{db}(s) = \frac{s^2 + 2sg\frac{G}{C} + \frac{G^2}{C^2}(1+2g)}{s^2 + 2s\frac{G}{C}(2+g) + \frac{G^2}{C^2}(1+2g)} - \frac{K-1}{K} \quad (5.180)$$

de donde:

$$s^2 + s\left[2(2+g)\frac{G}{C} - 4K\frac{G}{C}\right] + \frac{G^2}{C^2}(1+2g) = 0 \quad (5.181)$$

Identificando el término independiente con el de $s^2 + s\frac{\omega_o}{Q} + \omega_o^2$ se obtiene:

$$\omega_o = \frac{G}{C}\sqrt{1+2g} \quad (5.182)$$

e identificando el término en s:

$$\frac{\omega_o}{Q} = \frac{G}{C}\sqrt{1+2g}\frac{1}{Q} = 2(2+g)\frac{G}{C} - 4K\frac{G}{C} \quad (5.183)$$

de donde el factor de calidad:

$$Q = \frac{\sqrt{1+2g}}{2(2+g) - 4K} \quad (5.184)$$

Hay dos parámetros, g y K, que deben proporcionar el valor requerido de Q en (5.184). Utilizaremos el restante grado de libertad para minimizar, tal

como se pide, el producto ganancia-sensibilidad. Utilizando un razonamiento completamente análogo al realizado entre las ecuaciones (5.130)-(5.135) para estructuras EPF se obtiene que para estructuras ENF también se puede utilizar la propiedad:

$$\Gamma_{A_o}^Q = \Gamma_K^Q \quad (5.185)$$

Por tanto, el producto ganancia-sensibilidad:

$$\Gamma_{A_o}^Q = \Gamma_K^Q = K S_K^Q = K \frac{K}{Q} \frac{4\sqrt{1+2g}}{[2(2+g) - 4K]^2} = \frac{4K^2 Q}{\sqrt{1+2g}} \quad (5.186)$$

Hay que obtener el mínimo de esta función teniendo en cuenta que K y g no son independientes sino que están relacionados por la ecuación (5.184), de donde:

$$K = 1 + \frac{g}{2} - \frac{\sqrt{1+2g}}{4Q} \quad (5.187)$$

Iguamos a 0 la derivada de Γ_K^Q respecto a g. Para hacer la derivada podemos optar entre sustituir (5.187) en (5.186) o bien hacer la derivada de (5.186) teniendo en cuenta que Γ_K^Q depende de g no únicamente de forma directa sino a través de K. Optamos por esta segunda opción:

$$\frac{d\Gamma_{A_o}^Q}{dg} = 0 = -\frac{4K^2 Q}{(1+2g)^{3/2}} + \frac{8KQ}{\sqrt{1+2g}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4Q\sqrt{1+2g}} \right) \quad (5.188)$$

Simplificando se obtiene:

$$-K + 1 + 2g - \frac{\sqrt{1+2g}}{2Q} = 0 \quad (5.189)$$

Como hemos visto K y g no son independientes por lo que sustituyendo (5.187):

$$-\left(1 + \frac{g}{2} - \frac{\sqrt{1+2g}}{4Q}\right) + 1 + 2g - \frac{\sqrt{1+2g}}{2Q} = 0 \quad (5.190)$$

de donde:

$$6gQ = \sqrt{1+2g} \quad (5.191)$$

Elevando al cuadrado:

$$36g^2Q^2 - 2g - 1 = 0 \quad (5.192)$$

Las soluciones de esta ecuación son:

$$g = \frac{1}{36Q^2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{36Q^2}\right)^2 + \frac{1}{36Q^2}} \approx \frac{1}{6Q}\left(\frac{1}{6Q} \pm 1\right) \quad (5.193)$$

La solución con el signo $-$ es obviamente falsa puesto que carecen de sentido valores negativos de g .

Sin embargo, si la solución obtenida para g , que minimiza el producto ganancia-sensibilidad, se sustituye en (5.187) se obtiene un valor de K inferior a la unidad, solución que carece de sentido físico. Por lo tanto, la solución que proporciona el mínimo producto ganancia-sensibilidad no es realizable. La condición de realizabilidad sobre valores de g puede obtenerse imponiendo en (5.187) que K debe ser mayor o igual a la unidad:

$$K = 1 + \frac{g}{2} - \frac{\sqrt{1+2g}}{4Q} \geq 1 \quad (5.194)$$

Por tanto:

$$\frac{g}{2} \geq \frac{\sqrt{1+2g}}{4Q} \quad (5.195)$$

Elevando al cuadrado:

$$4g^2Q^2 - 2g - 1 \geq 0 \quad (5.196)$$

Resolviendo la ecuación y escogiendo únicamente la solución con sentido físico:

$$g \geq \frac{1}{4Q^2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4Q^2}\right)^2 + \frac{1}{4Q^2}} \approx \frac{1}{2Q}\left(\frac{1}{2Q} + 1\right) \quad (5.197)$$

Puede observarse que el mínimo valor realizable para g es superior al obtenido para minimizar el producto ganancia sensibilidad. Como no existe ningún otro máximo o mínimo el producto ganancia-sensibilidad debe crecer de forma monotónica entre dichos valores de g por lo que el mínimo producto ganancia-sensibilidad realizable se obtendrá para:

$$g = \frac{1}{4Q^2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4Q^2}\right)^2 + \frac{1}{4Q^2}} \approx \frac{1}{2Q}\left(\frac{1}{2Q} + 1\right) = \frac{21}{400} \quad (5.198)$$

y $K = 1$.

Es interesante observar cuál es la sensibilidad pasiva resultante para Q . Para $K = 1$:

$$Q = \frac{\sqrt{1+2g}}{2g} \quad (5.199)$$

y la sensibilidad respecto de g es:

$$S_g^Q = \frac{g}{Q} \left[\frac{1}{2g} \frac{1}{\sqrt{1+2g}} - \frac{\sqrt{1+2g}}{2g^2} \right] = \frac{-1-g}{1+2g} \quad (5.200)$$

Para el valor obtenido de g el valor de la sensibilidad es bastante pequeño. En realidad, puede observarse que S_g^Q en (5.200) varía muy suavemente entre -1 y $-1/2$ por lo que cualquier valor de g es aceptable en cuanto a esta sensibilidad.

Finalmente, G y C están relacionados por la ecuación (5.182), sin tener ninguna restricción adicional por lo que utilizando un valor típico de C se obtiene:

$$G = \frac{\omega_o C}{\sqrt{1+2g}} \quad (5.201)$$

Para calcular la función de filtrado es necesario calcular aún $T_{ca}(s)$ y $T_{da}(s)$ sobre las correspondientes redes pasivas. La segunda:

$$T_{da}(s) = \left. \frac{V_d}{V_a} \right|_{V_b=0} \quad (5.202)$$

Dicha función puede obtenerse mediante el divisor de tensiones entre $\frac{K-1}{\alpha}R_o$ y las resistencias en paralelo:

$$R_o \parallel \left(\frac{K-1}{1-\alpha}R_o \right) = \frac{1}{\frac{1}{R_o} + \frac{1-\alpha}{(K-1)R_o}} = \frac{K-1}{K-\alpha}R_o \quad (5.203)$$

resultando:

$$T_{da}(s) = \left. \frac{V_d}{V_a} \right|_{V_b=0} = \frac{\frac{K-1}{K-\alpha}R_o}{\frac{K-1}{K-\alpha}R_o + \frac{K-1}{\alpha}R_o} = \frac{\alpha}{K} \quad (5.204)$$

Respecto a $T_{ca}(s)$:

$$T_{ca}(s) = \left. \frac{V_c}{V_a} \right|_{V_b=0} \quad (5.205)$$

Aplicamos análisis nodal en la red pasiva correspondiente:

$$\begin{aligned} 2sCV_y + G(V_y - V_c) + GV_y &= 0 \\ 2G(V_x - V_a) + sC(V_x - V_c) + sCV_x &= 0 \\ sC(V_c - V_x) + G(V_c - V_y) + gGV_c &= 0 \end{aligned} \quad (5.206)$$

De la primera ecuación en (5.206):

$$V_y = \frac{GV_c}{2G+2sC} \quad (5.207)$$

y de la segunda ecuación en (5.206):

$$V_x = \frac{sCV_c + 2GV_a}{2G+2sC} \quad (5.208)$$

y sustituyendo en la tercera ecuación en (5.206):

$$[sC + G(1+g)]V_c = sC \frac{sCV_c + 2GV_a}{2G+2sC} + G \frac{GV_c}{2G+2sC} \quad (5.209)$$

por lo que:

$$T_{ca}(s) = \left. \frac{V_c}{V_a} \right|_{V_b=0} = \frac{2s \frac{G}{C}}{s^2 + 2s \frac{G}{C}(2+g) + \frac{G^2}{C^2}(1+2g)} \quad (5.210)$$

Por tanto, la función de transferencia:

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{T_{da}(s) - T_{ca}(s)}{T_{cb}(s) - T_{db}(s)} = \frac{\frac{\alpha}{K} - \frac{2s \frac{G}{C}}{s^2 + 2s \frac{G}{C}(2+g) + \frac{G^2}{C^2}(1+2g)}}{\frac{s^2 + 2s \frac{G}{C}(2+g) + \frac{G^2}{C^2}(1+2g)}{s^2 + 2s \frac{G}{C}(2+g) + \frac{G^2}{C^2}(1+2g)} - \frac{K-1}{K}} \\ &= \alpha \frac{s^2 + 2s \frac{G}{C} \left[2 + g - \frac{K}{\alpha} \right] + \frac{G^2}{C^2}(1+2g)}{s^2 + s \left[2(2+g) \frac{G}{C} - 4K \frac{G}{C} \right] + \frac{G^2}{C^2}(1+2g)} \end{aligned} \quad (K.211)$$

Para que sea rechazo de banda se tiene que verificar que:

$$\alpha = \frac{K}{2 + g} \tag{5.212}$$

En el caso $K = 1$ resulta la estructura NF. Sin embargo, no interesa prescindir de la flexibilidad que proporciona α por lo que sin alterar los polos inyectamos señal tal como indica la Fig. 5.16:

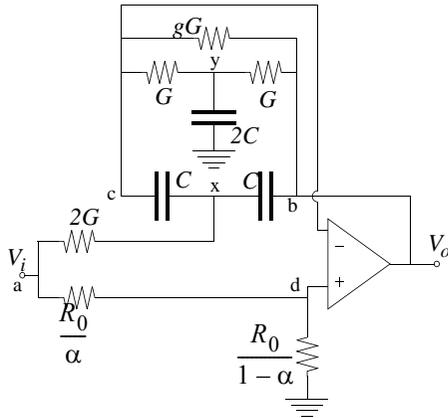


Figura 5.16:

En cuanto que para este circuito:

$$T_{da}(s) = \left. \frac{V_d}{V_a} \right|_{V_b=0} = \alpha \tag{5.213}$$

todo el desarrollo anterior es válido sin más que hacer $K = 1$, y la condición para que sea rechazo de banda es:

$$\alpha = \frac{1}{2 + g} \tag{5.214}$$

Para que fuera paso de baja tendría que ser $\alpha = 0$ pero en este caso también se anularía el término independiente luego no puede conseguirse función de filtrado paso de baja.

Para que fuera paso de banda tiene que cumplirse $\alpha = 0$.

Ejercicio

5.14.-Utilizar el circuito ENF de la Fig. 5.17 para diseñar un filtro rechazo de banda simétrico con $f_o=1.2\text{kHz}$ y factor de calidad $Q=6$. La ganancia en dc es la unidad. Minimizar en lo posible el producto ganancia-sensibilidad y los rangos de valores de los elementos.

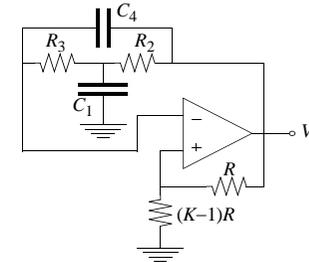


Figura 5.17:

Ejercicio

5.15.-Diseñar un filtro Butterworth paso de baja de segundo orden utilizando la configuración EPF con el objetivo de minimizar el producto ganancia-sensibilidad. La frecuencia $f_o=2.9\text{KHz}$. La ganancia en dc puede escogerse arbitrariamente. Utilizar una estructura LBT para la red pasiva.

Solución detallada

Nos apoyamos en todo el desarrollo de la Sección 5.3.1 para utilizar una de las bipuertas LBT posibles para estructuras EPF, la de la Fig. 5.10b, que se muestra también en la Fig. 5.18.

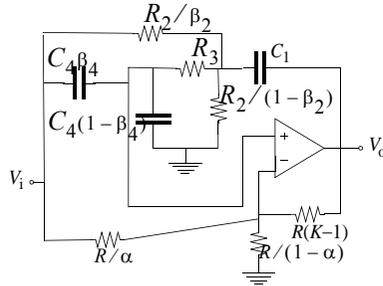


Figura 5.18:Una posible solución.

Su función de transferencia se ha obtenido en (5.109):

$$H(s) = -K \frac{s^2(\eta - \beta_4) + s \left[\frac{G_2 + G_3}{C_1}(\eta - \beta_4) + \frac{G_3}{C_4}\eta \right] + \omega_o^2(\eta - \beta_2)}{s^2 + s\omega_o/Q + \omega_o^2} \quad (5.215)$$

con:

$$\eta = \alpha \frac{K-1}{k} \quad (5.216)$$

de donde:

$$\omega_o = \sqrt{\frac{G_2 G_3}{C_1 C_4}} \quad (5.217)$$

y

$$Q = \frac{\sqrt{G_2/G_3}}{\sqrt{C_1/C_4}} \frac{C_4 \left(1 + \frac{G_2}{G_3} \right) + 1 - K}{1 - K} \quad (5.218)$$

Tiene que verificarse que:

$$\omega_o = \sqrt{\frac{G_2 G_3}{C_1 C_4}} = 2\pi 2900 \text{ rad/s} \quad (5.219)$$

y al tratarse de un filtro Butterworth de segundo orden:

$$Q = \frac{\sqrt{G_2/G_3}}{\sqrt{C_1/C_4}} = \frac{1}{2 \cos \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (5.220)$$

Introducimos las variables:

$$\frac{G_2}{G_3} = g \quad \frac{C_1}{C_4} = c \quad (5.221)$$

Entonces:

$$\omega_o = \sqrt{\frac{g G_3}{c C_4}} \quad Q = \frac{\sqrt{g}}{1 + g + 1 - K} \quad (5.222)$$

El exceso de grados de libertad debe utilizarse en minimizar el producto ganancia-sensibilidad. Dicho producto ganancia-sensibilidad:

$$\Gamma_{A_o}^Q = \Gamma_K^Q = KS_K^Q = K \frac{K}{Q} \frac{\sqrt{g}}{(1+g+1-K)^2} = \frac{K^2 Q}{\sqrt{g}} \quad (5.223)$$

K, g, y c no son independientes sino que están relacionados a través de (5.222), de donde:

$$K = 1 + \frac{1+g}{c} - \frac{\sqrt{g}}{Q} \quad (5.224)$$

y sustituyendo (5.224) en (5.223):

$$\Gamma_{A_o}^Q = \frac{Q}{\sqrt{g}} \left(1 + \frac{1+g}{c} - \frac{\sqrt{g}}{Q} \right)^2 \quad (5.225)$$

A diferencia de (5.137) en esta ocasión no es aconsejable despreciar el tercer sumando puesto que Q es pequeño. Calculamos la derivada (5.225) respecto a g manteniendo c constante e igualamos a cero:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma_{A_o}^Q}{\partial g} = 0 = \\ = -\frac{Q}{2g\sqrt{g}} \left(1 + \frac{1+g}{c} - \frac{\sqrt{g}}{Q} \right)^2 + 2 \frac{Q}{\sqrt{g}} \left(1 + \frac{1+g}{c} - \frac{\sqrt{g}}{Q} \right) \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{2Q\sqrt{cg}} \right) \end{aligned} \quad (5.226)$$

Simplificando se obtiene la ecuación:

$$\frac{3g}{2c} - \frac{\sqrt{g}}{2Q\sqrt{c}} - \frac{1+g}{2c} = 0 \quad (5.227)$$

Las soluciones de esta ecuación son:

$$g = \left(\frac{\frac{1}{2Q\sqrt{c}} \pm \sqrt{\frac{1}{4cQ^2} + \frac{3(1+c)}{c^2}}}{\frac{3}{c}} \right)^2 \quad (5.228)$$

Como tenemos exceso de grados de libertad para reducir rango de valores de los elementos tomamos $c = 1$. Para esta elección, (5.228) tiene dos soluciones: $g = 1.18$ y $g = 0.38$. Sin embargo, solo la primera de estas soluciones es válida, debido a que la segunda de las soluciones de (5.228) carece de sentido.

Entonces,

$$K = 1 + \frac{1+g}{c} - \frac{\sqrt{g}}{Q} = 1.64 \quad (5.229)$$

que es un valor válido.

Escogiendo un valor típico de condensador para realización discreta:

$C_1 = C_4 = C = 5nF$ resulta:

$$R_3 = \frac{\sqrt{g}}{C\omega_o} = 11.92K\Omega \quad (5.230)$$

y

$$R_2 = \frac{R_3}{g} = 10.11K\Omega \quad (5.231)$$

Finalmente, para que (5.215) sea una función paso de baja:

$$\alpha = \eta = \beta_4 = 0 \quad (5.232)$$

y resulta:

$$H(s) = \frac{K\omega_o^2\beta_2}{s^2 + s\omega_o/Q + \omega_o^2} \quad (5.233)$$

La ganancia a bajas frecuencias puede escogerse libremente. Si dicha ganancia se escoge igual a K , puede hacerse $\beta_2 = 1$ con lo que se ahorra un elemento del biquad.

La resistencia R puede escogerse libremente. Lo lógico es escoger un valor no muy diferente de las otras resistencias del circuito.

Ejercicio

5.16.-Diseñar el circuito ENF de la Fig. 5.19 de forma que realice una función rechazo de banda simétrica con $Q=8$. La ganancia en dc debe ser lo más próxima posible a la unidad. La frecuencia de los ceros de transmisión del filtro es $f_z=800\text{Hz}$. Minimizar las sensibilidades y los rangos de valores de los elementos, dando mayor prioridad a la minimización de las sensibilidades activas.

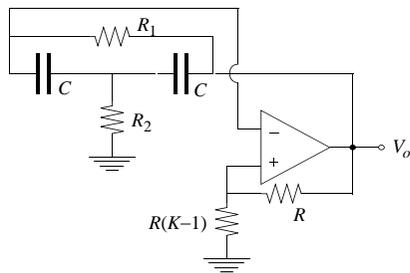


Figura 5.19:

Ejercicio

5.17.-Diseñar el circuito de la Fig. 5.20 de forma que realice una función paso de banda con $f_o=7.5\text{KHz}$ y $Q=12.3$. La ganancia de la zona intermedia ($|H(j\omega_o)|=25$). Usar los grados de libertad para minimizar la sensibilidad.

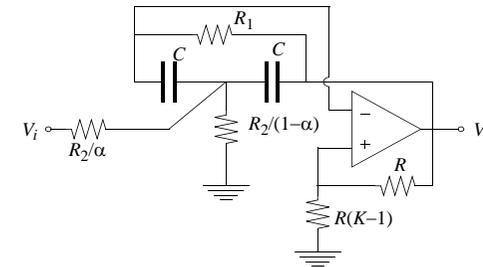


Figura 5.20:

5.4 Biquads multiamplificador

Como su propio nombre indica se trata de circuitos con más de un A.O. El hecho de utilizar más amplificadores debe estar justificado con otras mejoras, por ejemplo las sensibilidades. $S_x^{\omega_o}$ debe tener su mínimo teórico, debe ser también insensible a variaciones en la ganancia del A.O. Un producto ganancia-sensibilidad del orden de Q es de lo mejor que se puede conseguir por lo que las mejoras deben dirigirse a disminuir las sensibilidades pasivas de Q . Una segunda motivación para utilizar más amplificadores es construir distintas funciones de transferencia con la misma estructura de circuito, proporcionando las diferentes funciones de transferencia en los distintos nudos del mismo. Algunos biquads también facilitan el ajuste de parámetros.

5.4.1 Biquads basados en GICs

Consideremos un filtro pasivo de segundo orden, el que se muestra en la Fig. 5.21.

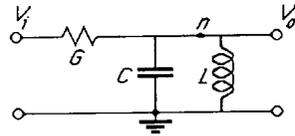


Figura 5.21: Filtro pasivo LC de segundo orden.

La función de transferencia realizada es:

$$\begin{aligned}
 H(s) &= \frac{V_o}{V_i} = \frac{1}{\frac{sC + 1/sL}{\frac{1}{sC + 1/sL} + \frac{1}{G}}} \\
 &= \frac{sLG}{s^2LC + sGL + 1} = \frac{sG/C}{s^2 + sG/C + 1/LC}
 \end{aligned}
 \tag{5.234}$$

La técnica se basa en sustituir el inductor por un GIC, uno de los mostrados en la Fig. 19. El problema es que debe tomarse la salida del filtro del nodo del inductor que no corresponde a la salida de ningún amplificador operacional. La solución consiste en utilizar un GIC de tipo I. El circuito ya conectado se muestra en la Fig. 5.22.

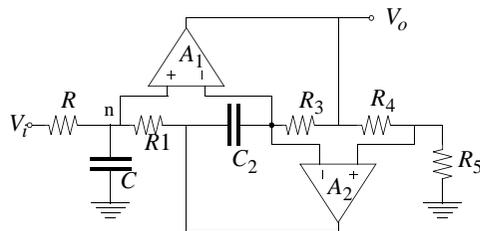


Figura 5.22: Biquad GIC paso de banda.

En este GIC la tensión de salida del A.O. A₁ es proporcional a la tensión del inductor:

$$V_o = V_n \left(1 + \frac{G_5}{G_4} \right)
 \tag{5.235}$$

Utilizando el modelo ideal de A.O. la admitancia de entrada es:

$$Y_{in} = \frac{Y_1 Y_3 Y_5}{Y_2 Y_4} = \frac{G_1 G_3 G_5}{s C_2 G_4}
 \tag{5.236}$$

luego el valor del inductor simulado es

$$L = \frac{C_2 G_4}{G_1 G_3 G_5}
 \tag{5.237}$$

Sustituyendo este valor en (5.234) se obtiene la función de transferencia:

$$H(s) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{s \frac{G}{C} \left(1 + \frac{G_5}{G_4} \right)}{s^2 + s \frac{G}{C} + \frac{G_1 G_3 G_5}{C C_2 G_4}}
 \tag{5.238}$$

Luego la frecuencia de polo y el factor de calidad son:

$$\omega_o^2 = \frac{G_1 G_3 G_5}{C C_2 G_4} \quad Q = \frac{1}{G} \sqrt{\frac{C}{C_2}} \sqrt{\frac{G_1 G_3 G_5}{G_4}}
 \tag{5.239}$$

Las sensibilidades pasivas son:

$$\left| S_x^{\omega_o} \right| = \frac{1}{2} \quad \left| S_x^Q \right| = \frac{1}{2} \quad S_R^Q = 1
 \tag{5.240}$$

Se ha conseguido con este circuito unas sensibilidades pasivas muy reducidas.

Para estudiar la influencia de los amplificadores operacionales consideraremos un modelo no ideal de los amplificadores en el GIC de tipo I de la Fig. 5.23.

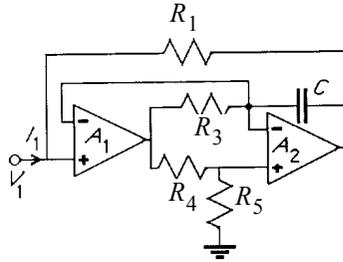


Figura 5.23: GIC de tipo I.

En el tema anterior ya se obtuvo que, considerando iguales los productos ganancia-ancho de banda de los amplificadores operacionales, para minimizar las pérdidas:

$$\frac{G_5}{G_4} = 1 \quad (5.241)$$

y para minimizar el error del inductor:

$$\frac{\omega_o C_2}{G_3} = 1 \quad (5.242)$$

donde para la frecuencia de interés se ha escogido la frecuencia de corte del biquad.

Por conveniencia escogemos las resistencias iguales:

$$\begin{aligned} R_1 &= R_3 = R_4 = R_5 = R_o \\ C_2 &= \frac{1}{\omega_o R_o} \\ G &= \frac{1}{R} = \frac{\omega_o C_2}{Q} = \frac{1}{R_o Q} \end{aligned} \quad (5.243)$$

En general el producto ganancia-ancho de banda de los dos A.O. no será igual por lo que es necesario realizar algún ajuste de R_4 y R_5 .

Ejercicio

5.18.-La Fig. 5.22 muestra un biquad basado en un GIC. Si se tiene en cuenta un modelo de un polo para los A.O. ($A(s) = GB/s$) la admitancia del GIC no es solamente inductiva sino que también tiene pérdidas. Dichas pérdidas pueden evitarse haciendo $R_4 = R_5$ con lo cual la ganancia en la zona intermedia ($H(j\omega_o)$) debe ser 2. Demostrar que se pueden conseguir ganancias menores que 2 en esa zona conectando parcialmente la resistencia R a tierra.

Ejercicio

5.19.-La Fig. 5.22 muestra un biquad basado en un GIC. Demostrar que si la ganancia en la zona intermedia ($H(j\omega_o)$) debe ser mayor que 2 se produce una cierta desviación del valor nominal así como unas pérdidas en el inductor simulado por el GIC. Calcular dicha desviación y las pérdidas. Demostrar que como consecuencia puedes producirse graves desviaciones del factor de calidad del biquad. Proponer un sistema de compensación pasiva que permita paliar dicho problema.

Ejercicio

5.20.-(a) Utilizando los resultados del Ejercicio 7.19 diseñar un biquad paso de banda basado en GIC con frecuencia central $f_o = 12.5$ KHz, factor de calidad $Q = 16$ y ganancia a la frecuencia central igual a 18dB. Los amplificadores operacionales de que se disponen tienen un producto ganancia-ancho de banda de 1.5MHz.

(b) Comparar los valores de frecuencia central y factor de calidad obtenidos con compensación pasiva con los que se obtendría si no existiera

dicha compensación.

(c) Utilizar un mecanismo de predistorsión para obtener una frecuencia central del filtro más cercana a la especificada.

Ejercicio

5.21.-Aplicar la técnica de desconexión parcial de elementos al biquad de la Fig. 5.22 para obtener otras funciones de filtrado. Estudiar qué tipo de funciones de filtrado se pueden obtener.

Ejercicio

5.22.-Considerar la estructura de un GIC genérico. El terminal libre de este GIC se conecta a un elemento pasivo de dos terminales de impedancia Z_o el cual se halla conectado a tierra por su otro terminal. Estudiar cómo la estructura de la Fig. 5.24 conectada a los terminales de entrada no inversores de los amplificadores operacionales del GIC pueden proporcionar biquads RC-activos de segundo orden LP, BP, HP y BR con factor de calidad finito. La salida de los biquads debe tomarse en nudos de baja impedancia. Z_A y Z_B son impedancias constituidas por un único elemento pasivo. Considerar modelos ideales de los amplificadores operacionales.

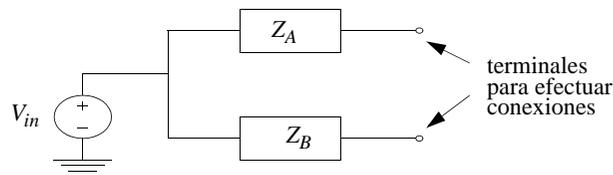


Figura 5.24:

5.4.2 Biquads con integradores

Una de las principales ventajas de estos biquads es la versatilidad, al posibilitar la obtención de funciones de transferencia de distintos tipos simultáneamente en las diferentes salidas de los amplificadores operacionales. Están basados en el uso de integradores y amplificadores sumadores.

Consideremos una función de transferencia de segundo orden:

$$H(s) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{N(s)}{s^2 + s\frac{\omega_o}{Q} + \omega_o^2} \tag{5.244}$$

Esta ecuación la podemos reordenar, dividir por s^2 y escribirla de la forma:

$$V_o = -\frac{\omega_o/Q}{s} V_o - \frac{\omega_o^2}{s^2} V_o + \frac{N(s)}{s^2} V_i \tag{5.245}$$

Consideremos $N(s)=H_o s^2$. Entonces (5.245) puede representarse mediante el diagrama de bloques de la Fig. 5.25.

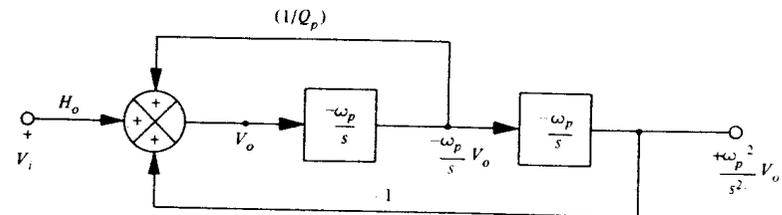


Figura 5.25: Diagrama de bloques del biquad.

Puede observarse que este diagrama de bloques tiene dos lazos de realimentación, uno de ellos controla ω_o mientras que el otro controla el factor de calidad Q . Por tanto, estos parámetros pueden controlarse independientemente lo que constituye otra ventaja adicional sobre los biquads con un solo amplificador operacional.

5.4.2.1 Biquad KHN

Una gran cantidad de biquads de este tipo se derivan del biquad KHN, que se muestra en la Fig. 5.26. También se denomina filtro de variables de estado porque se deriva de la representación en variables de estado de la función de transferencia de segundo orden.

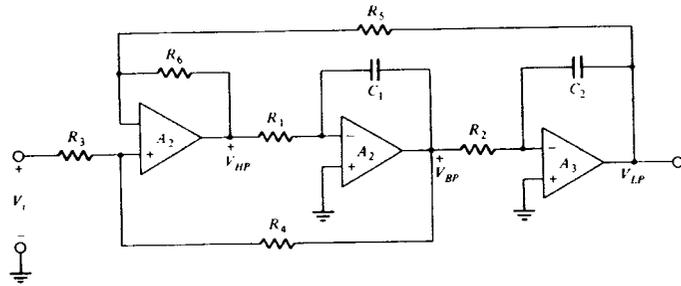


Figura 5.26: El biquad KHN.

Suponiendo que los amplificadores operacionales son ideales se obtienen las siguientes funciones de transferencia:

$$V_{BP} = -\frac{V_{HP}}{R_1 C_1 s} \quad (5.246)$$

$$V_{LP} = -\frac{V_{BP}}{R_2 C_2 s} = \frac{V_{HP}}{s^2 R_1 C_1 R_2 C_2}$$

y aplicando al primer amplificador:

$$\frac{V_i - V_x}{R_3} + \frac{V_{BP} - V_x}{R_4} = 0 \quad (5.247)$$

$$\frac{V_{HP} - V_x}{R_6} + \frac{V_{LP} - V_x}{R_5} = 0$$

De (5.247) se obtiene:

$$V_i \frac{R_4}{R_3 + R_4} + V_{BP} \frac{R_3}{R_3 + R_4} = V_{HP} \frac{R_5}{R_5 + R_6} + V_{LP} \frac{R_6}{R_5 + R_6} \quad (5.248)$$

y sustituyendo (5.246) en (5.248):

$$\frac{V_{HP}}{V_i} = \frac{\frac{R_4}{R_3 + R_4}}{\frac{R_3}{R_3 + R_4} \frac{1}{R_1 C_1 s} + \frac{R_5}{R_5 + R_6} + \frac{R_6}{R_5 + R_6} \frac{1}{s^2 R_1 C_1 R_2 C_2}} = \quad (5.249)$$

$$= \frac{s^2 \left(1 + \frac{R_6}{R_5}\right) / \left(1 + \frac{R_3}{R_4}\right)}{s^2 + s \frac{\left(1 + \frac{R_6}{R_5}\right) / \left(1 + \frac{R_4}{R_3}\right)}{R_1 C_1} + \frac{R_6 / R_5}{R_1 R_2 C_1 C_2}}$$

y ω_o y Q se pueden extraer del denominador:

$$\omega_o^2 = \frac{R_6 / R_5}{R_1 R_2 C_1 C_2} \quad Q = \frac{\left(1 + \frac{R_4}{R_3}\right) \sqrt{R_6 R_1 C_1}}{\left(1 + \frac{R_6}{R_5}\right) \sqrt{R_5 R_2 C_2}} \quad (5.250)$$

Las sensibilidades de ω_o y Q son:

$$\begin{aligned}
 S_{R_1, R_2, R_5, C_1, C_2}^{\omega_o} &= -0.5 = -S_{R_6}^{\omega_o} \\
 S_{R_1, C_1}^Q &= -S_{R_2, C_2}^Q = 0.5 \\
 S_{R_4}^Q &= -S_{R_3}^Q = \frac{R_4}{R_4 + R_3} < 1 \\
 S_{R_5}^Q &= -S_{R_6}^Q = -\frac{Q}{2} \frac{R_5 - R_6}{1 + \frac{R_4}{R_3}} \frac{\sqrt{R_2 C_2}}{\sqrt{R_5 R_6 R_1 C_1}}
 \end{aligned}
 \tag{5.251}$$

Aunque Q puede ser grande la sensibilidad puede hacerse nula haciendo $R_5 = R_6$. Las bajas sensibilidades constituyen una de las mejores cualidades de este biquad.

Un procedimiento de diseño simple consiste en hacer:

$$\begin{aligned}
 R_5 &= R_6 \\
 R_1 &= R_2 = R \\
 C_1 &= C_2 = C \\
 R &= \frac{1}{\omega_o C}
 \end{aligned}
 \tag{5.252}$$

Entonces de la ecuación del factor de calidad se obtiene:

$$2Q = 1 + \frac{R_4}{R_3}
 \tag{5.253}$$

luego

$$R_4 = R_3(2Q - 1)
 \tag{5.254}$$

y entonces la ganancia para filtros paso de baja y paso de alta está limitada a:

$$H_o = 2 - \frac{1}{Q}
 \tag{5.255}$$

y para filtros paso de banda:

$$H_o = 1 - 2Q
 \tag{5.256}$$

Los valores de ω_o y Q se controlan independientemente ajustando R_1 y/o R_2 para ω_o y R_4 para Q .

Únicamente se han considerado sensibilidades pasivas y no se han estudiado variaciones debido al producto ganancia - ancho de banda finito de los operacionales. Este puede llegar a ser un problema grave puesto que puede conducir a un aumento desmesurado del factor de calidad llegando a hacerse inestable. Se pueden minimizar las sensibilidades activas de los polos mediante el parámetro R_6/R_5 .

5.4.2.2 Biquad Tow-Thomas

Otro biquad muy utilizado es el biquad Tow-Thomas que se muestra en la Fig. 5.27, en el que se puede observar cómo se realiza la suma en nudo de tierra virtual.

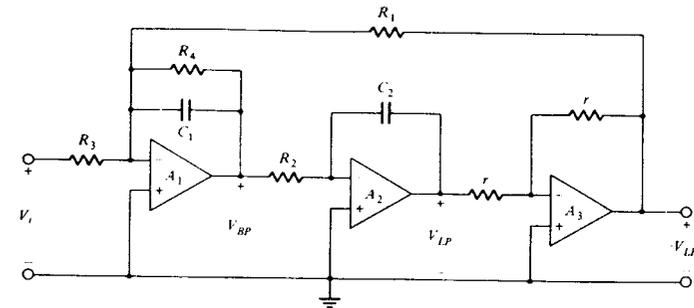


Figura 5.27: Biquad Tow-Thomas

Como se indica en la figura este biquad proporciona funciones de transferencia paso de baja y paso de banda. Una modificación de este biquad también es capaz de proporcionar paso de alta.

Una ventaja de este circuito es que al igual que en el KHN ω_o y Q se controlan independientemente pero en este caso Q y H_o se controlan medi-

ante relaciones simples de resistencias en lugar de conjuntos de ellas. Otra ventaja es que todos los terminales no inversores de los amplificadores están a tierra por lo que se evitan problemas con el modo común.

Ejercicio

5.23.-Obtener las funciones de filtrado del biquad de la Fig. 5.27.

Solución

Considerando amplificadores ideales se obtienen funciones paso de baja y paso de banda:

$$\frac{V_{BP}}{V_i} = \frac{-s/(R_3 C_1)}{s^2 + \frac{s}{R_4 C_1} + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}} \quad (5.257)$$

$$\frac{V_{LP}}{V_i} = \frac{1/(R_2 R_3 C_1 C_2)}{s^2 + \frac{s}{R_4 C_1} + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}}$$

Las sensibilidades de ω_o y Q respecto a los elementos pasivos salen 0.5 o 1. Un posible procedimiento de diseño es hacer:

$$\begin{aligned} R_1 &= R_2 = R \\ C_1 &= C_2 = C \\ R &= \frac{1}{\omega_o C} \\ R_4 &= QR \end{aligned} \quad (5.258)$$

Respecto a R_3 :

$$\begin{aligned} R_3 &= \frac{R}{H_o} && \text{para paso de baja} \\ R_3 &= \frac{Q}{H_o} R && \text{para paso de banda} \end{aligned} \quad (5.259)$$

Cuando se tienen en cuenta los productos ganancia ancho de banda de los amplificadores se obtienen unas desviaciones de ω_o y Q:

$$\begin{aligned} \omega'_o &\approx \omega_o \left[1 - \frac{\omega_o}{GB} \left(1 + \frac{H_o}{2Q} \right) \right] \\ Q' &\approx \frac{Q}{1 - 4Q \frac{\omega_o}{GB}} \end{aligned} \quad (5.260)$$

Ejercicio

5.24.-Demostrar (5.260).

Puede observarse en (5.260) que mientras que las desviaciones en la frecuencia de polo son muy reducidas las desviaciones en el factor de calidad pueden ser muy importantes pudiendo hacerse inestable el filtro para $\omega_o Q > \frac{GB}{4}$.

Una posible solución es hacer una predistorsión de los valores de forma que al final obtenga los valores correctos.

Otra posibilidad consiste en conectar un condensador de compensación entre C_1 y C_2 de forma similar a como se hace en los esquemas de compensación pasiva de los integradores Miller.

Antes de conectar el condensador el retraso de fase es:

$$\Delta\phi_1 = -\text{atan} \frac{1}{|A_1|} \quad \Delta\phi_2 = -\text{atan} \frac{1}{|A_2|} \quad (5.261)$$

para los integradores y

$$\Delta\phi_3 = -2 \operatorname{atan} \frac{1}{|A_3|} \quad (5.262)$$

para el amplificador por lo que el retraso de fase neto es:

$$\Delta\phi = -4 \operatorname{atan} \frac{\omega}{GB} \quad (5.263)$$

El condensador introduce un adelanto de fase igual a $\omega C_c R_2$ por lo que se puede escoger C_c para compensar el retraso de fase.

Una posibilidad mejor es realizar una transformación del biquad Tow-Thomas de forma que el bucle de dos integradores esté constituido por un integrador con retraso de fase y otro con adelanto de fase de forma que los retrasos de fase se cancelen entre sí en primera aproximación. El biquad resultante es el biquad Ackerberg-Mossberg de la Fig. 5.28

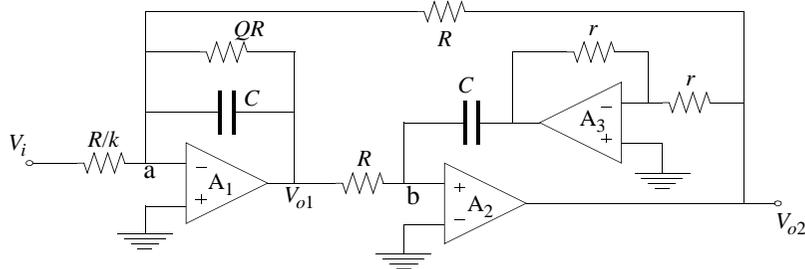


Figura 5.28: Biquad Ackerberg-Mossberg.

5.4.2.3 Generación de otras funciones de filtrado en biquads con integradores

Los biquads KHN implementan funciones LP, BP y HP mientras que el Tow-Thomas sólo LP y BP. Para obtener ceros de transmisión finitos es necesario utilizar técnicas de suma o bien técnicas de inyección de señal.

La técnica de suma se ilustra en la Fig. 5.29 para el biquad KHN.

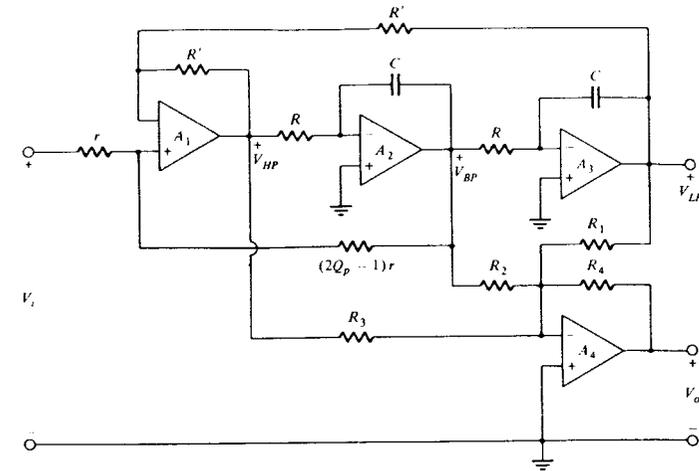


Figura 5.29: Realización de ceros de transmisión arbitrarios con el biquad KHN.

Ejercicio

5.25.-Obtener la función de transferencia del biquad de la Fig. 5.29 tomando la salida en el nudo V_o y discutir los tipos de funciones de filtrado adicionales que se pueden obtener en dicho nudo.

Solución

Suponiendo amplificadores operacionales ideales se obtiene que la función de transferencia es:

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{R_4 2Q - 1}{R_3 Q} \frac{s^2 - \left(\frac{R_3}{R_2}\right) \omega_o s + \frac{R_3}{R_1} \omega_o^2}{s^2 + s \frac{\omega_o}{Q} + \omega_o^2} \quad (5.264)$$

Se pueden conseguir filtros rechazo de banda (tanto high-pass notch como low-pass notch) mediante:

$$\begin{aligned}
 R_2 &= \infty \\
 R_3 &= \frac{R_4 \left(2 - \frac{1}{Q}\right)}{H_0} \\
 R_1 &= R_3 \frac{\omega_o^2}{\omega_z^2}
 \end{aligned}
 \tag{5.265}$$

y R_4 puede ser escogido arbitrariamente.

También se pueden hacer sin dificultades filtros pasa todo de la forma:

$$\frac{V_o}{V_i} = -H_0 \frac{s^2 - \frac{\omega_o}{Q}s + \omega_o^2}{s^2 + \frac{\omega_o}{Q}s + \omega_o^2}
 \tag{5.266}$$

sin más que hacer:

$$\begin{aligned}
 R_1 &= R_3 \\
 R_2 &= QR_3 \\
 R_4 &= H_0 R_3 \frac{Q}{2Q-1}
 \end{aligned}
 \tag{5.267}$$

y R_3 puede ser escogido arbitrariamente.

Para el biquad Tow-Thomas se suele utilizar la técnica de inyección de señal, consistente en desconectar parcialmente elementos conectados a tierra o inyectar señal nudos de tierra virtual. Para el biquad Tow-Thomas resulta el circuito de la Fig. 5.30.

Esta técnica no requiere otro amplificador pero requiere el condensador C_3 .

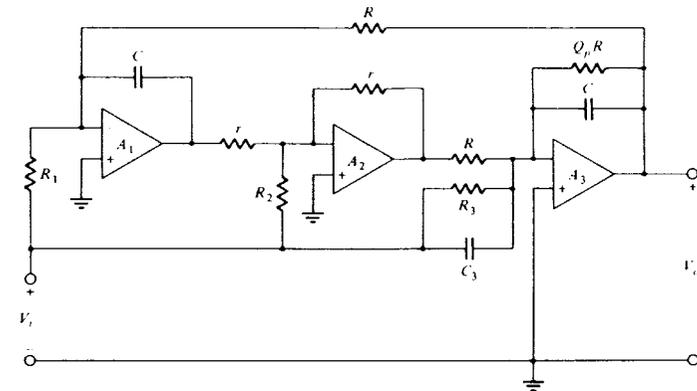


Figura 5.30: Realización de ceros de transmisión arbitrarios usando el biquad Tow-Thomas.

Ejercicio

5.26.-Obtener la función de transferencia del biquad de la Fig. 5.30 y discutir los tipos de funciones de filtrado que se pueden obtener.

Solución

La función de transferencia implementada es:

$$\frac{V_o}{V_i} = -\frac{C_3}{C} \frac{s^2 + s \left[1 - \frac{rR_3}{RR_2}\right] / (R_3 C_3) + \frac{(RC)\omega_o^2}{R_1 C_3}}{s^2 + \frac{\omega_o}{Q}s + \omega_o^2}
 \tag{5.268}$$

con $\omega_o = \frac{1}{RC}$.

A continuación se discuten las funciones de transferencia que se pueden conseguir¹. Se puede conseguir función de transferencia paso de baja con ganancia a bajas frecuencias H_o para:

$$R_2 = R_3 = \infty \quad C_3 = 0 \quad \frac{R_1}{R} = \frac{1}{H_o} \quad (5.269)$$

Se consigue función paso de banda inversora con ganancia en la frecuencia central H_o para:

$$R_1 = \infty \quad C_3 = 0 \quad R_2 = \infty \quad \frac{R}{R_3} = \frac{H_o}{Q} \quad (5.270)$$

y no inversora para:

$$R_1 = \infty \quad C_3 = 0 \quad R_3 = \infty \quad \frac{r}{R_2} = \frac{H_o}{Q} \quad (5.271)$$

Se consigue un filtro paso de alta inversor con ganancia H_o a altas frecuencias para:

$$R_1 = R_2 = R_3 = \infty \quad H_o = C_3/C \quad (5.272)$$

Se consigue filtro rechazo de banda, tanto simétrico como "low-pass notch" y "high-pass notch" con ganancia a altas frecuencias H_o para:

$$R_2 = R_3 = \infty \quad R_1 = R \frac{\omega_o^2}{\omega_z^2} \quad H_o = C_3/C \quad (5.273)$$

Se consigue filtro pasa todo para:

$$R_3 = \infty \quad \underline{R_1 = R} \quad R_2 = Qr \quad (5.274)$$

1. No se pretende ser exhaustivo con todas las soluciones matemáticamente posibles sino formular soluciones que al mismo tiempo sean económicas en términos de número de elementos usados.

Ejercicio

5.27.-La Fig. 5.28 muestra el biquad Ackerberg-Mossberg.

- Estudiar las funciones de filtrado de segundo orden que se pueden obtener con dicho biquad.
- Una técnica posible para obtener otros tipos de funciones de filtrado consiste en inyectar señal en puntos de tierra virtual. Discutir los tipos de funciones de transferencia (y bajo qué condiciones) que se pueden obtener al inyectar señal al amplificador A_1 a través de un condensador de valor αC , al amplificador A_2 a través de una resistencia de valor R/γ , y al amplificador A_3 a través de una resistencia de valor R/β . Dichas inyecciones de señal no implican eliminar la excitación que ya existe en el biquad de la figura.

Solución detallada

Aplicamos análisis nodal en los nudos a y b:

$$\begin{aligned} kGV_i + sCV_{o1} + \frac{G}{Q}V_{o1} + GV_{o2} &= 0 \\ GV_{o1} - sCV_{o2} &= 0 \end{aligned} \quad (5.275)$$

De la segunda ecuación:

$$V_{o2} = \frac{G}{sC}V_{o1} \quad (5.276)$$

y sustituyendo (5.276) en la primera ecuación de (5.275):

$$kGV_i + \left(sC + \frac{G}{Q} + \frac{G^2}{sC} \right) V_{o1} = 0 \quad (5.277)$$

por lo que en el nudo de tensión V_{o1} tenemos:

$$\frac{V_{o1}}{V_i} = -\frac{kG}{sC + \frac{G}{Q} + \frac{G^2}{sC}} = -\frac{\frac{kG}{C}s}{s^2 + s\frac{G}{QC} + \frac{G^2}{C^2}} \quad (5.278)$$

y sustituyendo en (5.276):

$$\frac{V_{o2}}{V_i} = -\frac{\frac{kG^2}{C^2}}{s^2 + s\frac{G}{QC} + \frac{G^2}{C^2}} \quad (5.279)$$

Luego en los nudos de baja impedancia del circuito se obtiene función paso de baja y paso de banda, ambas inversoras.

(b)

Inyectando señal como se indica resulta el circuito de la Fig. 5.31.

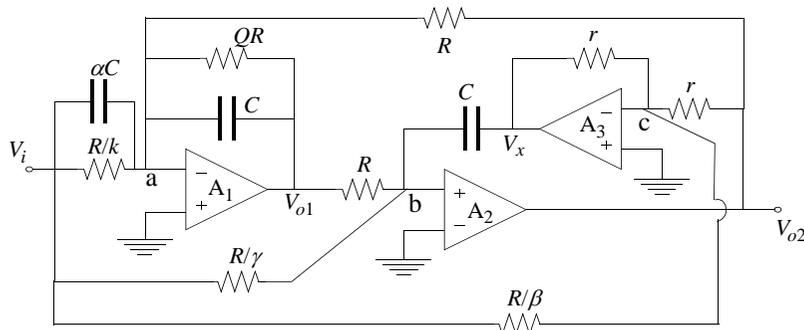


Figura 5.31: Biquad Ackerberg-Mossberg con inyección de señal.

Aplicando análisis nodal en los nudos a, b y c:

$$\begin{aligned} kGV_i + s\alpha CV_i + sCV_{o1} + \frac{G}{Q}V_{o1} + GV_{o2} &= 0 \\ GV_{o1} + \gamma GV_i + sCV_x &= 0 \\ gV_x + gV_{o2} + \beta GV_i &= 0 \end{aligned} \quad (5.280)$$

De la tercera ecuación de (5.280):

$$V_x = -V_{o2} - \beta \frac{G}{g} V_i \quad (5.281)$$

y sustituyendo (5.281) en la segunda ecuación de (5.280):

$$GV_{o1} + \gamma GV_i - sCV_{o2} - sC\beta \frac{G}{g} V_i = 0 \quad (5.282)$$

por lo que:

$$V_{o2} = \frac{G}{sC} V_{o1} + \frac{\gamma G - sC\beta \frac{G}{g}}{sC} V_i \quad (5.283)$$

y sustituyendo (5.283) en la primera ecuación de (5.280):

$$kGV_i + s\alpha CV_i + sCV_{o1} + \frac{G}{Q}V_{o1} + \frac{G^2}{sC}V_{o1} + \frac{\gamma G^2 - sC\beta \frac{G^2}{g}}{sC} V_i = 0 \quad (5.284)$$

por lo que:

$$\frac{V_{o1}}{V_i} = -\frac{s^2\alpha C^2 + sCG\left(k - \beta \frac{G}{g}\right) + \gamma G^2}{s^2C^2 + sC\frac{G}{Q} + G^2} \quad (5.285)$$

Se obtiene una función paso de alta para $k = \beta = \gamma = 0$.

Se obtiene una función paso de banda para $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Se obtiene una función paso de baja para $\alpha = k = \beta = 0$.

Se obtiene una función rechazo de banda para $k = \beta = 0$. Si $\alpha = \gamma$ será rechazo de banda simétrico, si $\alpha > \gamma$ es corte paso de alta ("high-pass notch") y si $\alpha < \gamma$ es corte paso de baja ("low-pass notch").

Se obtiene un filtro pasa todo para $\alpha = \gamma = 1, k = 0$ y $\beta = \frac{g}{QG}$.

Ejercicio

5.28.-Estudiar el comportamiento del circuito de la Fig. 5.32 cuando se tiene en cuenta:

- (a) modelo ideal de los amplificadores operacionales.
- (b) modelo de un polo ($A(s)=GB/s$) para los amplificadores operacionales (suponer que los amplificadores operacionales están completamente apareados). Obtener los parámetros característicos del circuito en función de los valores de los elementos.

Discutir las ventajas que puede reportar este circuito.

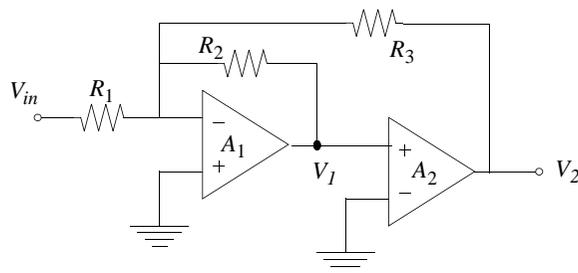


Figura 5.32: Circuito R-activo.

5.5 Biquads con OTAs

El diseño con OTAs es muy sencillo. Consideremos por ejemplo la estructura de dos integradores anterior junto con otra que también se muestra en la Fig. 5.33 y es equivalente a la anterior.

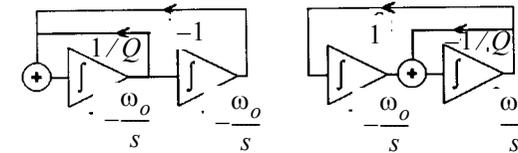


Figura 5.33: Estructuras de biquads con integradores.

En ambas estructuras los polos están dados por:

$$s^2 + s \frac{\omega_o}{Q} + \omega_o^2 \tag{5.286}$$

Únicamente necesitamos pues integradores inversores y no inversores, sumadores y amplificadores o factores de escalado que pueden conseguirse con los circuitos de la Fig. 5.34.

Conectando los bloques anteriores resulta los circuitos de la Fig. 5.35 que tienen los siguientes denominadores:

$$s^2 + s \frac{1}{C_1} \frac{g_{m1}g_{m3}}{g_{m5}} + \frac{g_{m1}g_{m2}g_{m4}}{C_1 C_2 g_{m5}} \tag{5.287}$$

$$s^2 + s \frac{1}{C_2} \frac{g_{m2}g_{m3}}{g_{m4}} + \frac{g_{m1}g_{m2}g_{m5}}{C_1 C_2 g_{m6}}$$

Para circuitos integrados es conveniente coger todas las transconductancias iguales por lo que resulta:

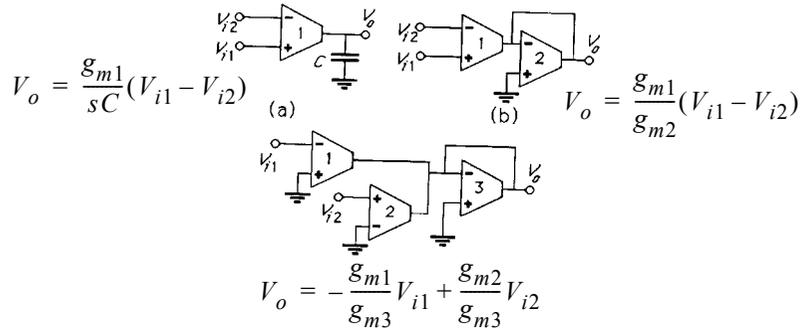


Figura 5.34: Integradores, amplificadores y sumadores con OTAs.

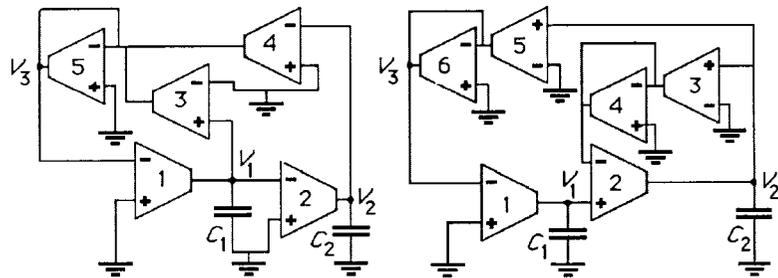


Figura 5.35: Biquads con OTAs.

$$\omega_o = \frac{g_m}{\sqrt{C_1 C_2}} \quad Q = \sqrt{\frac{C_1}{C_2}} \quad (5.288)$$

Las sensibilidades son bajas pero la relación de condensadores es alta.

Puede observarse que los OTAs 3, 4, 5 y 6 pueden eliminarse y sustituirse por cortocircuitos pero es interesante mantenerlos para facilitar el escalado de tensión y dar mayor flexibilidad a los ceros de transmisión. Para establecer ceros de transmisión se pueden conectar tensiones de entrada a ter-

minales que estaban a tierra. Asimismo se pueden inyectar intensidades a nudos de impedancia finita.

Ejercicio

5.29.-a) Demostrar que el circuito de la Fig. 5.36 es un biquad paso de banda (considerar OTAs ideales e idénticos entre sí).

b) Diseñar el circuito para obtener $\omega_o=105\text{Krad/s}$ y $Q=8$. No se pueden utilizar condensadores mayores de 500pF pero habrán de ser lo mayor posibles a fin de minimizar los parásitos.

c) Estudiar las desviaciones de comportamiento del biquad producidas cuando se consideran modelos no ideales de los OTAs, con impedancias de entrada: $C_i=0.5\text{pF}$, $G_i=0$; e impedancias de salida: $R_o=20\text{M}\Omega$, $C_o=0.1\text{pF}$. Obtener conclusiones.

d) Estudiar ahora los efectos no ideales que se producen cuando se diseña con el objetivo de ahorrar área de forma que el condensador más pequeño sea ahora 1pF. Obtener conclusiones.

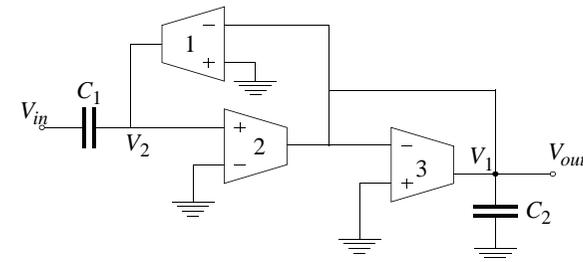


Figura 5.36:

Solución detallada

En primer lugar analizamos el circuito de la Fig. 5.36 aplicando análisis nodal en los nudos V_1 y V_2 considerando OTAs ideales:

$$\begin{aligned} sC_2V_1 - g_{m2}V_2 + g_{m3}V_1 &= 0 \\ sC_1(V_2 - V_i) + g_{m1}V_1 &= 0 \end{aligned} \quad (5.289)$$

De la primera ecuación en (5.289):

$$V_2 = \frac{g_{m3} + sC_2}{g_{m2}} V_1 \quad (5.290)$$

y sustituyendo en la segunda ecuación en (5.289):

$$sC_1V_i = \left[g_{m1} + sC_1 \frac{g_{m3} + sC_2}{g_{m2}} \right] V_1 \quad (5.291)$$

de donde:

$$\frac{V_1}{V_i} = \frac{sC_1g_{m2}}{s^2C_1C_2 + sC_1g_{m3} + g_{m1}g_{m2}} \quad (5.292)$$

y suponiendo los OTAs iguales:

$$\frac{V_1}{V_i} = \frac{sC_1g_m}{s^2C_1C_2 + sC_1g_m + g_m^2} \quad (5.293)$$

Por tanto se trata de un biquad paso de banda con:

$$\omega_o = \frac{g_m}{\sqrt{C_1C_2}} \quad Q = \sqrt{\frac{C_2}{C_1}} \quad (5.294)$$

Como $Q = 8$, C_2 es el mayor condensador. Con el fin de minimizar en primer lugar la influencia de los parásitos asignamos el mayor valor permitido para este condensador: $C_2 = 500pF$. Por tanto:

$$C_1 = \frac{C_2}{Q^2} = 7.81pF \quad (5.295)$$

y

$$g_m = \omega_o \sqrt{C_1C_2} = 6.25\mu\text{mho} \quad (5.296)$$

Para estudiar las desviaciones de comportamiento debidos a los parásitos hemos de incorporarlos al modelo, resultando el circuito de la Fig. 5.37.

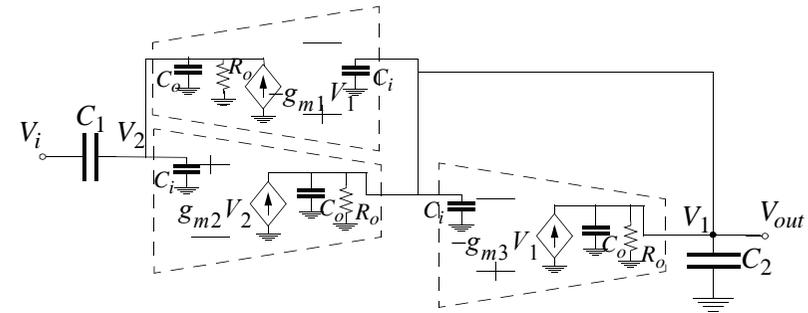


Figura 5.37:

Denominamos:

$$\begin{aligned} Y_1 &= sC_o + sC_i + G_o \\ Y_2 &= 2sC_o + 2sC_i + 2G_o + sC_2 \end{aligned} \quad (5.297)$$

y aplicando análisis nodal en los nudos V_1 y V_2 :

$$\begin{aligned} sC_1(V_2 - V_i) + g_{m1}V_1 + Y_1V_2 &= 0 \\ Y_2V_1 - g_{m2}V_2 + g_{m3}V_1 &= 0 \end{aligned} \quad (5.298)$$

De la segunda ecuación en (5.298):

$$V_2 = \frac{g_{m3} + Y_2}{g_{m2}} V_1 \quad (5.299)$$

y sustituyendo (5.299) en la primera ecuación de (5.298):

$$sC_1V_i = \left[g_{m1} + \frac{(Y_1 + sC_1)(g_{m3} + Y_2)}{g_{m2}} \right] V_1 \quad (5.300)$$

de donde:

$$\frac{V_1}{V_i} = \frac{sC_1g_{m2}}{g_{m1}g_{m2} + (Y_1 + sC_1)(g_{m3} + Y_2)} \quad (5.301)$$

Considerando OTAs idénticos:

$$\begin{aligned} \frac{V_1}{V_i} &= \frac{sC_1g_m}{g_m^2 + (Y_1 + sC_1)(g_m + Y_2)} = \\ &= \frac{sC_1g_m}{s^2(C_1 + C_o + C_i)[C_2 + 2(C_o + C_i)] +} \\ &\quad + s[(C_1 + C_o + C_i)(g_m + 2G_o) + (C_2 + 2C_o + 2C_i)G_o] +} \\ &\quad + g_m^2 + G_o(g_m + 2G_o)} \end{aligned} \quad (5.302)$$

de donde la frecuencia central es:

$$\begin{aligned} \omega_{or} &= \frac{\sqrt{g_m^2 + G_o(g_m + 2G_o)}}{\sqrt{(C_1 + C_o + C_i)[C_2 + 2(C_o + C_i)]}} \cong \\ &\cong \frac{\sqrt{g_m^2 + G_o g_m}}{\sqrt{(C_1 + C_o + C_i)[C_2 + 2(C_o + C_i)]}} = \\ &= \frac{g_m}{\sqrt{C_1 C_2}} \frac{\sqrt{1 + \frac{G_o}{g_m}}}{\sqrt{1 + \frac{C_o + C_i}{C_1}} \sqrt{1 + 2 \frac{C_o + C_i}{C_2}}} \end{aligned} \quad (5.303)$$

y el factor de calidad:

$$Q_r = \frac{\sqrt{\frac{C_2}{C_1}} \sqrt{1 + \frac{G_o}{g_m}} \sqrt{1 + \frac{C_o + C_i}{C_1}} \sqrt{1 + 2 \frac{C_o + C_i}{C_2}}}{\left(1 + \frac{C_o + C_i}{C_1}\right) + \frac{G_o C_2}{C_1 g_m} \left(1 + 2 \frac{C_o + C_i}{C_2}\right)} \quad (5.304)$$

Dados los valores de los parásitos y los parámetros de diseño se obtiene que los valores reales de frecuencia central y factor de calidad son:

$$\begin{aligned} \omega_{or} &= 96636 \text{ rad/s} \\ Q_r &= 5.19 \end{aligned} \quad (5.305)$$

Puede observarse que los parásitos afectan de forma muy sensible al factor de calidad mientras que la influencia sobre la frecuencia central es mucho menor.

Si con el objetivo de reducir el consumo de área minimizamos los valores de los condensadores se escoge el condensador más pequeño $C_1 = 1 \text{ pF}$. El resto de parámetros de diseño entonces:

$$\begin{aligned} C_2 &= C_1 Q^2 = 64 \text{ pF} \\ g_m &= \omega_o \sqrt{C_1 C_2} = 0.8 \mu\text{mho} \end{aligned} \quad (5.306)$$

La aproximación en (5.303) ya no es válida en este caso puesto que ahora G_o es comparable a g_m . Utilizando las expresiones exactas se obtienen las siguientes desviaciones al tener en cuenta los parásitos:

$$\begin{aligned} \omega_{or} &= 81345 \text{ rad/s} \\ Q_r &= 1.80 \end{aligned} \quad (5.307)$$

Las desviaciones son mucho mayores al ser los parásitos más comparables a los parámetros de diseño.

A.1 Sensibilidad de filtros activos de segundo orden

Puesto que la sensibilidad va a ser un criterio fundamental en el diseño de biquads es conveniente estudiarla específicamente para este tipo de bloques. Su función de transferencia genérica es:

$$H_2(s) = \frac{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{s^2 + s \frac{\omega_o}{Q} + \omega_o^2} \quad (5.308)$$

Si, como es habitual, los polos son complejos ($Q > 0.5$),

$$p_{1,2} = -\omega_o \left(\frac{1}{2Q} \mp j \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \right) \quad (5.309)$$

Los polos dominan el comportamiento en la banda pasante de los filtros por lo que su localización es muy importante y deberían ser insensibles a variaciones en los parámetros.

Si suponemos que ω_o y Q son funciones de un cierto parámetro x la sensibilidad semirelativa de uno de los polos se obtiene sin más que aplicar la definición:

$$\begin{aligned} Q_x^{p_1} &= x \frac{\partial p_1}{\partial x} = -x \left(\frac{1}{2Q} - j \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \right) \frac{\partial \omega_o}{\partial x} - x \omega_o \left(-\frac{1}{2Q^2} - j \frac{\frac{1}{4Q^3}}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} \right) \frac{\partial Q}{\partial x} = \\ &= p_1 S_x^{\omega_o} + S_x^Q \frac{\frac{p_1}{2Q}}{\frac{1}{2Q} - j \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} \left(-1 - \frac{j}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} \right) \quad (5.310) \\ &= p_1 S_x^{\omega_o} + S_x^Q \frac{\frac{p_1}{2Q}}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} \left(\frac{-\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} - j \frac{1}{2Q}}{\frac{1}{2Q} - j \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} \right) = p_1 S_x^{\omega_o} - \frac{j p_1 S_x^Q}{\sqrt{4Q^2 - 1}} \end{aligned}$$

La sensibilidad $Q_x^{p_2}$ es la conjugada de (5.310).

En la ecuación (5.310) se observa que la localización de un polo es $\sqrt{4Q^2 - 1} \cong 2Q$ veces más sensible a variaciones en ω_o que a variaciones en Q .

Pero lo que realmente interesa es la sensibilidad de la función de transferencia en la banda pasante. Si suponemos que en la ecuación (5.308) x no afecta a los ceros y a la ganancia en dc se tiene que:

$$S_x^{H_2(s)} = \frac{Q_x^{p_1}}{s - p_1} + \frac{(Q_x^{p_1})^*}{s - p_1^*} \quad (5.311)$$

Reducimos a denominador común y utilizamos las expresiones para p_1 y $Q_x^{p_1}$:

$$p_1 = -\omega_o \left(\frac{1}{2Q} - j \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \right) \quad Q_x^{p_1} = p_1 S_x^{\omega_o} - \frac{j p_1 S_x^Q}{\sqrt{4Q^2 - 1}} \quad (5.312)$$

El producto de los dos factores del denominador de (5.311) proporciona la ecuación de segundo grado. Veamos el numerador:

$$\begin{aligned}
 (s-p_1^*)p_1 \left(S_x^{\omega_o} - j \frac{S_x^Q}{\sqrt{4Q^2-1}} \right) + p_1^* \left(S_x^{\omega_o} + j \frac{S_x^Q}{\sqrt{4Q^2-1}} \right) (s-p_1) &= \\
 = sp_1 \left(S_x^{\omega_o} - j \frac{S_x^Q}{\sqrt{4Q^2-1}} \right) + sp_1^* \left(S_x^{\omega_o} + j \frac{S_x^Q}{\sqrt{4Q^2-1}} \right) - p_1 p_1^* 2S_x^{\omega_o} &= \\
 = 2s \operatorname{Re}(p_1) S_x^{\omega_o} + 2s \operatorname{Im}(p_1) \frac{S_x^Q}{\sqrt{4Q^2-1}} - 2\omega_o^2 S_x^{\omega_o} &= \\
 = -s \frac{\omega_o}{Q} S_x^{\omega_o} + 2s \omega_o \frac{\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}}{\sqrt{4Q^2-1}} S_x^Q - 2\omega_o^2 S_x^{\omega_o} &
 \end{aligned} \quad (5.313)$$

O sea que la sensibilidad de la función de transferencia resulta:

$$S_x^{H_2(s)} = - \frac{\left(2\omega_o^2 + \frac{s\omega_o}{Q} \right) S_x^{\omega_o} - \frac{s\omega_o}{Q} S_x^Q}{s^2 + s\omega_o/Q + \omega_o^2} \quad (5.314)$$

Haciendo uso de:

$$S_x^{H(j\omega)} = S_x^{|H(j\omega)|} + jQ_x^{\phi(\omega)} \quad (5.315)$$

se puede obtener la sensibilidad de la magnitud:

$$\begin{aligned}
 S_x^{|H_2(j\omega)|} &= - \frac{2(1-\omega_n^2) + \omega_n^2/Q^2}{(1-\omega_n^2)^2 + \omega_n^2/Q^2} S_x^{\omega_o} + \frac{\omega_n^2/Q^2}{(1-\omega_n^2)^2 + \omega_n^2/Q^2} S_x^Q = \\
 &= S_{\omega_o}^{|H_2|} S_x^{\omega_o} + S_Q^{|H_2|} S_x^Q
 \end{aligned} \quad (5.316)$$

donde $\omega_n = \omega/\omega_o$ es una frecuencia normalizada.

Por tanto,

$$\begin{aligned}
 S_{\omega_o}^{|H_2|} &= - \frac{2(1-\omega_n^2) + \omega_n^2/Q^2}{(1-\omega_n^2)^2 + \omega_n^2/Q^2} \\
 S_Q^{|H_2|} &= \frac{\omega_n^2/Q^2}{(1-\omega_n^2)^2 + \omega_n^2/Q^2}
 \end{aligned} \quad (5.317)$$

La representación de estas sensibilidades en la Fig. 5.1 muestra que son fuertemente dependientes con la frecuencia. Los máximos y mínimos se producen para:

$$\max \left\{ S_Q^{|H_2|} \right\} = 1 \quad \text{para} \quad \omega = \omega_o \quad (5.318)$$

y para Q grande:

$$\begin{aligned}
 \max \left\{ S_{\omega_o}^{|H_2|} \right\} &\cong \frac{Q}{1+1/Q} \quad \text{para} \quad \omega \cong \omega_o \left(1 + \frac{1}{2Q} \right) \\
 \min \left\{ S_{\omega_o}^{|H_2|} \right\} &\cong - \frac{Q}{1-1/Q} \quad \text{para} \quad \omega \cong \omega_o \left(1 - \frac{1}{2Q} \right)
 \end{aligned} \quad (5.319)$$

Puede observarse que los valores extremos ocurren aproximadamente en la frecuencia de 3 dB de la función de segundo orden.

Para las frecuencias críticas de 3dB,

$$\omega \cong \omega_o \left(1 \pm \frac{1}{2Q} \right) \quad (5.320)$$

se obtiene,

$$\frac{S_{\omega_o}^{|H_2|}}{S_Q^{|H_2|}} = 2Q^2 \left(\frac{\frac{1}{4Q^2} \pm \frac{1}{Q}}{1 + \frac{1}{4Q^2} \pm \frac{1}{Q}} \right) \cong \frac{1}{2} \pm 2Q - 1 - \frac{1}{4Q^2} \mp \frac{1}{Q} \cong 2Q \quad (5.321)$$

Podemos concluir que en el diseño adecuado de secciones de segundo orden con altos valores de Q es más importante prestar atención a obtener valores pequeños de $S_x^{\omega_o}$ que a valores pequeños de S_x^Q . Si las variabilidades de ω y Q han de tener efectos parecidos en la función de transferencia, la variabilidad $\frac{d\omega_o}{\omega_o}$ debería ser Q veces más pequeña que dQ/Q ya que:

$$\frac{d|H_2(j\omega)|}{|H_2(j\omega)|} = S_{\omega_o}^{|H_2|} \frac{d\omega_o}{\omega_o} + S_Q^{|H_2|} \frac{dQ}{Q} \quad (5.322)$$

A.2 Desviaciones de frecuencia de polo y factor de calidad debido al producto ganancia-ancho de banda finito de los amplificadores operacionales

Realizaremos el desarrollo para biquads monoamplificadores ENF. Un desarrollo similar puede hacerse para biquads EPF. En (5.46) se obtuvo que el denominador de la función de transferencia del biquad considerando un modelo de un polo para el amplificador operacional es:

$$D(s) = \frac{s^3}{GB} + \left(a_2 - k_0 + \frac{\omega_1}{GB} \frac{1}{q_p} \right) s^2 + \left(a_1 - k_0 \frac{\omega_1}{q_p} + \frac{\omega_1^2}{GB} \right) s + a_0 - k_0 \omega_1 \quad (5.323)$$

y utilizando (5.52):

$$D(s) = \frac{s^3}{GB} + \left(a_2 - k_0 + \frac{\omega_1}{GB} \frac{1}{q_p} \right) s^2 + \left[\frac{1}{q_z} \left(a_2 - k_0 \frac{q_z}{q_p} \right) + \frac{\omega_1}{GB} \right] \omega_1 s + a_0 - k_0 \omega_1 \quad (5.324)$$

Teniendo en cuenta que para minimizar la sensibilidad de ω_o se ha hecho en (5.51):

$$a_0 = a_2 \omega_1^2 \quad (5.325)$$

(5.324) es:

$$D(s) = \frac{s^3}{GB} + \left(a_2 - k_0 + \frac{\omega_1}{GB} \frac{1}{q_p} \right) s^2 + \left[\frac{1}{q_z} \left(a_2 - k_0 \frac{q_z}{q_p} \right) + \frac{\omega_1}{GB} \right] \omega_1 s + \omega_1^2 (a_2 - k_0) = \frac{s^3}{GB} + (a_2 - k_0) \left[\left(1 + \frac{\omega_1}{GB} \frac{1}{q_p} \frac{1}{a_2 - k_0} \right) s^2 + \left[\frac{a_2 - k_0 \frac{q_z}{q_p} + q_z \frac{\omega_1}{GB}}{a_2 - k_0} \right] \frac{\omega_1}{q_z} s + \omega_1^2 \right] \quad (5.326)$$

Teniendo en cuenta que se obtuvo en (5.53) y (5.56):

$$\omega_0 = \omega_1 \quad Q = \frac{q_z}{1 - \frac{k_0}{a_2 - k_0} q} = \frac{(a_2 - k_0) q_z}{a_2 - k_0 \frac{q_z}{q_p}} \quad (5.327)$$

(5.326) se transforma en:

$$D(s) = \frac{s^3}{GB} + (a_2 - k_0) \left[\left(1 + \frac{\omega_o}{GB} \frac{1}{q_p} \frac{1}{a_2 - k_0} \right) s^2 + \left[\frac{\omega_o}{Q} + \frac{\omega_o^2 / GB}{a_2 - k_0} \right] \omega_o s + \omega_o^2 \right] \quad (5.328)$$

Este polinomio debe contener una raíz real introducida por el GB finito del amplificador operacional y la pareja de polos complejos conjugados del bi-

quad con alguna desviación respecto a la posición original, lo que podemos expresar como:

$$D(s) = \left(\frac{s}{GB} + \gamma \right) \left(s^2 + s \frac{\omega_a}{Q_a} + \omega_a^2 \right) \quad (5.329)$$

Pretendemos obtener las desviaciones que se han producido en frecuencia de polo y factor de calidad, es decir, ω_a y Q . Por tanto, igualando coeficientes en (5.328) y (5.329):

$$\gamma = (a_2 - k_0) \frac{\omega_o^2}{\omega_a^2} \quad (5.330)$$

$$\gamma \frac{\omega_a}{Q_a} + \frac{\omega_a^2}{GB} = (a_2 - k_0) \frac{\omega_o}{Q} + \frac{\omega_o^2}{GB}$$

$$\gamma + \frac{1}{GB} \frac{\omega_a}{Q_a} = (a_2 - k_0) + \frac{\omega_o}{q_p GB}$$

Sustituyendo la primera ecuación de (5.330) en la segunda:

$$(a_2 - k_0) \omega_o^2 \left(\frac{1}{\omega_a Q_a} - \frac{1}{\omega_o Q} \right) = \frac{1}{GB} (\omega_o^2 - \omega_a^2) \quad (5.331)$$

y dividiendo por ω_o^2 :

$$(a_2 - k_0) \left(\frac{1}{\omega_a Q_a} - \frac{1}{\omega_o Q} \right) = \frac{1}{GB} \left(1 - \frac{\omega_a^2}{\omega_o^2} \right) \quad (5.332)$$

Expresamos la desviación en la frecuencia de polo como $\omega_a = \omega_o + \Delta\omega_o$:

$$(a_2 - k_0) \frac{1}{\omega_o} \left(\frac{1}{\left(1 + \frac{\Delta\omega_o}{\omega_o}\right) Q_a} - \frac{1}{Q} \right) = \frac{1}{GB} \left(1 - \frac{(\omega_o + \Delta\omega_o)^2}{\omega_o^2} \right) \quad (5.333)$$

Teniendo en cuenta que suponemos que las desviaciones no son grandes

$\left| \frac{\Delta\omega_o}{\omega_o} \right| \ll 1$ por lo que podemos aproximar:

$$(a_2 - k_0) \frac{GB}{\omega_o} \left(\frac{1}{\left(1 + \frac{\Delta\omega_o}{\omega_o}\right) Q_a} - \frac{1}{Q} \right) \approx -\frac{2\Delta\omega_o}{\omega_o} \quad (5.334)$$

Asimismo podemos desarrollar en serie $\frac{1}{1 + \frac{\Delta\omega_o}{\omega_o}}$ y cortar el desarrollo en el término de primer orden:

$$(a_2 - k_0) \frac{GB}{\omega_o} \left(\frac{1}{Q_a} - \frac{1}{Q_a} \frac{\Delta\omega_o}{\omega_o} - \frac{1}{Q} \right) \cong -\frac{2\Delta\omega_o}{\omega_o} \quad (5.335)$$

Agrupando términos:

$$\frac{\Delta\omega_o}{\omega_o} \left[2 - \frac{GB}{\omega_o} (a_2 - k_0) \frac{1}{Q_a} \right] \cong -\frac{GB}{\omega_o} (a_2 - k_0) \left(\frac{1}{Q_a} - \frac{1}{Q} \right) \quad (5.336)$$

Por otra parte, sustituyendo la primera ecuación de (5.330) en la tercera:

$$(a_2 - k_0) \left[\frac{\omega_o^2}{\omega_a^2} - 1 \right] = \frac{\omega_o}{GB} \left(\frac{1}{q_p} - \frac{\omega_a}{\omega_o Q_a} \right) \quad (5.337)$$

Expresamos la desviación en la frecuencia de polo como $\omega_a = \omega_o + \Delta\omega_o$:

$$(a_2 - k_0) \left[\frac{\omega_o^2}{(\omega_o + \Delta\omega_o)^2} - 1 \right] = \frac{\omega_o}{GB} \left(\frac{1}{q_p} - \frac{\omega_o + \Delta\omega_o}{\omega_o Q_a} \right) \quad (5.338)$$

Teniendo en cuenta que suponemos que las desviaciones no son grandes

$\left| \frac{\Delta\omega_o}{\omega_o} \right| \ll 1$ por lo que podemos aproximar:

$$(a_2 - k_0) \left[\frac{1}{1 + 2 \frac{\Delta\omega_o}{\omega_o}} - 1 \right] \cong \frac{\omega_o}{GB} \left(\frac{1}{q_p} - \frac{1}{Q_a} - \frac{\Delta\omega_o}{\omega_o} \frac{1}{Q_a} \right) \quad (5.339)$$

Asimismo podemos desarrollar en serie $\frac{1}{1 + \frac{\Delta\omega_o}{\omega_o}}$ y cortar el desarrollo en el término de primer orden:

$$(a_2 - k_0) \left(-2 \frac{\Delta\omega_o}{\omega_o} \right) \cong \frac{\omega_o}{GB} \left(\frac{1}{q_p} - \frac{1}{Q_a} - \frac{\Delta\omega_o}{\omega_o} \frac{1}{Q_a} \right) \quad (5.340)$$

Agrupando términos:

$$\frac{\Delta\omega_o}{\omega_o} \left[2 \frac{GB}{\omega_o} (a_2 - k_0) - \frac{1}{Q_a} \right] \cong \frac{1}{q_p} - \frac{1}{Q_a} \quad (5.341)$$

Teniendo en cuenta que típicamente $2(a_2 - k_0) \frac{GB}{\omega_o} \gg \frac{1}{Q_a}$ se puede aproximar:

$$\frac{\Delta\omega_o}{\omega_o} \cong \frac{\omega_o}{2GB(a_2 - k_0)} \left(\frac{1}{q_p} - \frac{1}{Q_a} \right) \quad (5.342)$$

Teniendo en cuenta que típicamente $Q_a \gg q_p$ se puede aproximar:

$$\frac{\Delta\omega_o}{\omega_o} \cong \frac{\omega_o}{2GB(a_2 - k_0)q_p} = \frac{1}{2(a_2 - k_0)q_p} \frac{1}{|A(j\omega_o)|} \quad (5.343)$$

De (5.327):

$$Q = \frac{q_z}{1 - \frac{k_0}{a_2 - k_0} q} = \frac{(a_2 - k_0)q_z}{a_2 - k_0 \frac{q_z}{q_p}} \quad (5.344)$$

resolvemos $(a_2 - k_0)$:

$$\begin{aligned} \frac{k_0 q}{a_2 - k_0} &= 1 - \frac{q_z}{Q} \\ a_2 - k_0 &= \frac{k_0 q}{1 - \frac{q_z}{Q}} \\ \frac{a_2}{k_0} - 1 &= \frac{q}{1 - \frac{q_z}{Q}} \\ k_0 &= \frac{a_2}{1 + \frac{q}{1 - \frac{q_z}{Q}}} \end{aligned} \quad (5.345)$$

Sustituyendo (5.345) en (5.343):

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta\omega_o}{\omega_o} &\cong \frac{1}{2(a_2 - k_0)q_p} \frac{1}{|A(j\omega_o)|} = \\
&= \frac{1}{2q_p|A(j\omega_o)|} \frac{1}{a_2 - \frac{1}{1 + \frac{q}{1 - \frac{q_z}{Q}}}} = \frac{1}{2q_p|A(j\omega_o)|} \frac{1}{a_2 - \frac{1}{1 + \frac{q}{1 - \frac{q_p(1+q)}{Q}}}} = \\
&= \frac{1}{2q_p|A(j\omega_o)|} \frac{1}{a_2} \frac{1}{1 - \frac{Q}{1 - \frac{q_p(1+q)}{Q} + q}} = \quad (5.346) \\
&= \frac{1}{2q_p|A(j\omega_o)|} \frac{1}{a_2} \frac{1 - \frac{q_p(1+q)}{Q} + q}{q} = \\
&= \frac{1}{2q_p|A(j\omega_o)|} \frac{1}{a_2} \frac{1+q}{q} \left(1 - \frac{q_p}{Q}\right)
\end{aligned}$$

A partir de (5.344) calculamos el producto ganancia sensibilidad de Q :

$$\begin{aligned}
\Gamma_{A_o}^Q &= A_o S_{k_0}^Q S_{A_o}^{k_0} = \frac{1}{k_0} S_{k_0}^Q = \frac{1}{k_0} \frac{k_0 \partial Q}{Q \partial k_0} = \\
&= \frac{1}{Q} \frac{-q_z \left(a_2 - k_0 \frac{q_z}{q_p}\right) + \frac{q_z}{q_p} (a_2 - k_0) q_z}{\left(a_2 - k_0 \frac{q_z}{q_p}\right)^2} = \frac{1}{Q} \frac{-q_z a_2 + \frac{q_z^2}{q_p} a_2}{\left(a_2 - k_0 \frac{q_z}{q_p}\right)^2} = \quad (5.347) \\
&= \frac{1}{Q} \frac{q_z a_2 q}{\left(a_2 - k_0 \frac{q_z}{q_p}\right)^2}
\end{aligned}$$

Utilizando (5.344):

$$\Gamma_{A_o}^Q = \frac{1}{Q} q_z a_2 q \frac{Q^2}{(a_2 - k_0)^2 q_z^2} = \frac{Q a_2 q}{(a_2 - k_0)^2 q_z} \quad (5.348)$$

Usando la segunda ecuación de (5.345):

$$\Gamma_{A_o}^Q = \frac{Q a_2 \left(1 - \frac{q_z}{Q}\right)^2}{q_z k_0^2 q} \quad (5.349)$$

y usando la cuarta ecuación de (5.345):

$$\begin{aligned}
\Gamma_{A_o}^Q &= \frac{Q a_2 \left(1 - \frac{q_z}{Q}\right)^2 \left(1 + \frac{q}{1 - \frac{q_z}{Q}}\right)^2}{q q_z a_2^2} = \frac{Q}{q q_z} \frac{\left(1 - \frac{q_z}{Q} + q\right)^2}{a_2} = \quad (5.350) \\
&= \frac{Q}{a_2 q} q_z \left(\frac{1}{q_p} - \frac{1}{Q}\right)^2 = \frac{Q}{a_2} q_p \frac{1+q}{q} \left(\frac{1}{q_p} - \frac{1}{Q}\right)^2 = \frac{Q}{a_2 q_p} \frac{1+q}{q} \left(1 - \frac{q_p}{Q}\right)^2
\end{aligned}$$

Sustituyendo (5.350) en (5.346):

$$\frac{\Delta\omega_o}{\omega_o} \cong \frac{1}{2|A(j\omega_o)|} \frac{\Gamma_{A_o}^Q}{Q} \frac{1}{1 - \frac{q_p}{Q}} \quad (5.351)$$

Teniendo en cuenta que típicamente $\frac{q_p}{Q} \ll 1$:

$$\frac{\Delta\omega_o}{\omega_o} \cong \frac{1}{2Q|A(j\omega_o)|} \Gamma_{A_o}^Q \quad (5.352)$$

Por otra parte, sustituyendo (5.352) en (5.336):

$$\frac{1}{2Q} \frac{1}{|A(j\omega_o)|} \Gamma_{A_o}^Q \left[2 - |A(j\omega_o)|(a_2 - k_0) \frac{1}{Q_a} \right] \cong -|A(j\omega_o)|(a_2 - k_0) \left(\frac{1}{Q_a} - \frac{1}{Q} \right) \quad (5.353)$$

Expresamos la desviación del factor de calidad como $Q_a = Q + \Delta Q$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2Q} \frac{1}{|A(j\omega_o)|} \Gamma_{A_o}^Q \left[2 - |A(j\omega_o)|(a_2 - k_0) \frac{1}{Q + \Delta Q} \right] &\cong \\ &\cong -|A(j\omega_o)|(a_2 - k_0) \left(\frac{1}{Q + \Delta Q} - \frac{1}{Q} \right) \end{aligned} \quad (5.354)$$

Podemos desarrollar en serie $\frac{1}{1 + \frac{\Delta Q}{Q}}$ y cortar el desarrollo en el término de

primer orden:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2Q} \frac{1}{|A(j\omega_o)|} \Gamma_{A_o}^Q \left[2 - |A(j\omega_o)|(a_2 - k_0) \frac{1}{Q} \left(1 - \frac{\Delta Q}{Q} \right) \right] &\cong \\ &\cong -|A(j\omega_o)|(a_2 - k_0) \frac{1}{Q} \left(-\frac{\Delta Q}{Q} \right) \end{aligned} \quad (5.355)$$

Agrupando términos:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta Q}{Q} \left[|A(j\omega_o)|(a_2 - k_0) \frac{1}{Q} - \frac{1}{2Q} \Gamma_{A_o}^Q (a_2 - k_0) \frac{1}{Q} \right] &\cong \\ &\cong \frac{1}{2Q} \frac{1}{|A(j\omega_o)|} \Gamma_{A_o}^Q \left[2 - |A(j\omega_o)|(a_2 - k_0) \frac{1}{Q} \right] \end{aligned} \quad (5.356)$$

Teniendo en cuenta que $\frac{\Gamma_{A_o}^Q}{2Q|A(j\omega_o)|} \cong \left| \frac{\Delta\omega_o}{\omega_o} \right| \ll 1$ se puede aproximar:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta Q}{Q} |A(j\omega_o)|(a_2 - k_0) \frac{1}{Q} &\cong \\ &\cong \frac{1}{2Q} \frac{1}{|A(j\omega_o)|} \Gamma_{A_o}^Q \left[2 - |A(j\omega_o)|(a_2 - k_0) \frac{1}{Q} \right] \end{aligned} \quad (5.357)$$

por lo que:

$$\frac{\Delta Q}{Q} \cong -\frac{1}{2Q} \frac{1}{|A(j\omega_o)|} \Gamma_{A_o}^Q \left[1 - \frac{2Q}{|A(j\omega_o)|(a_2 - k_0)} \right] \quad (5.358)$$

como típicamente $\frac{2Q}{|A(j\omega_o)|(a_2 - k_0)} \ll 1$:

$$\frac{\Delta Q}{Q} \cong -\frac{1}{2Q} \frac{1}{|A(j\omega_o)|} \Gamma_{A_o}^Q \quad (5.359)$$

$$(5.360)$$