

# ÍNDICE

<b>1. Señales y sistemas</b>	<b>1</b>
1.1. Señales	1
1.1.1. Clasificación de señales	1
1.1.2. Medidas de señales	5
1.1.3. Señales de interés	7
1.1.4. Espacios de Hilbert para señales de energía finita	10
1.2. Sistemas	14
1.2.1. Clasificación de los sistemas	15
1.2.2. Sistemas lineales e invariantes	17
1.3. Representación de señales y sistemas mediante transformadas	20
1.3.1. Respuesta de los sistemas lineales e invariantes a las exponenciales complejas	20
1.3.2. Transformada de Fourier para señales y sistemas en tiempo continuo	23
1.3.3. Transformada de Fourier para señales y sistemas en tiempo discreto	33
1.3.4. Transformada Z para sistemas lineales e invariantes	38
1.3.5. Transformada Discreta de Fourier	50
1.3.6. Representación de señales paso banda	56
1.4. Muestreo, diezmado e interpolación	59
1.4.1. Muestreo de señales en tiempo continuo	60
1.4.2. Interpolación y diezmado de secuencias	66
1.4.3. Simulación de señales y sistemas	68
1.4.4. Simulación de señales y sistemas continuos en tiempo discreto	70
1.4.5. Cambio de la frecuencia de simulación	74
1.4.6. Simulación de sistemas variantes y sistemas no lineales	76
1.5. Lecturas adicionales	81
Problemas	81



# CAPÍTULO 1

## SEÑALES Y SISTEMAS

En este capítulo se ofrece una revisión de los conceptos fundamentales de señales y sistemas con algunas extensiones de la teoría básica que son de interés en el estudio de los sistemas de comunicaciones como son el espacio de Hilbert de las señales de energía finita o la representación de señales paso banda.

### 1.1. SEÑALES

Una señal es una representación matemática de la evolución de una magnitud física (o una medida) respecto de algún o algunos parámetros; generalmente tiempo o espacio. Esta magnitud física puede ser voltaje, intensidad eléctrica, presión, temperatura, intensidad lumínica, etc.; e incluso puede que ni tan siquiera tenga un sentido físico claro, como la cotización bursátil de una empresa determinada, o la población mundial. Lo realmente interesante del estudio de las señales es que suponen una abstracción respecto a la magnitud física concreta, pasando esta a ser considerada como una función matemática,  $x(\cdot)$ , que tiene como variables independientes los parámetros con respecto a los cuales varía. A lo largo de todo el texto vamos a considerar que existe un único parámetro y que este es el tiempo.

A continuación vamos a abordar los siguientes aspectos relacionados con el estudio de las señales: criterios que nos permiten su clasificación, medidas que podemos realizar sobre ellas, algunas señales concretas especialmente útiles y una representación algebraica de las señales que va a ser de interés en capítulos posteriores. Además, emplearemos este apartado para ir introduciendo la notación que se utilizará a lo largo de todo el texto.

#### 1.1.1. Clasificación de señales

Un primer paso en el estudio de las señales consiste en su clasificación de acuerdo con determinados criterios. Veamos a continuación los criterios más importantes.

**Señales en tiempo continuo y en tiempo discreto.** Si la variable independiente puede tomar cualquier valor real decimos que la señal es en tiempo continuo y la denotamos como  $x(t)$  ( $t \in \mathbb{R}$ , siendo  $\mathbb{R}$  el cuerpo de los números reales). Si la variable independiente toma solo valor en los números enteros decimos que la señal es en tiempo discreto (también denominada secuencia) y la denotamos como  $x[n]$  ( $n \in \mathbb{Z}$ , siendo  $\mathbb{Z}$  el anillo de los números enteros).

**Ejemplo 1.1**

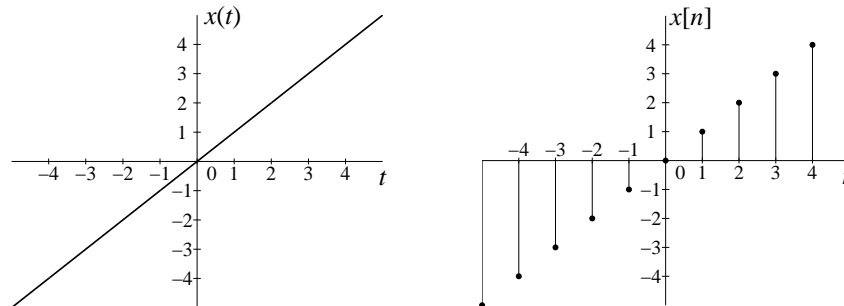
Un ejemplo de señal en tiempo continuo es

$$x(t) = t$$

y un ejemplo de señal en tiempo discreto es

$$x[n] = n$$

que representamos en la Figura 1.1.



**Figura 1.1.** Ejemplos de señales en tiempo continuo y en tiempo discreto.

Nótese que la diferencia entre ambas señales no está en su descripción analítica (el valor de la señal es igual al valor de la variable independiente), sino en que  $x(0,5)$  es igual a 0,5 y  $x[0,5]$  no existe, no está definido.

En algunos casos las secuencias se obtienen a partir de muestras de señales en tiempo continuo, pero en otros la propia magnitud física que representa la señal es de naturaleza discreta. Al fin y al cabo, una secuencia no es sino una lista de números ordenados.

**Señales analógicas y digitales.** Si la señal puede tomar uno entre un conjunto finito de valores decimos que la señal es digital y la denotamos con letras mayúsculas como  $X(t)$  o  $X[n]$  (según sea en tiempo continuo o en tiempo discreto). Si la señal puede tomar uno de entre un conjunto infinito de valores decimos que la señal es analógica y la denotamos con letras minúsculas como  $x(t)$  o  $x[n]$ .

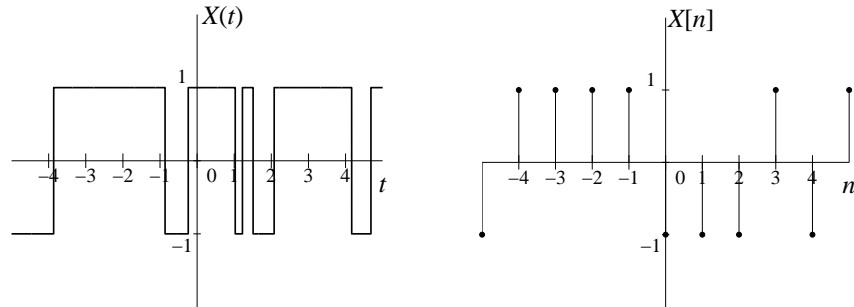
Comúnmente se asocia el término “señal digital” a señales en tiempo discreto y digitales, pero no hay que confundir una propiedad que afecta a la variable independiente (tiempo continuo o tiempo discreto) con una propiedad que afecta a los valores que toma la señal propiamente dicha (analógica o digital).

**Ejemplo 1.2**

La Figura 1.2 representa ejemplos de señales digitales en tiempo continuo y en tiempo discreto que sólo pueden tomar los valores 1 y  $-1$ . Las señales del ejemplo anterior eran señales analógicas.

**Señales deterministas y aleatorias.** Este criterio de clasificación, comúnmente citado en numerosos textos, es un criterio falso porque no puede aplicarse a ninguna señal concreta, sino al modelo matemático que empleamos para representar las señales. Estrictamente hablando, no podemos hablar de señales deterministas y señales aleatorias, sino de un modelo determinista y un modelo aleatorio o estocástico para representar el conocimiento que poseemos sobre las señales.

Bajo un modelo determinista, si suponemos que conocemos  $x(t)$  (o  $x[n]$ ) estamos suponiendo que conocemos la amplitud de  $x(t)$  para todos los valores de  $t$ ; por ejemplo, sabemos que  $x(75,4)$  es igual a 2,1 y no cualquier otro, y así con todos los valores de  $t$ . Bajo un modelo estocástico, si suponemos



**Figura 1.2.** Ejemplos de señales digitales en tiempo continuo y de tiempo discreto.

que conocemos  $x(t)$  (o  $x[n]$ ) estamos suponiendo que conocemos las propiedades estadísticas de  $x(t)$  para todos los valores de  $t$ , pero no el valor concreto de  $x(t)$ ; por ejemplo, sabemos que el valor medio (esperanza matemática) de  $x(75,4)$  es igual a  $-0,5$ , o que la varianza de  $x(75,4)$  es igual a  $1,1$ , o que el valor  $x(75,4)$  tiene una descripción probabilística gaussiana de media  $-0,5$  y varianza  $1,1$ , pero no sabemos con certeza el valor de la señal en ese instante.

El modelo realmente importante dentro de las comunicaciones es el modelo estocástico, pues es el único capaz de representar la información que puede contener una señal. Como veremos a lo largo del texto, información es equivalente a incertidumbre sobre el valor concreto que toma una señal, un parámetro, etc. Sin embargo, el tratamiento empleando el modelo estocástico resulta por lo general más complicado y farragoso, por lo que allí donde se pueda se recurrirá a un modelo determinista. En este capítulo vamos a considerar únicamente el modelo determinista, tratando el modelo estocástico en el capítulo siguiente.

**Señales periódicas y aperiódicas.** Una señal es periódica si los valores que toma se repiten de forma cíclica. Matemáticamente podemos expresarlo de la siguiente forma: una señal  $x(t)$  (o  $x[n]$ ) es periódica con periodo  $T$  (o  $N$ ) si existe un valor  $T \in \mathbb{R}$  (o  $N \in \mathbb{Z}$ ) para el que se cumple que

$$\begin{aligned} x(t) &= x(t + T) \quad \forall t \\ (x[n] &= x[n + N] \quad \forall n) \end{aligned} \quad (1.1)$$

El menor valor de  $T$  (o  $N$ ) para el que se cumple (1.1) se denomina *periodo fundamental* y se denota como  $T_0$  (o  $N_0$ ). Si una señal no es periódica se dice que es aperiódica.

**Señales reales y complejas.** Una señal compleja es aquella que toma valores en el cuerpo de los complejos,  $x(t) \in \mathbb{C}$  o  $x[n] \in \mathbb{C}$ . Una señal real es aquella que sólo toma valores en el cuerpo de los reales;  $x(t) \in \mathbb{R}$  o  $x[n] \in \mathbb{R}$ . Salvo que se especifique lo contrario, siempre que nos refiramos a una señal sin especificar si es real o compleja entenderemos que es una señal compleja.

Definimos las partes real e imaginaria de una señal como (omitimos la definición para secuencias por ser idéntica)

$$\mathcal{Re}\{x(t)\} \doteq \frac{x(t) + x^*(t)}{2} \quad (1.2)$$

$$\mathcal{Im}\{x(t)\} \doteq \frac{x(t) - x^*(t)}{2j} \quad (1.3)$$

donde  $j = \sqrt{-1}$  y \* indica complejo conjugado. Puede comprobarse que las partes real e imaginaria son señales reales. A partir de las partes real e imaginaria reconstruimos la señal como

$$x(t) = \mathcal{R}e\{x(t)\} + j\mathcal{I}m\{x(t)\} = \frac{x(t) + x^*(t)}{2} + j\frac{x(t) - x^*(t)}{2j} = x(t) \quad (1.4)$$

y podemos interpretar una señal real como aquella cuya parte imaginaria es idénticamente nula.

Otra descomposición de una señal compleja en dos señales reales se realiza (como realizaríamos la descomposición de un número complejo) mediante su módulo,  $|x(t)|$ , definido como

$$|x(t)| \doteq \sqrt{x(t)x^*(t)} = \sqrt{\mathcal{R}e^2\{x(t)\} + \mathcal{I}m^2\{x(t)\}} \quad (1.5)$$

y su fase,  $\angle x(t)$ , definida como

$$\angle x(t) \doteq \arctan \frac{\mathcal{I}m\{x(t)\}}{\mathcal{R}e\{x(t)\}} \quad (1.6)$$

de la forma

$$x(t) = |x(t)|e^{j\angle x(t)} = |x(t)|\cos(\angle x(t)) + j|x(t)|\sen(\angle x(t)) \quad (1.7)$$

**Señales pares e impares.** Una señal  $x(t)$  (o  $x[n]$ ) es par si cumple

$$\begin{aligned} x(t) &= x(-t) \quad \forall t \\ (x[n] &= x[-n] \quad \forall n) \end{aligned} \quad (1.8)$$

Una señal  $x(t)$  (o  $x[n]$ ) es impar si cumple

$$\begin{aligned} x(t) &= -x(-t) \quad \forall t \\ (x[n] &= -x[-n] \quad \forall n) \end{aligned} \quad (1.9)$$

De manera análoga a las partes real e imaginaria de una señal, podemos definir las partes par,  $\mathcal{E}v\{x(t)\}$ , e impar,  $\mathcal{O}d\{x(t)\}$ , de una señal como (omitimos la definición para secuencias por ser idéntica)

$$\mathcal{E}v\{x(t)\} = \frac{x(t) + x(-t)}{2} \quad (1.10)$$

$$\mathcal{O}d\{x(t)\} = \frac{x(t) - x(-t)}{2} \quad (1.11)$$

y expresar cualquier señal en función de sus partes par e impar

$$x(t) = \mathcal{E}v\{x(t)\} + \mathcal{O}d\{x(t)\} \quad (1.12)$$

Podemos comprobar fácilmente que la parte par de una señal es a su vez una señal par y que la parte impar es una señal impar.

**Señales hermíticas y antihermíticas.** Otro tipo de simetría similar a la paridad o imparidad es la hermiticidad. Una señal  $x(t)$  (o  $x[n]$ ) es hermítica si cumple

$$\begin{aligned} x(t) &= x^*(-t) \quad \forall t \\ (x[n] &= x^*[-n] \quad \forall n) \end{aligned} \quad (1.13)$$

lo que implica que la parte real es par y la imaginaria es impar. Una señal  $x(t)$  (o  $x[n]$ ) es antihermítica si cumple

$$\begin{aligned} x(t) &= -x^*(-t) \quad \forall t \\ (x[n] &= -x^*[-n] \quad \forall n) \end{aligned} \quad (1.14)$$

lo que implica que la parte real es impar y la imaginaria par.

Podemos definir las partes hermítica,  $\mathcal{H}e\{x(t)\}$ , y antihermítica,  $\mathcal{A}h\{x(t)\}$ , de una señal como (omitimos la definición para secuencias por ser idéntica)

$$\mathcal{H}e\{x(t)\} = \frac{x(t) + x^*(-t)}{2} \quad (1.15)$$

$$\mathcal{A}h\{x(t)\} = \frac{x(t) - x^*(-t)}{2} \quad (1.16)$$

y expresar cualquier señal en función de sus partes hermítica y antihermítica

$$x(t) = \mathcal{H}e\{x(t)\} + \mathcal{A}h\{x(t)\} \quad (1.17)$$

Aun a costa de parecer un triste remedo de un famoso diálogo de los hermanos Marx, podemos cruzar algunas de las clasificaciones anteriores y establecer aseveraciones como “la parte par de la parte hermítica de una señal compleja es una señal real”, o “la parte antihermítica de la parte impar de la parte imaginaria de una señal es idénticamente nula”.

### 1.1.2. Medidas de señales

Empleando los criterios vistos hasta ahora podemos clasificar una señal determinada, pero no podemos distinguir entre dos señales que cumplan los mismos criterios. Un paso más allá en el estudio de señales consiste en representar una señal mediante un conjunto de medidas sobre ella. Veamos a continuación las medidas más importantes.

**Valor medio.** Es la media temporal de la amplitud de la señal y será, en general, un número complejo. Formalmente se define como

- Señales en tiempo continuo

- Aperiódicas

$$\bar{x} = \langle x(t) \rangle \doteq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt \quad (1.18)$$

- Periódicas

$$\bar{x} = \langle x(t) \rangle \doteq \frac{1}{T_0} \int_{(T_0)} x(t) dt \quad (1.19)$$

donde  $\int_{(T_0)}$  denota integración a lo largo de un intervalo de duración  $T_0$ , sea cual sea el inicio de este intervalo.

- Señales en tiempo discreto

- Aperiódicas

$$\bar{x} = \langle x[n] \rangle \doteq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x[n] \quad (1.20)$$

- Periódicas

$$\bar{x} = \langle x[n] \rangle \doteq \frac{1}{N_0} \sum_{n \in \{N_0\}} x[n] \quad (1.21)$$

donde  $\sum_{n \in \{N_0\}}$  denota suma a lo largo de un intervalo de duración  $N_0$ , sea cual sea el inicio de este intervalo.

**Valor de pico.** Es el valor máximo del módulo de la señal

- Señales en tiempo continuo

$$x_p \doteq \max_t |x(t)| \quad (1.22)$$

- Señales en tiempo discreto

$$x_p \doteq \max_n |x[n]| \quad (1.23)$$

**Energía.** Es una medida cuadrática de naturaleza real y no negativa definida como

- Señales en tiempo continuo

$$E_x = \mathcal{E} \{x(t)\} \doteq \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \quad (1.24)$$

- Señales en tiempo discreto

$$E_x = \mathcal{E} \{x[n]\} \doteq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 \quad (1.25)$$

Si  $E_x$  es una cantidad finita, decimos que  $x(t)$  (o  $x[n]$ ) es una señal de energía finita. Si  $E_x$  excede toda cota, decimos que  $x(t)$  (o  $x[n]$ ) es una señal de energía infinita.

**Potencia.** Es una medida cuadrática de naturaleza real y no negativa que resulta de interés para señales de energía infinita y representa la energía por unidad de tiempo. Se define como

- Señales en tiempo continuo

- Aperiódicas

$$P_x = \mathcal{P} \{x(t)\} = \langle |x(t)|^2 \rangle \doteq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt \quad (1.26)$$

- Periódicas

$$P_x = \mathcal{P} \{x(t)\} = \langle |x(t)|^2 \rangle \doteq \frac{1}{T_0} \int_{(T_0)} |x(t)|^2 dt \quad (1.27)$$

- Señales en tiempo discreto

- Aperiódicas

$$P_x = \mathcal{P} \{x[n]\} = \langle |x[n]|^2 \rangle \doteq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |x[n]|^2 \quad (1.28)$$

- Periódicas

$$P_x = \mathcal{P} \{x[n]\} = \langle |x[n]|^2 \rangle \doteq \frac{1}{N_0} \sum_{n \in \{N_0\}} |x[n]|^2 \quad (1.29)$$



### 1.1.3. Señales de interés

Analizaremos a continuación algunas señales concretas que serán de utilidad a lo largo del texto.

**Delta de Dirac.** La función delta de Dirac,  $\delta(t)$ , también conocida como función impulso se emplea para modelar fenómenos físicos en tiempo continuo y corta duración. Estrictamente hablando ni tan siquiera es una función matemática, sino una distribución o una función generalizada. Definimos la función delta de Dirac como la que cumple la igualdad

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t - t_0) dt = x(t_0) \quad (1.30)$$

para cualquier señal  $x(t)$  continua y cualquier instante  $t_0$ . Esta definición admite la interpretación de una descomposición de la señal  $x(t)$  mediante funciones delta reescribiéndola como

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau \quad (1.31)$$

Una interpretación más intuitiva de la función  $\delta(t)$  puede realizarse a partir de sus propiedades:

1. Toma valor cero fuera del instante cero

$$\delta(t) = 0 \quad \forall t \neq 0$$

2. El área bajo la función es igual a 1

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

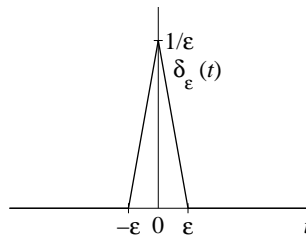
3. Es una función par

$$\delta(t) = \delta(-t)$$

También puede definirse la función delta como

$$\delta(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta_{\epsilon}(t) \quad (1.32)$$

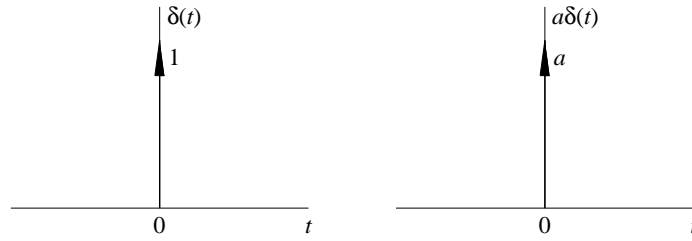
siendo  $\delta_{\epsilon}(t)$  la señal representada en la Figura 1.3. En general, cualquier señal que cumpla las dos



**Figura 1.3.** Señal que origina una función delta de Dirac cuando el valor del parámetro  $\epsilon$  tiende a cero.

últimas propiedades de las reseñadas anteriormente y disponga de un parámetro que permita controlar su duración hasta hacerla instantánea puede dar origen a  $\delta(t)$ .

La función delta de Dirac se representa tal y como muestra la Figura 1.4, dada la imposibilidad de dibujar una función de área 1 y duración instantánea.



**Figura 1.4.** Representación de  $\delta(t)$  y su versión escalada,  $a\delta(t)$ .

**Delta de Kronecker.** Es el equivalente en tiempo discreto de la delta de Dirac pero, al contrario que ésta, su definición no plantea ningún problema

$$\delta[n] \doteq \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \neq 0 \end{cases} \quad (1.33)$$

También puede emplearse para la descomposición de secuencias de la forma

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n - k] \quad (1.34)$$

**Funciones escalón.** Se definen a partir de las funciones delta como

$$u(t) \doteq \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \begin{cases} 0 & \text{para } t < 0 \\ 1 & \text{para } t > 0 \end{cases} \quad (1.35)$$

$$u[n] \doteq \sum_{k=-\infty}^n \delta[k] = \begin{cases} 0 & \text{para } n < 0 \\ 1 & \text{para } n \geq 0 \end{cases} \quad (1.36)$$

**Sinusoides complejas.** Una senoide compleja en tiempo continuo se define mediante la fórmula

$$x(t) = e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \text{sen } \omega t \quad (1.37)$$

donde  $\omega$  es un parámetro de naturaleza real denominado frecuencia.  $\omega$  controla la rapidez de las oscilaciones de la señal y se mide en radianes por segundo. Valores distintos de  $\omega$  dan lugar a señales distintas, y a mayor valor de  $\omega$ , mayor rapidez en la variación de la amplitud de la señal.

Una representación alternativa del parámetro de frecuencia se obtiene mediante su expresión en ciclos por segundo o hercios mediante la igualdad  $f = \omega/2\pi$

$$x(t) = e^{j2\pi ft} = \cos 2\pi ft + j \text{sen } 2\pi ft \quad (1.38)$$

Las sinusoides complejas en tiempo continuo son siempre señales periódicas, siendo su periodo fundamental  $T_0 = 2\pi/\omega = 1/f$ .

Se dice que dos sinusoides de frecuencias  $\omega_1$  y  $\omega_2$  poseen una relación armónica si se cumple que  $\omega_2 = k\omega_1$ , siendo  $k$  un número entero. En ese caso decimos que la senoide de frecuencia  $\omega_2$  es el  $k$ -ésimo armónico de la senoide de frecuencia  $\omega_1$ .

Una senoide compleja en tiempo discreto se define de manera análoga mediante la fórmula

$$x[n] = e^{j\omega n} = \cos \omega n + j \sin \omega n \quad (1.39)$$

Existen, sin embargo, dos diferencias fundamentales respecto a las senoideas complejas en tiempo continuo:

1. Una senoide compleja en tiempo discreto no es siempre una señal periódica. Para que una senoide compleja sea periódica de periodo  $N$  ha de verificarse que  $e^{j\omega n} = e^{j\omega(n+N)}$  para todo  $n$ . Como  $e^{j\omega(n+N)} = e^{j\omega n} e^{j\omega N}$ , ha de cumplirse que  $e^{j\omega N} = 1 = e^{j2\pi k}$  o, lo que es lo mismo, que la frecuencia sea un múltiplo racional de  $2\pi$  ( $2\pi k/N$ , con  $k$  y  $N$  números enteros) para que la senoide sea una señal periódica.
2. Valores distintos de  $\omega$  no generan siempre señales distintas. Si generamos una señal con un valor de  $\omega$  igual a  $\omega_0$  y otra con un valor de  $\omega$  igual a  $(\omega_0 + 2\pi k)$  siendo  $k$  un número entero, comprobamos que ambas señales son la misma, puesto que  $e^{j(\omega_0+2\pi k)n} = e^{j\omega_0 n} e^{j2\pi kn} = e^{j\omega_0 n}$ .

Este hecho nos da un margen de variación efectiva de  $2\pi$  del parámetro  $\omega$  en las senoideas complejas discretas, que suele tomarse como  $(-\pi, \pi]$ .

**Exponenciales reales.** Una exponencial real en tiempo continuo se define mediante la fórmula

$$x(t) = e^{\alpha t} \quad (1.40)$$

donde  $\alpha$  es un parámetro real. Si  $\alpha$  es mayor que cero, la señal es monótona creciente y si  $\alpha$  es menor que cero, monótona decreciente. Cuanto mayor es el valor absoluto de  $\alpha$ , más rápidamente crecerá o decrecerá la función.

Una exponencial real en tiempo discreto se define mediante la fórmula

$$x[n] = r^n \quad (1.41)$$

donde  $r$  es un parámetro real. Si  $r$  es mayor que uno, la señal es monótona creciente, si  $r$  es positivo y menor que uno, monótona decreciente; y si  $r$  es negativo no es monótona ni creciente ni decreciente.

**Exponenciales complejas.** Una exponencial compleja en tiempo continuo se define como el resultado de multiplicar una exponencial real por una senoide compleja

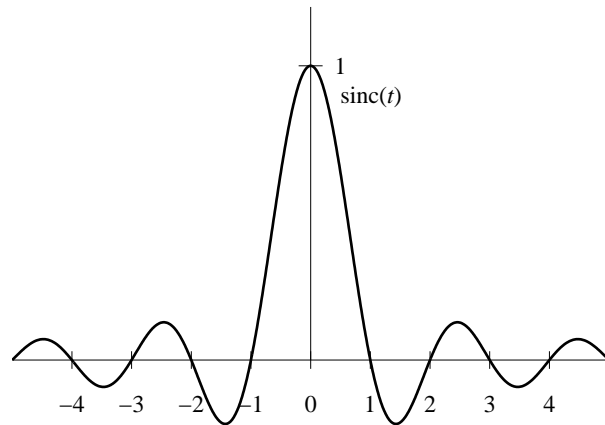
$$x(t) = e^{\alpha t} e^{j\omega t} = e^{(\alpha+j\omega)t} = e^{st} \quad (1.42)$$

donde  $s = \alpha + j\omega$ .

De manera análoga definimos una exponencial compleja en tiempo discreto como el resultado de multiplicar una exponencial real por una senoide compleja

$$x[n] = r^n e^{j\omega n} = (r e^{j\omega})^n = z^n \quad (1.43)$$

donde  $z = r e^{j\omega}$ .



**Figura 1.5.** Función sinc

**Función sinc.** Otra función que aparece comúnmente en análisis de señales y sistemas es la función sinc, definida como

$$\text{sinc}(t) \doteq \frac{\text{sen}(\pi t)}{\pi t} \quad (1.44)$$

y que podemos ver (parcialmente) representada en la Figura 1.5. Es una función par de duración infinita cuyos cruces por cero se producen en todos los números enteros a excepción del cero, donde toma su valor máximo, 1. Conforme  $t$  tiende a infinito la función va decreciendo en amplitud como  $1/t$ .

Su versión en tiempo discreto se obtiene sin más que sustituir  $t$  por  $an$ , donde  $a$  es un parámetro de escala. En el caso en que  $a = 1$  tenemos  $\text{sinc}(n) = \delta[n]$ .

**Función pulso.** Otra función de uso frecuente, definida como

$$\Pi(t) \doteq \begin{cases} 1 & \text{para } |t| < 1/2 \\ 0 & \text{para } |t| > 1/2 \end{cases} \quad (1.45)$$

Su versión en tiempo discreto es mucho menos frecuente.

#### 1.1.4. Espacios de Hilbert para señales de energía finita

Las señales admiten una representación como vectores dentro de un espacio vectorial. Esta representación nos permite dotar de una estructura algebraica a las señales que consideremos en cualquier problema y nos abre la posibilidad de aplicar una gran cantidad de herramientas de análisis y síntesis desarrolladas para espacios vectoriales.

Analicemos en primer lugar la estructura de espacio vectorial para comprobar si las señales pueden ser consideradas como vectores. Un espacio vectorial  $V$  es un conjunto de elementos que denominamos vectores que poseen las siguientes propiedades:

1. Existe una ley de composición interna, que denominamos suma y representamos por el signo  $+$  que, aplicada a dos vectores  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  ( $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ ) de la forma  $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ , da como resultado otro vector del espacio ( $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in V$ ), cumpliendo además las siguientes propiedades:

- 1.1. Conmutativa:  $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V; \mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$ .
- 1.2. Asociativa:  $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V; \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}$ .
- 1.3. Existencia de elemento neutro:  $\exists \mathbf{0} \in V / \forall \mathbf{x} \in V; \mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x}$ .
- 1.4. Existencia de elemento inverso:  $\forall \mathbf{x} \in V \exists (-\mathbf{x}) / \mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ .

2. Existe una ley de composición externa que denominamos producto con un conjunto  $C$  de elementos denominados escalares (que deben tener la estructura de cuerpo) que, aplicada a un escalar  $\alpha$  ( $\alpha \in C$ ) y a un vector  $\mathbf{x}$  ( $\mathbf{x} \in V$ ) de la forma  $\alpha\mathbf{x}$ , da como resultado otro vector del espacio ( $\alpha\mathbf{x} \in V$ ), cumpliendo además las siguientes propiedades:

- 2.1. Asociativa:  $\forall \alpha, \beta \in C; \forall \mathbf{x} \in V; \alpha(\beta\mathbf{x}) = (\alpha\beta)\mathbf{x}$ .
- 2.2. Existencia de elemento neutro:  $\exists 1 \in C / \forall \mathbf{x} \in V; 1\mathbf{x} = \mathbf{x}$ .
- 2.3. Distributiva con respecto a la suma:  $\forall \alpha \in C; \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V; \alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$ .
- 2.4. Distributiva con respecto al producto por un escalar:  $\forall \alpha, \beta \in C; \forall \mathbf{x} \in V; (\alpha + \beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}$ .

Si consideramos el caso general de una señal compleja (tanto en tiempo continuo como en tiempo discreto), la ley de composición interna del espacio vectorial es la suma punto a punto de la señal. Verificando sus propiedades, vemos que cumple que la suma de señales es otra señal; que es irrelevante el orden en que realicemos la suma (esto es, que es conmutativa); que es asociativa; que el elemento neutro es la señal idénticamente nula ( $x(t) = 0$ ), y que el elemento inverso de una señal es la misma señal cambiada de signo; en definitiva, la suma cumple las propiedades de la ley de composición interna. Los escalares son números complejos (que tienen la estructura de cuerpo al igual que los números reales) y la ley de composición externa es la multiplicación de una señal por un número complejo. Podemos verificar fácilmente que también esta operación cumple todas las propiedades requeridas y, por tanto, podemos concluir que las señales cumplen todos los requisitos para ser consideradas como vectores de un espacio vectorial.

La estructura de espacio vectorial genérico como el que hemos expuesto es, sin embargo, demasiado simple como para tener utilidad. Una estructura más elaborada la encontramos en los espacios vectoriales de Hilbert o, simplemente, *espacios de Hilbert*. Esta estructura nos va a permitir, por ejemplo, reinterpretar algunas de las medidas de señales expuestas en el Apartado 1.1.2.

Un espacio de Hilbert es, básicamente, un espacio vectorial con producto escalar<sup>1</sup>. El producto escalar es una aplicación de pares de vectores en el campo de los escalares (los complejos en nuestro caso),  $f: (V, V) \rightarrow C$ , que denotamos como  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$  y que cumple las siguientes propiedades:

1.  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle^*$
2.  $\langle (\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}), \mathbf{z} \rangle = \alpha\langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \beta\langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$
3.  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$
4.  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$

<sup>1</sup>Estrictamente, es un espacio vectorial con producto escalar que cumple la propiedad de completitud. La propiedad de completitud se cumple cuando toda sucesión de Cauchy es convergente en la métrica inducida por el producto escalar. Si no posee esta propiedad el espacio vectorial recibe el nombre de espacio pre-Hilbert.

A partir del producto escalar definimos una norma para el espacio vectorial como

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} \quad (1.46)$$

y, a partir de la norma, una medida de distancia entre vectores

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \quad (1.47)$$

Incluso podemos medir el ángulo  $\theta$  entre dos vectores  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  como

$$\theta = \arccos \left( \frac{\mathcal{R}e\{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle\}}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|} \right) \quad (1.48)$$

Para las señales y, en general, para cualquier espacio vectorial genérico no existe una única posibilidad de definición de producto escalar: podemos escoger como producto escalar cualquier función que cumpla los requisitos establecidos anteriormente. Cada definición de producto escalar da lugar a un espacio de Hilbert distinto, con métrica y norma distinta. Vamos a exponer a continuación la estructura de dos espacios de Hilbert para señales de energía finita, uno para señales en tiempo discreto y otro para señales en tiempo continuo que denominaremos, respectivamente,  $l_2$  y  $L_2$ .

El espacio  $l_2$  se define mediante el siguiente producto escalar

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y^*[n] \quad (1.49)$$

y nos da una medida del parecido o similitud entre dos señales. El producto escalar de dos señales cuya variación con el tiempo sea similar será “grande” y el de dos señales cuya variación con el tiempo sea distinta será “pequeño”. Cuando el producto escalar de dos señales es igual a cero decimos que las señales son *ortogonales*, lo que indica que forman entre ellas un ángulo de  $90^\circ$  (según podemos comprobar a partir de (1.48)).

Una medida derivada del producto escalar es la *función de ambigüedad temporal*,  $r_x[k]$ , que algunos autores denominan función de autocorrelación determinista (y que no debe confundirse con la función de autocorrelación de procesos estocásticos). Se define como el producto escalar de una señal con ella misma desplazada una cantidad  $k$  (que denotaremos como  $\mathbf{x}_k$ ),

$$r_x[k] = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_k \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]x^*[n-k] \quad (1.50)$$

y da una idea de la variabilidad y concentración de la energía de la señal: una señal que fluctúe rápidamente tendrá una función de ambigüedad temporal que varíe rápidamente con respecto a  $k$ , y una señal cuya energía esté concentrada en un corto espacio de tiempo tendrá una función de ambigüedad temporal estrecha. Nótese además que  $r_x[0] = \mathcal{E}\{x[n]\}$ .

La norma inducida por (1.49) resulta ser la raíz cuadrada de la energía de la señal

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = \sqrt{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2} = \sqrt{\mathcal{E}\{x[n]\}} \quad (1.51)$$

y la distancia es la bien conocida distancia euclídea,

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n] - y[n]|^2} \quad (1.52)$$

Como propiedades de interés de la norma podemos citar la desigualdad de Cauchy-Schwarz, que establece

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y^*[n] \right| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| = \sqrt{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2} \cdot \sqrt{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |y[n]|^2} \quad (1.53)$$

cumpléndose la igualdad sólo si  $y[n]$  es una versión escalada en amplitud de  $x[n]$  ( $y[n] = Kx[n]$ , para algún  $K \in \mathbb{R}$ ).

El producto escalar también permite encontrar de forma sencilla la representación de una señal en una base del espacio vectorial. El ejemplo más claro lo encontramos en la descomposición de una secuencia mediante la función delta de Kronecker, (1.34). El conjunto de señales  $\{\delta[n - k], k = -\infty, \dots, 0, \dots, \infty\}$  forma una base ortonormal del espacio vectorial  $l_2$ ; esto es, se cumple que

$$\langle \delta_k, \delta_i \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n - k]\delta[n - i] = \delta[k - i] \quad (1.54)$$

Las coordenadas de una señal  $x[n]$  en cualquier base, y en esta en particular, se obtienen como producto escalar de la señal  $x[n]$  con cada uno de los elementos de la base; en nuestro caso

$$x_k = \langle \mathbf{x}, \delta_k \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta[n - k] = x[k] \quad (1.55)$$

Una vez obtenidas las coordenadas,  $x[n]$  se representa como

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \delta[n - k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n - k]$$

que es exactamente la ecuación (1.34). Bajo esta interpretación queda claro que los valores  $x[k]$  de (1.34) son algo más que un cambio de variable ( $n$  por  $k$ ), pues no representan una señal (un vector) sino que son simplemente las coordenadas (escalares) de  $x[n]$  en una base del espacio vectorial formada por funciones delta.

El espacio  $L_2$  se define de manera análoga a  $l_2$  sin más que cambiar sumatorios por integrales. El producto escalar es

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t) dt \quad (1.56)$$

y tiene el mismo sentido que en  $l_2$ : nos da una medida del parecido o similitud entre dos señales.

La función de ambigüedad temporal posee ahora una variable independiente de naturaleza continua,  $\tau$ , y se define como

$$r_x(\tau) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_\tau \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t - \tau) dt \quad (1.57)$$

La norma inducida por (1.56) también resulta ser la raíz cuadrada de la energía de la señal

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt} = \sqrt{\mathcal{E}\{x(t)\}} \quad (1.58)$$

y la distancia es

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t) - y(t)|^2 dt} \quad (1.59)$$

La desigualdad de Cauchy-Schwarz toma la forma

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t) dt \right| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt} \cdot \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 dt} \quad (1.60)$$

cumpléndose la igualdad sólo si  $y(t) = Kx(t)$ , para algún  $K$ .

El conjunto de funciones delta de Dirac  $\{\delta(t - \tau), \tau \in (-\infty, \infty)\}$  es una base para el espacio  $L_2$ . La obtención de las coordenadas de una señal  $x(t)$  respecto a esta base se realiza mediante (1.30) y la representación de la señal en función de los elementos de la base mediante (1.31).

Para señales de potencia no nula los espacios descritos no tienen utilidad porque, en general, los sumatorios o integrales que definen el producto escalar van a ser divergentes. En este caso podemos plantear otros productos escalares que dan lugar a espacios de Hilbert distintos introduciendo restricciones como, por ejemplo, limitar el intervalo de integración o suma, definir el espacio vectorial sólo para aquellas señales que cumplen determinados requisitos, etc.

## 1.2. SISTEMAS

Un sistema es una representación matemática de una entidad física que ante el estímulo de una o varias magnitudes físicas (señales) ofrece como respuesta otras magnitudes (señales). Las señales que estimulan al sistema se denominan entradas del sistema y las señales con que responde el sistema se denominan salidas del sistema. Si las señales de entrada y salida son en tiempo continuo decimos que el sistema es en tiempo continuo, y si las señales de entrada y salida son en tiempo discreto decimos que el sistema es en tiempo discreto. Aquí vamos a considerar únicamente el caso en que tenemos una única entrada,  $x(t)$  o  $x[n]$ , y una única salida,  $y(t)$  o  $y[n]$ .

Aunque no existe total unanimidad en la literatura, se suelen denominar como *filtros* a los sistemas que diseñamos y construimos con un propósito determinado. En este texto emplearemos el término filtro con este propósito, aunque en ocasiones nos reframamos a los filtros con el nombre genérico de sistemas.

Un sistema queda definido mediante la transformación  $\mathcal{T}$  que realiza de la entrada para obtener la salida

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{T}\{x(t)\} \\ (y[n] &= \mathcal{T}\{x[n]\}) \end{aligned} \quad (1.61)$$

y este apartado está dedicado al estudio de esta transformación. En un caso general, esta no es una tarea fácil porque si bien en algunos casos somos capaces de encontrar una expresión analítica sencilla que relaciona la entrada con las salida del sistema, en otros no, como se muestra en los dos ejemplos siguientes.

### Ejemplo 1.3

Considere el caso de un generador de tensión conectado a una resistencia de valor  $R$  ohmios. El sistema va a consistir en la resistencia, que transforma la tensión que proporciona el generador,  $x(t)$ , en la corriente que atraviesa la resistencia,  $y(t)$ . El sistema queda definido mediante la ecuación

$$y(t) = \mathcal{T}\{x(t)\} = \frac{1}{R}x(t)$$



**Ejemplo 1.4**

Considere una conversación telefónica entre dos personas. El sistema va a consistir en todos los elementos que realizan la transmisión en uno de los sentidos, transformando la presión sonora presente en el micrófono de la primera persona,  $x(t)$ , en la presión sonora a la salida del auricular de la segunda persona,  $y(t)$ . Para encontrar la relación entre  $x(t)$  e  $y(t)$  debemos expresar en primer lugar la relación entre la presión sonora presente en el micrófono y la tensión en bornas del micrófono, a continuación la relación entre esta tensión y la tensión a la salida del terminal telefónico, y así hasta el altavoz presente en el auricular de la segunda persona. Con tiempo y paciencia puede que llegásemos a encontrar la relación entre  $x(t)$  e  $y(t)$ , pero lo peor es que todos esos cálculos valdrían sólo para una conversación específica entre estas dos personas concretas, porque un cambio tan simple como es el establecimiento de una nueva llamada entre estas dos personas trae como consecuencia que la compañía telefónica puede haber cambiado el circuito que emplea para conectar estos dos abonados, y hay que volver a repetir el cálculo.

Este último ejemplo pone de manifiesto que es necesaria una abstracción de los principios físicos que gobiernan el comportamiento del sistema y recurrir, como hemos realizado con las señales, a un tratamiento sistemático.

Para ello vamos en primer lugar a establecer una clasificación de los sistemas para, posteriormente, centrarnos en el estudio de los sistemas que cumplen dos propiedades: linealidad e invarianza temporal. Siempre que sea posible, abordaremos de forma conjunta el estudio de los sistemas en tiempo continuo y en tiempo discreto.

**1.2.1. Clasificación de los sistemas**

Los sistemas pueden clasificarse en función de que cumplan o no determinadas propiedades. Las más importantes son:

**Memoria.** Se dice que un sistema es *sin memoria* cuando la salida en un determinado instante no depende de valores pasados ni futuros de la entrada. Se dice que el sistema tiene memoria cuando incumple esta propiedad.

**Ejemplo 1.5**

El sistema definido por la ecuación

$$y(t) = x^2(t) \quad (1.62)$$

es un sistema sin memoria. El sistema definido por la ecuación

$$y[n] = x[n - 1] \quad (1.63)$$

es un sistema con memoria

**Causalidad.** Se dice que un sistema es *causal* (o no anticipativo) cuando la salida en un determinado instante no depende de valores futuros de la entrada. Se dice que el sistema es no causal cuando incumple esta propiedad. Formalmente podemos expresarlo de la siguiente manera: *un sistema es causal si y sólo si dadas cualesquiera dos señales de entrada  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$  que cumplen  $x_1(t) = x_2(t) \forall t < t_0$ , sus salidas correspondientes,  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  cumplen  $y_1(t) = y_2(t) \forall t < t_0$ .*

Para sistemas en tiempo discreto la definición es idéntica sin más que cambiar  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ ,  $t_0$ ,  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  por, respectivamente,  $x_1[n]$ ,  $x_2[n]$ ,  $n_0$ ,  $y_1[n]$  e  $y_2[n]$ .

De manera análoga, definimos un sistema como *anticausal* (o anticipativo) cuando la salida en un determinado instante no depende de valores pasados de la entrada. Su definición formal se obtiene a partir de la de causalidad sin más que cambiar “<” por “>”.

**Ejemplo 1.6**

El sistema definido por (1.62) es causal y anticausal al mismo tiempo. El sistema definido por (1.63) es causal y no anticausal. El sistema definido por la ecuación

$$y[n] = nx[n + 1] \quad (1.64)$$

es anticausal y no es causal. El sistema definido por la ecuación

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t+1} x(\tau) d\tau \quad (1.65)$$

no es ni causal ni anticausal.

Un aspecto importante relacionado con la causalidad, es que cuando la variable independiente de las señales es el tiempo, todos los sistemas físicamente realizables son causales.

**Invertibilidad.** Se dice que un sistema es *invertible* cuando siempre es posible recuperar la entrada al sistema conociendo la salida. Formalmente: *un sistema es invertible si y sólo si dadas cualesquiera dos señales de entrada  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$  distintas en al menos un punto, sus salidas correspondientes  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  son distintas en al menos un punto.* La definición para sistemas en tiempo discreto es análoga.

**Ejemplo 1.7**

El sistema definido por la Ecuación (1.63) es invertible, y el sistema que obtiene la entrada en función de la salida queda definido por la ecuación

$$x[n] = y[n + 1]$$

El sistema definido por la Ecuación (1.62) no es invertible porque no se puede recuperar el signo de la señal de entrada.

**Estabilidad.** Aunque existen diversos criterios de estabilidad, el más utilizado en el estudio de sistemas es el denominado “entrada acotada, salida acotada” (“*Bounded Input Bounded Output*”, BIBO). Este criterio establece que un sistema es estable si para cualquier entrada acotada la salida está acotada. Formalmente: *si la señal de entrada al sistema,  $x(t)$ , cumple  $|x(t)| < A$  para un valor de  $A$  finito, el sistema es estable BIBO si y sólo si existe un valor real finito  $B$  tal que  $|y(t)| < B$ .* La definición para sistemas en tiempo discreto es análoga. Cuando un sistema no es estable se dice que es inestable.

**Ejemplo 1.8**

El sistema definido por la Ecuación (1.62) es estable BIBO y un valor de  $B$  para el que se cumple la definición es  $A^2$ . El sistema definido por la Ecuación (1.65) no es estable BIBO como demostramos fácilmente haciendo que la entrada sea  $x(t) = 1$ .

**Linealidad.** Un sistema es lineal si cumple las propiedades de aditividad y homogeneidad. Formalmente: *un sistema es lineal si y sólo si dadas cualesquiera dos señales de entrada  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$  cuyas salidas respectivas son  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$ , cuando presentamos a la entrada del sistema la señal  $z(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$ , con  $\alpha$  y  $\beta$  escalares de valor arbitrario, la salida del sistema es  $\mathcal{T}\{\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)\} = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$ .* La definición para sistemas en tiempo discreto es análoga.

**Ejemplo 1.9**

El sistema definido por la Ecuación (1.63) es lineal, como podemos comprobar fácilmente haciendo  $\mathcal{T}\{\alpha x_1[n] + \beta x_2[n]\} = \alpha x_1[n - 1] + \beta x_2[n - 1] = \alpha y_1[n] + \beta y_2[n]$ .

El sistema definido por la Ecuación (1.62) no es lineal, ya que existe algún valor de  $t$  y/o algún par de funciones  $x(t)$  e  $y(t)$  para los que  $\mathcal{T}\{\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)\} = \alpha^2 x_1^2(t) + \beta^2 x_2^2(t) + 2\alpha\beta x_1(t)x_2(t) \neq \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$ .

**Invarianza.** Un sistema es *invariante*, o mejor *invariante en el tiempo*, si el comportamiento del sistema no depende del instante en que se le aplique la excitación. Formalmente: *un sistema es invariante si y sólo si dada una entrada  $x(t)$  y su salida correspondiente  $y(t)$ , se cumple que  $\mathcal{T}\{x(t - t_0)\} = y(t - t_0)$  para cualquier valor de  $t_0$* . La definición para sistemas en tiempo discreto es análoga. Cuando un sistema no es invariante se dice que es *variante* o *variante en el tiempo*.

### Ejemplo 1.10

El sistema definido por la Ecuación (1.62) es invariante ya que  $\mathcal{T}\{x(t - t_0)\} = x^2(t - t_0) = y(t - t_0)$ . El sistema definido por la Ecuación (1.64) es variante ya que existe algún valor de  $n$  y/o alguna función  $x[n]$  para los que  $\mathcal{T}\{x[n - n_0]\} = nx[n - n_0 + 1] \neq y[n - n_0] = (n - n_0)x[n - n_0 + 1]$ .

## 1.2.2. Sistemas lineales e invariantes

Un tipo de sistemas de particular interés son aquellos que cumplen las dos últimas propiedades de las mencionadas anteriormente: linealidad e invarianza. Estos sistemas, independientemente de su complejidad, quedan representados mediante una señal, la respuesta del sistema a la señal impulso; además, la respuesta del sistema ante cualquier otra entrada puede obtenerse mediante una operación, denominada convolución, entre la señal de entrada y la respuesta al impulso del sistema.

### Sistemas lineales e invariantes en tiempo discreto

En un sistema lineal e invariante  $\mathcal{L}\{\cdot\}$ , la salida puede expresarse, aplicando la propiedad de linealidad, como

$$\begin{aligned}
 y[n] &= \mathcal{L}\{x[n]\} \\
 &= \mathcal{L}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n - k]\right\} \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \mathcal{L}\{\delta[n - k]\} \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h_k[n]
 \end{aligned} \tag{1.66}$$

donde

$$h_k[n] = \mathcal{L}\{\delta[n - k]\} \tag{1.67}$$

Aplicando ahora la propiedad de invarianza, tenemos que  $h_k[n] = h_0[n - k]$ , que, sustituido en (1.66), nos permite expresar la salida del sistema como

$$\begin{aligned}
 y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h_k[n] \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h_0[n - k] \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n - k]
 \end{aligned} \tag{1.68}$$

donde  $h[n] = \mathcal{L}\{\delta[n]\}$  es la señal denominada respuesta al impulso del sistema lineal e invariante,  $\mathcal{L}\{\cdot\}$ . La respuesta al impulso permite caracterizar el comportamiento del sistema ante cualquier entrada, calculando la salida mediante (1.68), operación que denominamos *convolución* y denotamos con el símbolo  $*$  de la forma

$$x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n - k] \quad (1.69)$$

### Sistemas lineales e invariantes en tiempo continuo

De manera análoga al caso en tiempo discreto, en un sistema lineal e invariante en tiempo continuo  $\mathcal{L}\{\cdot\}$ , la salida puede expresarse, aplicando la propiedad de linealidad, como

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}\{x(t)\} \\ &= \mathcal{L}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau\right\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \mathcal{L}\{\delta(t - \tau)\} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h_{\tau}(t) d\tau \end{aligned} \quad (1.70)$$

donde

$$h_{\tau}(t) = \mathcal{L}\{\delta(t - \tau)\} \quad (1.71)$$

Aplicando la propiedad de invarianza, tenemos que  $h_{\tau}(t) = h_0(t - \tau)$ , que, sustituido en (1.70), nos permite expresar la salida del sistema como

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h_{\tau}(t) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h_0(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau \end{aligned} \quad (1.72)$$

donde  $h(t) = \mathcal{L}\{\delta(t)\}$  es la señal denominada respuesta al impulso del sistema lineal e invariante,  $\mathcal{L}\{\cdot\}$ . Como en el caso en tiempo discreto, la salida del sistema se calcula mediante la convolución de la señal de entrada con la respuesta al impulso, definiéndose la convolución para tiempo continuo como

$$x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (1.73)$$

### Propiedades de la operación de convolución

Aunque la convolución es la operación que nos permite calcular la salida de un sistema lineal e invariante, podemos considerarla en sí misma como una operación que, a partir de dos señales, ofrece como resultado otra señal. Independientemente de que se trate de su versión para tiempo discreto o tiempo continuo, esta operación tiene las siguientes propiedades:

**Conmutativa.** Considerando dos señales  $x$  e  $y$  (suprimimos los paréntesis o corchetes para tratar de forma simultánea los casos discreto y continuo), se cumple

$$x * y = y * x$$

**Asociativa.** Considerando tres señales  $x$ ,  $y$  y  $z$ , se cumple

$$x * \{y * z\} = \{x * y\} * z$$

**Elemento neutro.** El elemento neutro de la convolución es la señal delta. Considerando la señal  $x$ , se cumple

$$x * \delta = \delta * x = x$$

**Elemento inverso.** Aunque no existe siempre, el elemento inverso de una señal  $x$  respecto a la convolución es la señal  $x_i$  que cumple

$$x * x_i = x_i * x = \delta$$

### Propiedades de los sistemas lineales e invariantes

Supuesto que un sistema cumple las propiedades de linealidad e invarianza, repasemos ahora las cuatro restantes propiedades o criterios de clasificación que utilizábamos en el Apartado 1.2.1. Las demostraciones se proponen como ejercicio. Las formularemos únicamente para el caso discreto, siendo su definición análoga para el caso continuo.

**Memoria.** Un sistema lineal e invariante (en lo sucesivo, al referirnos genéricamente a un sistema, supondremos que cumple las propiedades de linealidad e invarianza) es sin memoria si y sólo si su respuesta al impulso  $h[n]$  toma la forma

$$h[n] = K\delta[n] \tag{1.74}$$

donde  $K$  es una constante, en general compleja.

**Causalidad.** Un sistema es causal si y sólo si su respuesta al impulso  $h[n]$  cumple

$$h[n] = 0 \quad \forall n < 0 \tag{1.75}$$

De manera análoga, un sistema es anticausal si y sólo si su respuesta al impulso  $h[n]$  cumple

$$h[n] = 0 \quad \forall n > 0 \tag{1.76}$$

**Invertibilidad.** Un sistema es invertible si y sólo si existe la inversa respecto a la convolución de su respuesta al impulso,  $h_i[n]$ . Esto es, si existe un  $h_i[n]$  que cumple

$$h_i[n] * h[n] = \delta[n] \tag{1.77}$$

Siendo  $h_i[n]$  la respuesta al impulso de su sistema inverso.

**Estabilidad.** Un sistema es estable BIBO si y sólo si su respuesta al impulso,  $h[n]$ , cumple

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty \quad (1.78)$$

### 1.3. REPRESENTACIÓN DE SEÑALES Y SISTEMAS MEDIANTE TRANSFORMADAS

En muchas ocasiones no es fácil (e incluso no es posible) describir el comportamiento de las señales en función de su variación temporal, o el comportamiento de un sistema lineal e invariante a partir de los valores que toma su respuesta al impulso. Una representación alternativa y complementaria de las señales y los sistemas que puede ayudarnos en esta labor es la proporcionada por lo que denominamos genéricamente como *transformadas*.

En este apartado vamos a estudiar su uso, comenzando por justificar el uso de las transformadas de núcleo exponencial para, posteriormente, describir y analizar la Transformada de Fourier tanto para tiempo continuo como para secuencias, la Transformada Z, la Transformada Discreta de Fourier; finalizando con la representación de las señales que denominaremos como *paso banda* haciendo uso de otra transformada, la de Hilbert.

#### 1.3.1. Respuesta de los sistemas lineales e invariantes a las exponenciales complejas

Si un sistema lineal e invariante con respuesta al impulso  $h(t)$  se excita con una exponencial compleja,  $x(t) = e^{st}$ , a la salida obtenemos

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{s(t-\tau)} d\tau \\ &= e^{st} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau \\ &= e^{st} H(s) \end{aligned} \quad (1.79)$$

que no es sino la misma señal de entrada multiplicada por el escalar  $H(s)$ . En análisis matemático, cuando un operador ofrece como resultado ante una función la misma función multiplicada por un escalar decimos que esa función es una *autofunción* del operador y el escalar es el *autovalor* asociado a dicha autofunción. Así, las exponenciales complejas son autofunciones de todos los sistemas lineales e invariantes. Para cada valor distinto del parámetro  $s$  obtenemos distintas autofunciones, cada una de ellas con su correspondiente autovalor asociado,  $H(s)$ .

Si consideramos dos sistemas lineales e invariantes distintos, con respuestas al impulso  $h_1(t)$  y  $h_2(t)$ , ambos tienen al conjunto de las exponenciales complejas como autofunciones (como el resto de los sistemas lineales e invariantes), pero los autovalores asociados,  $H_1(s)$  y  $H_2(s)$  son distintos. Podemos, pues, pensar en representar cada sistema lineal e invariante mediante el conjunto de los autovalores asociados a las exponenciales complejas. Dicho conjunto, teniendo en cuenta que el parámetro  $s$  puede tomar cualquier valor dentro del plano complejo, podemos considerarlo como una función compleja sobre el plano complejo. Esta función,  $H(s)$ , recibe el nombre de *función de transferencia en el dominio  $s$  o de Laplace*.

La función de transferencia  $H(s)$  queda determinada de manera unívoca a partir de la respuesta al impulso del sistema,  $h(t)$ , mediante la ecuación

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-st} dt \quad (1.80)$$

extraída de (1.79). Esto significa que tanto  $H(s)$  como  $h(t)$  contienen la misma información sobre el sistema, existiendo además una fórmula que nos permite recuperar  $h(t)$  a partir de  $H(s)$  de manera unívoca. Esta fórmula es

$$h(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} H(s) e^{st} ds \quad (1.81)$$

donde  $\sigma$  es cualquier valor para el que la integral (1.80) es convergente cuando  $s = \sigma + j\omega$ .

Analicemos brevemente lo que hemos conseguido hasta ahora. Un sistema lineal e invariante queda unívocamente determinado mediante una señal, su respuesta al impulso, y a partir de esta señal obtenemos otra representación del sistema que consiste en una función sobre el plano complejo. La pregunta que cabe realizar ahora es la siguiente: si la función sobre el plano complejo (la función de transferencia en el dominio de Laplace) la hemos obtenido a partir de una señal, ¿qué nos impide aplicar esta misma operación, (1.80), a cualquier señal, sea o no respuesta al impulso de un sistema lineal e invariante?. La respuesta es muy simple: no hay ninguna razón que lo impida, pero, ¿para qué?. Vamos a verlo.

La Transformada de Laplace para una señal en tiempo continuo  $x(t)$  se define como<sup>2</sup>

$$X(s) \doteq \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt \quad (1.82)$$

siendo  $s$  la variable independiente en el dominio transformado de Laplace, de naturaleza compleja, cuyas partes real e imaginaria denotamos, respectivamente, como  $\sigma$  y  $\omega$  ( $s = \sigma + j\omega$ ). La Ecuación (1.82) también se conoce como ecuación de análisis de la Transformada de Laplace. En general nos referimos a  $X(s)$  como la Transformada de Laplace de la señal  $x(t)$  pero, como hemos visto anteriormente, en el caso en que la señal a la que calculamos la transformada sea la respuesta al impulso de un sistema, el resultado de la transformada recibe el nombre de *función de transferencia*. La Transformada Inversa de Laplace (o ecuación de síntesis de la Transformada de Laplace) se obtiene a partir de (1.82) y es

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s) e^{st} ds \quad (1.83)$$

tomando  $\sigma$  cualquier valor para el que la integral (1.82) es convergente.

Hasta aquí la definición. Veamos ahora qué sucede al calcular la Transformada de Laplace de la

<sup>2</sup>En parte de la literatura esta definición de la Transformada de Laplace se conoce como “bilateral”, en contraposición a la Transformada de Laplace denominada “unilateral”, definida como

$$X(s) \doteq \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

salida de un sistema lineal e invariante,  $y(t)$ ,

$$\begin{aligned}
 Y(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-st} dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} (x(t) * h(t)) e^{-st} dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau e^{-st} dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau) e^{-st} dt d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} h(t') e^{-s(t'+\tau)} dt' d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-s\tau} \int_{-\infty}^{\infty} h(t') e^{-st'} dt' d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-s\tau} H(s) d\tau \\
 &= H(s) \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-s\tau} d\tau \\
 &= H(s)X(s)
 \end{aligned} \tag{1.84}$$

Este resultado, conocido como propiedad de convolución, nos dice que la Transformada de Laplace transforma una operación con señales poco “intuitiva” como la convolución (en el sentido que es difícil predecir a simple vista cómo será el resultado de la convolución de dos señales) en una más sencilla como el producto. Conociendo la función de transferencia de un sistema podemos predecir fácilmente cómo se comportará ante una entrada determinada.

En tiempo discreto realizamos un desarrollo análogo, introduciendo una exponencial compleja,  $x[n] = z^n$ , en un sistema lineal e invariante con respuesta al impulso  $h[n]$

$$\begin{aligned}
 y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] x[n - k] \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] z^{n-k} \\
 &= z^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] z^{-k} \\
 &= z^n H(z)
 \end{aligned} \tag{1.85}$$

donde  $H(z)$  es una función compleja sobre el plano complejo  $z$  que denominamos *función de transferencia en el dominio Z*.



Para una señal genérica en tiempo discreto  $x[n]$  definimos su Transformada Z como<sup>3</sup>

$$X(z) \doteq \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \quad (1.86)$$

siendo  $z$  la variable independiente en el dominio transformado Z, de naturaleza compleja, cuyos módulo y fase denotamos, respectivamente, como  $r$  y  $\omega$  ( $z = r e^{j\omega}$ ). La Transformada Z Inversa (o ecuación de síntesis de la Transformada Z) se obtiene a partir de (1.86) y es

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint X(z) z^{n-1} dz \quad (1.87)$$

donde  $\oint$  denota la integración a lo largo de un contorno circular de radio  $r$  y centrado en el origen, en el sentido contrario a las agujas del reloj, siendo  $r$  cualquier valor para el que el sumatorio (1.86) es convergente.

La Transformada Z también posee la propiedad de convolución; esto es, la salida de un sistema lineal e invariante,  $y[n]$ , puede expresarse en el dominio  $z$  como

$$Y(z) = X(z)H(z) \quad (1.88)$$

siendo  $X(z)$  la Transformada Z de la señal de entrada y  $H(z)$  la función de transferencia del sistema. La demostración de esta propiedad, similar a (1.84), se deja como ejercicio para el lector.

Como regla general que emplearemos a lo largo del texto, cuando hablemos de una señal en el dominio natural o temporal nos referiremos a su expresión cuando la variable independiente es el tiempo,  $x(t)$  o  $x[n]$ , según corresponda. También nos referiremos a  $x(t)$  o  $x[n]$  como forma de onda. Cuando hablemos de una señal en el dominio transformado nos referiremos a su expresión cuando la variable independiente es  $s$ ,  $z$  u  $\omega$  (que veremos a continuación), según el contexto. Cuando hablemos de una señal sin más nos referimos a la propia señal independientemente de la naturaleza de su variable independiente.

### 1.3.2. Transformada de Fourier para señales y sistemas en tiempo continuo

La interpretación y manipulación de las transformadas de Laplace y Z resulta engorrosa en la mayoría de los casos por tratarse de funciones complejas sobre el plano complejo. Dado que estas funciones se obtiene a partir de otra,  $x(t)$  o  $x[n]$ , cuya variable independiente es de naturaleza real (tiempo continuo) o entera (tiempo discreto), podemos decir que la expresión de una señal en los dominios de Laplace o Z es redundante. En otras palabras, si en el dominio natural nos basta con una variable independiente real o entera para representar toda la señal, en el dominio transformado no nos hace falta una variable independiente compleja para realizar el mismo cometido.

Para señales en tiempo continuo podemos particularizar la Transformada de Laplace en cualquier recta en el plano y obtener así una reducción de la dimensionalidad de la variable independiente de

<sup>3</sup>En parte de la literatura esta definición de la Transformada Z se conoce como “bilateral”, en contraposición a la Transformada Z denominada “unilateral”, definida como

$$X(z) \doteq \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

compleja a real. Si la particularizamos en la recta imaginaria,  $s = j\omega$ , obtenemos la *Transformada de Fourier en tiempo continuo*, que definimos para una señal  $x(t)$  como

$$X(j\omega) \doteq X(s) \Big|_{s=j\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (1.89)$$

y es una función compleja de la variable real  $\omega$ . A la variable  $\omega$  se le da el nombre de frecuencia. Por extensión del nombre que recibe en análisis funcional la descomposición de operadores en función de sus autovectores y autovalores, *descomposición espectral*, a  $X(j\omega)$  se le suele denominar espectro de  $x(t)$  o representación espectral de  $x(t)$ .

La transformada inversa (o ecuación de síntesis de la transformada) se obtiene particularizando (1.83) para  $\sigma = 0$ ,

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (1.90)$$

Si la señal sobre la que aplicamos la Transformada de Fourier es la respuesta al impulso de un sistema lineal e invariante,  $h(t)$ , el resultado  $H(j\omega)$  es la *función de transferencia en dominio de Fourier*, también denominada *función de transferencia en el dominio de la frecuencia* o *respuesta en frecuencia* del sistema.

Se dice que existe la Transformada de Fourier de una señal  $x(t)$  si la integral (1.89) es convergente para todo valor de  $\omega$ . Lamentablemente, no existe ninguna condición necesaria y suficiente que garantice su existencia; esto es, no existe ninguna propiedad tal que si la señal la cumple existe su transformada, y si no la cumple no existe su transformada. Somos capaces, eso sí, de encontrar muchas condiciones suficientes (que nos aseguran la existencia de la transformada) como, por ejemplo, que la señal sea de energía finita o que sea absolutamente integrable.

La condición de existencia limita en gran medida la aplicación de la Transformada de Fourier, ya que señales tan comunes como las de amplitud constante o las sinusoides no poseen transformada. Si relajamos el criterio de existencia y permitimos que para un valor de frecuencia la integral diverja (esto es, permitimos la existencia de funciones delta en el dominio transformado) obtenemos lo que se conoce como *Transformada de Fourier Generalizada*, que nos permite obtener una representación en el dominio transformado de señales como las sinusoides complejas, las señales periódicas, la función escalón o las señales de amplitud constante. Salvo indicación en contrario, de ahora en adelante, cuando nos refiramos a la Transformada de Fourier entenderemos que se trata de la Transformada de Fourier Generalizada.

La definición de la Transformada de Fourier por sí misma no nos dice gran cosa si no somos capaces de relacionar de forma intuitiva su forma de onda con su representación espectral. En el Cuadro 1.1 podemos encontrar las transformadas de algunas funciones elementales pero, adicionalmente, conviene realizar los siguientes comentarios:

- La transformada de una señal real es, en general, una función compleja. Véase como ejemplo la transformada de una delta desplazada del origen de tiempos.
- Si la amplitud de la forma de onda varía lentamente, el módulo de su transformada tomará valores mayores para frecuencias cercanas a 0. Un caso extremo lo constituyen las señales de amplitud constante cuya transformada toma valor distinto de cero únicamente en la frecuencia 0.
- Si la amplitud de la forma de onda varía rápidamente, el módulo de su transformada tomará valores grandes para frecuencias lejanas de 0. La transformada de una senoide compleja es una

$\delta(t) \xleftrightarrow{TF} 1$ $\delta(t - t_0) \xleftrightarrow{TF} e^{-j\omega t_0}$ $\frac{1}{\pi t} \xleftrightarrow{TF} -2ju(\omega) - j$ $\text{sinc}(t) \xleftrightarrow{TF} \Pi\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$ $e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{TF} \frac{1}{a + j\omega}$ $\mathcal{R}\{a\} > 0$	$1 \xleftrightarrow{TF} 2\pi \delta(\omega)$ $e^{j\omega_0 t} \xleftrightarrow{TF} 2\pi \delta(\omega - \omega_0)$ $u(t) \xleftrightarrow{TF} \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$ $\Pi(t) \xleftrightarrow{TF} \text{sinc}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$ $te^{-at}u(t) \xleftrightarrow{TF} \frac{1}{(a + j\omega)^2}$ $\mathcal{R}\{a\} > 0$
$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \xleftrightarrow{TF} \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)$ $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j\frac{2\pi k}{T}t} \xleftrightarrow{TF} 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)$	

Cuadro 1.1. Pares transformados básicos.

función delta situada a la frecuencia de la sinusoide; si mayor es la frecuencia de la sinusoide, más rápidamente variará su amplitud y la función delta estará situada a frecuencia más alta.

- El valor de la amplitud de la forma de onda en un instante determinado influye en todas las frecuencias y, análogamente, el valor de la transformada en una frecuencia determinada influye en la amplitud de la forma de onda en todos los instantes. Como ejemplo, podemos comprobar cómo la transformada de una función que toma valor distinto de cero sólo en un punto, la función delta, tiene componentes espectrales en todas las frecuencias, o cómo la transformada inversa de una función delta toma valor no nulo en todos los instantes de tiempo.

En función de los valores que toma  $X(j\omega)$  (o  $H(j\omega)$ ) se establecen las siguientes definiciones sobre señales (o sistemas):

- Si  $X(j\omega)$  (o  $H(j\omega)$ ) toma valor distinto de cero únicamente en un intervalo de longitud finita de frecuencia, se dice que la señal (o sistema) es de banda limitada. En caso contrario, se dice que es de banda ilimitada.
- Si  $X(j\omega) = 0$  (o  $H(j\omega) = 0$ ) para  $|\omega| > \omega_0$  se dice que la señal (o sistema) es paso bajo con frecuencia de corte  $\omega_0$  (equivalentemente, se dice que es paso bajo con ancho de banda  $\omega_0$ ).
- Si  $X(j\omega) = 0$  (o  $H(j\omega) = 0$ ) para  $\omega_1 > |\omega| > \omega_2$  ( $\omega_1 < \omega_2$ ) se dice que la señal (o sistema) es paso banda con frecuencia de corte inferior  $\omega_1$ , frecuencia de corte superior  $\omega_2$  y ancho de banda  $\omega_2 - \omega_1$ .
- Si  $X(j\omega) = 0$  (o  $H(j\omega) = 0$ ) para  $\omega_1 > |\omega| > \omega_2$  ( $\omega_1 > \omega_2$ ) se dice que la señal (o sistema) es de banda eliminada, con frecuencia de corte inferior de la banda eliminada  $\omega_2$ , frecuencia de corte superior de la banda eliminada  $\omega_1$  y ancho de la banda eliminada  $\omega_1 - \omega_2$ .

- Si  $X(j\omega) = 0$  (o  $H(j\omega) = 0$ ) para  $\omega_0 > |\omega|$  se dice que la señal (o sistema) es paso alto con frecuencia de corte  $\omega_0$ . Nótese que ni las señales (o sistemas) de banda eliminada ni paso alto son de banda limitada.

### Propiedades de la Transformada de Fourier en tiempo continuo

A continuación enunciaremos las propiedades más importantes de la Transformada de Fourier en tiempo continuo, haciendo mayor hincapié en las implicaciones en el estudio de señales y sistemas de cada propiedad que en su demostración matemática.

Para evitar su continua repetición, en cada una de las propiedades emplearemos la siguiente notación

$$\begin{aligned} x(t) &\xleftrightarrow{TF} X(j\omega) \\ y(t) &\xleftrightarrow{TF} Y(j\omega) \end{aligned}$$

#### Linealidad.

$$\alpha x(t) + \beta y(t) \xleftrightarrow{TF} \alpha X(j\omega) + \beta Y(j\omega) \quad (1.91)$$

Supone la proporcionalidad entre las amplitudes en los dominios natural y transformado y la conservación de propiedades tales como la distributividad respecto a la suma. La demostración se obtiene fácilmente a partir de la definición de la transformada.

#### Propiedad de convolución.

$$x(t) * y(t) \xleftrightarrow{TF} X(j\omega)Y(j\omega) \quad (1.92)$$

Las implicaciones de esta propiedad son las ya discutidas para la Transformada de Laplace: si  $Y(j\omega)$  es la función de transferencia de un sistema lineal e invariante, la salida del sistema en el dominio de la frecuencia es el producto de la entrada por la función de transferencia. Su demostración se obtiene particularizando la propiedad de convolución de la Transformada de Laplace, (1.84).

#### Desplazamiento temporal.

$$x(t - t_0) \xleftrightarrow{TF} e^{-j\omega t_0} X(j\omega) \quad (1.93)$$

Un desplazamiento temporal de la señal no afecta al módulo de la transformada. Afecta sólo a la fase, sumando un término de valor  $-\omega t_0$ . La propiedad se demuestra de forma directa aplicando (1.89) a  $x(t - t_0)$ .

#### Derivación.

$$\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{TF} j\omega X(j\omega) \quad (1.94)$$

Una derivación en el tiempo supone una atenuación en frecuencias bajas (cerca de cero) y un realce en frecuencias altas. Podemos incluso considerar el derivador como un sistema lineal e invariante cuya función de transferencia es  $H(j\omega) = j\omega$ . La demostración de la propiedad se realiza tomando la derivada de (1.90).

**Integración.**

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \xleftrightarrow{TF} \frac{X(j\omega)}{j\omega} + \pi X(j0)\delta(\omega) \quad (1.95)$$

Es la propiedad contraria a la derivación. Nótese el término  $\pi X(j0)\delta(\omega)$  que aparece cuando el valor de la transformada a frecuencia cero, que se corresponde con la integral  $\int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt$ , es distinto de cero.

**Cambio de escala.**

$$x(at) \xleftrightarrow{TF} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{j\omega}{a}\right) \quad (1.96)$$

siendo  $a$  un valor real. Si comprimimos una señal en el tiempo ( $a > 1$ ), expandimos su espectro, y viceversa. Esto indica que hay un compromiso duración-ancho de banda, que no es sino una manifestación del Principio de Incertidumbre. Basado en esta propiedad puede comprobarse que si una señal es de duración temporal finita, su ancho de banda es infinito y, contrariamente, si una señal tiene ancho de banda finito, su forma de onda tiene duración infinita.

**Dualidad.**

$$X(jt) \xleftrightarrow{TF} 2\pi x(-\omega) \quad (1.97)$$

Esta propiedad nos dice que ambos dominios son (salvo factores de escala e inversiones de la variable independiente), intercambiables. Compruebe en los ejemplos de transformadas de el Cuadro 1.1 cómo algunos de los pares son duales de otros. La demostración de esta propiedad se realiza cambiando  $t$  por  $\omega$  en (1.90).

**Producto.**

$$x(t)y(t) \xleftrightarrow{TF} \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * Y(j\omega) \quad (1.98)$$

La aplicación de esta propiedad al estudio de sistemas no lineales sin memoria (interpretando  $y(t)$  como  $\mathcal{T}\{x(t)\}/x(t)$  y calculando su Transformada de Fourier) nos ayuda a comprender el tipo de transformación que realizan en el dominio de la frecuencia sobre una señal dada. También nos ayuda a comprender el efecto que supone la observación de una señal durante un tiempo limitado (interpretando  $y(t)$  como una señal de valor 1 en el intervalo de observación y 0 fuera de este). Esta propiedad se obtiene de la aplicación de la propiedad de dualidad a la propiedad de convolución.

**Modulación.**

$$e^{j\omega_0 t} x(t) \xleftrightarrow{TF} X(j(\omega - \omega_0)) \quad (1.99)$$

Esta propiedad es fundamental en comunicaciones por ser la base de las modulaciones lineales. Nos dice que multiplicar una señal por una senoide compleja implica un desplazamiento en frecuencia de valor el de la senoide. Se obtiene como caso particular de la propiedad del producto.

**Derivación en frecuencia.**

$$-jt x(t) \xleftrightarrow{TF} \frac{dX(j\omega)}{d\omega} \quad (1.100)$$

Puede obtenerse como caso particular de la propiedad del producto o bien aplicando la propiedad de dualidad a la propiedad de derivación en el tiempo.

**Simetría.**

$$x(-t) \xleftrightarrow{TF} X(-j\omega) \quad (1.101)$$

La aplicación de esta propiedad a señales pares e impares (o a las partes par e impar de una señal) nos dice que si una señal es par ( $x(t) = x(-t)$ ), su transformada también lo es ( $X(j\omega) = X(-j\omega)$ ), y que si una señal es impar ( $x(t) = -x(-t)$ ), su transformada también lo es ( $X(j\omega) = -X(-j\omega)$ ). Se obtiene cambiando  $t$  por  $-t$  en (1.89).

**Conjugación.**

$$x^*(t) \xleftrightarrow{TF} X^*(-j\omega) \quad (1.102)$$

La aplicación de esta propiedad a señales reales e imaginarias puras (o a las partes real e imaginaria de una señal) nos dice que si una señal es real ( $x(t) = x^*(t)$ ), su transformada es hermítica ( $X(j\omega) = X^*(-j\omega)$ ), y que si una señal es imaginaria pura ( $x(t) = -x^*(-t)$ ), su transformada es antihermítica ( $X(j\omega) = -X^*(-j\omega)$ ). También nos dice que la parte real de una señal compleja se transforma en la parte hermítica de la transformada, y que la parte imaginaria de una señal compleja se transforma en la parte antihermítica de la transformada.

Combinando esta propiedad con la anterior podemos establecer aseveraciones como: la transformada de una señal real y par es real y par, o la transformada de una señal real e impar es imaginaria pura e impar. Se obtiene aplicando (1.89) a  $x^*(t)$ .

**Conservación del producto escalar o Relación de Parseval.**

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)Y^*(j\omega) d\omega \quad (1.103)$$

Se demuestra a partir de la propiedad de conservación del producto escalar en el espacio vectorial de señales de energía finita.

**Conservación de la energía o Teorema de Rayleigh.**

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega \quad (1.104)$$

se obtiene como caso particular de la Relación de Parseval y generalmente es confundido con esta. Esta propiedad permite interpretar el módulo al cuadrado de la Transformada de Fourier,  $|X(j\omega)|^2$ , como una densidad de energía: la parte izquierda de la igualdad (1.104) es la medida de la energía de  $x(t)$  y, por tanto, la parte derecha de la igualdad también lo es; si la energía se obtiene mediante integración de una función, esa función puede interpretarse como densidad de energía. Como la variable independiente de esa función es la frecuencia,  $|X(j\omega)|^2$  se denomina *densidad espectral de energía*.

Podemos comprobar además que la densidad espectral de energía es la Transformada de Fourier de la función de ambigüedad temporal definida en (1.57).

Todas estas propiedades se encuentran enumeradas en el Cuadro 1.2.

Linealidad	$\alpha x(t) + \beta y(t) \xleftrightarrow{TF} \alpha X(j\omega) + \beta Y(j\omega)$
Convolución	$x(t) * y(t) \xleftrightarrow{TF} X(j\omega)Y(j\omega)$
Desplazamiento temporal	$x(t - t_0) \xleftrightarrow{TF} e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$
Derivación	$\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{TF} j\omega X(j\omega)$
Integración	$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \xleftrightarrow{TF} \frac{X(j\omega)}{j\omega} + \pi X(j0)\delta(\omega)$
Cambio de escala	$x(at) \xleftrightarrow{TF} \frac{1}{ a } X\left(\frac{j\omega}{a}\right)$
Dualidad	$X(jt) \xleftrightarrow{TF} 2\pi x(-\omega)$
Producto	$x(t)y(t) \xleftrightarrow{TF} \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * Y(j\omega)$
Modulación	$e^{j\omega_0 t} x(t) \xleftrightarrow{TF} X(j(\omega - \omega_0))$
Derivación en frecuencia	$-jt x(t) \xleftrightarrow{TF} \frac{dX(j\omega)}{d\omega}$
Simetría	$x(-t) \xleftrightarrow{TF} X(-j\omega)$
Conjugación	$x^*(t) \xleftrightarrow{TF} X^*(-j\omega)$
Relación de Parseval	$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)Y^*(j\omega) d\omega$
Teorema de Rayleigh	$\int_{-\infty}^{\infty}  x(t) ^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty}  X(j\omega) ^2 d\omega$

Cuadro 1.2. Propiedades de la Transformada de Fourier en tiempo continuo.

### Transformada de Fourier de señales periódicas

Un caso especial en la representación espectral de las señales en tiempo continuo lo constituyen las señales periódicas. Salvo para el caso trivial de una señal idénticamente nula (que puede ser considerada como periódica con el periodo que se desee), la aplicación directa de la ecuación de análisis de la Transformada de Fourier, (1.89), sobre una señal periódica da como resultado una integral divergente.

Para solventar este problema recurrimos al *Desarrollo en Serie de Fourier para señales en tiempo continuo*, que nos permite representar una señal periódica como combinación lineal de sinusoides complejas relacionadas armónicamente. A partir de aquí aplicamos la transformada sobre cada una de las sinusoides y obtenemos la transformada que estábamos buscando.

El Desarrollo en Serie de Fourier de una señal  $x(t)$  periódica con periodo  $T$  se define mediante el siguiente par de ecuaciones

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{(T)} x(t) e^{-j\frac{2\pi k}{T}t} dt \quad (1.105)$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j\frac{2\pi k}{T}t} \quad (1.106)$$

denominadas, respectivamente, *ecuaciones de análisis y síntesis del Desarrollo en Serie de Fourier para tiempo continuo*. Los valores  $a_k$  se denominan *coeficiente del Desarrollo en Serie de Fourier* y

son, en general, de naturaleza compleja.

Aplicando la Transformada de Fourier sobre (1.106) obtenemos

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j\frac{2\pi k}{T}t} \xrightarrow{TF} 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right) \quad (1.107)$$

## Representación de señales y sistemas en el dominio de Fourier para tiempo continuo

La Transformada de Fourier de una señal es, como hemos dicho anteriormente, una función compleja con una variable independiente real. Como tal función compleja podemos representarla en función de sus partes real e imaginaria (coordenadas cartesianas) como

$$X(j\omega) = \mathcal{R}e\{X(j\omega)\} + j\mathcal{I}m\{X(j\omega)\} \quad (1.108)$$

o en función de su módulo y fase (coordenadas polares) como

$$X(j\omega) = |X(j\omega)| e^{j\angle X(j\omega)} \quad (1.109)$$

De estas dos formas alternativas, generalmente se prefiere emplear la representación en módulo y fase. Una de las razones para ello es que la representación de la salida de un sistema lineal e invariante en coordenadas polares toma la forma

$$\begin{aligned} Y(j\omega) &= X(j\omega)H(j\omega) = |X(j\omega)| e^{j\angle X(j\omega)} |H(j\omega)| e^{j\angle H(j\omega)} \\ &= |X(j\omega)| |H(j\omega)| e^{j(\angle X(j\omega) + \angle H(j\omega))} \end{aligned} \quad (1.110)$$

lo que nos permite analizar separadamente los términos de módulo y fase

$$|Y(j\omega)| = |X(j\omega)| |H(j\omega)| \quad (1.111)$$

$$\angle Y(j\omega) = \angle X(j\omega) + \angle H(j\omega) \quad (1.112)$$

Si intentamos realizar la misma descomposición en partes real e imaginaria obtenemos

$$\mathcal{R}e\{Y(j\omega)\} = \mathcal{R}e\{X(j\omega)\} \mathcal{R}e\{H(j\omega)\} - \mathcal{I}m\{X(j\omega)\} \mathcal{I}m\{H(j\omega)\} \quad (1.113)$$

$$\mathcal{I}m\{Y(j\omega)\} = \mathcal{R}e\{X(j\omega)\} \mathcal{I}m\{H(j\omega)\} + \mathcal{I}m\{X(j\omega)\} \mathcal{R}e\{H(j\omega)\} \quad (1.114)$$

donde se mezclan la partes real e imaginaria de la señal de entrada y de la función de transferencia del sistema.

Otra de las razones que aconsejan el empleo de la representación polar es que el cuadrado del módulo de la transformada tiene una interpretación directa como densidad espectral de energía de la señal, como vimos al presentar el Teorema de Rayleigh, (1.104).

Al módulo de la Transformada de Fourier se le suele denominar *característica de amplitud* de la señal (o del sistema, si se trata de una función de transferencia) y, a la fase, *característica de fase*.

Volviendo a (1.111) y (1.112), un sistema contribuye de forma multiplicativa en la característica de amplitud de la señal y aditivamente en la característica de fase. Comencemos analizando la contribución a la característica de fase de un sistema lineal e invariante.

Cuando la característica de fase de un sistema es de la forma

$$\angle H(j\omega) = -t_0\omega \quad (1.115)$$



siendo  $t_0$  una constante real, decimos que el sistema es de *fase lineal*. La interpretación en el dominio natural del efecto que produce un sistema lineal e invariante de fase lineal es clara si escogemos una característica de amplitud como  $|H(j\omega)| = 1$ , porque la salida será  $y(t) = x(t - t_0)$ , como vimos al analizar la propiedad de desplazamiento temporal de la Transformada de Fourier, (1.93).

La característica de fase lineal es deseable en los sistemas que aparecen en una cadena de transmisión, porque implica una “coherencia” temporal. Para medir las desviaciones respecto a la característica de fase lineal se emplea el *retardo de grupo*, definido como

$$\tau(\omega) = -\frac{d \angle H(j\omega)}{d\omega} \quad (1.116)$$

Si un sistema es de fase lineal, su retardo de grupo es constante e igual a  $t_0$  y, según lo expuesto anteriormente, podemos decir que la señal tardaría  $t_0$  segundos en “atravesar” el sistema. Si el retardo de grupo no es constante podemos decir que cada componente frecuencial de una señal,  $X(j\omega_0)$ , tardaría un tiempo  $\tau(\omega_0)$  en atravesar el sistema. Si la señal de entrada al sistema fuese una función delta, que tiene concentrada toda su energía en el instante  $t = 0$ , al atravesar un sistema de retardo de grupo no constante se dispersaría la energía porque cada componente frecuencial tarda un tiempo distinto en atravesarlo. Un ejemplo que puede ayudarnos a comprender la influencia que puede tener la variación de la característica de fase de una señal es el siguiente.

### Ejemplo 1.11

Sea un sistema cuyas características de amplitud y fase son

$$|H(j\omega)| = 1 \quad \text{y} \quad \angle H(j\omega) = \begin{cases} -\pi/2 & \omega > 0 \\ \pi/2 & \omega < 0 \end{cases} \quad (1.117)$$

Si tenemos a la entrada del sistema la función delta ( $x(t) = \delta(t)$ ), a la salida tenemos

$$y(t) = h(t) = \frac{1}{\pi t} \quad (1.118)$$

que pone de manifiesto los efectos que puede tener un sistema de fase no lineal sobre la forma de onda de una señal.

Analicemos ahora la contribución sobre la característica de amplitud de un sistema lineal e invariante. En primer lugar, sería conveniente expresar la contribución del sistema en forma aditiva (como es la de la fase) en lugar de multiplicativa, como está expresada en (1.111). Para lograrlo podemos emplear logaritmos, que transforman sumas en productos. Tomando el logaritmo en ambos lados de (1.111) obtenemos

$$\log |Y(j\omega)| = \log |X(j\omega)| + \log |H(j\omega)| \quad (1.119)$$

Dentro de las medidas logarítmicas, la más empleada es  $20 \log_{10}$  que, cuando se aplica a magnitudes adimensionales como la función de transferencia tiene como unidad de medida el *decibelio* ó *dB*. Aplicándola a (1.119) tenemos

$$20 \log_{10} |Y(j\omega)| = 20 \log_{10} |X(j\omega)| + 20 \log_{10} |H(j\omega)| \quad (1.120)$$

y decimos que el sistema tiene una ganancia de 0 dB a una frecuencia determinada si su característica de amplitud es igual a 1, o que tiene una ganancia de  $-20$  dB (o una atenuación de 20 dB) si su característica de amplitud es igual a 0,1. Por ser adimensional, no podemos decir que la característica de amplitud es  $x$  dB a una frecuencia determinada, pero sí que a esa frecuencia la señal es  $y$  dB mayor o menor que la característica de amplitud a otra frecuencia.

Antes de continuar con el análisis de la característica de magnitud de los sistemas lineales e invariantes conviene definir un tipo especial de sistemas que emplearemos como referencia. Son los *filtros ideales*. Si en la Página 25 nos hemos referido a los sistemas con limitación de banda y, dentro de ellos a los sistemas paso bajo, paso alto, paso banda y banda eliminada, ahora definimos un *filtro paso bajo* como un sistema paso bajo cuya función de transferencia toma únicamente los valores 0 y 1; es decir, la función de transferencia toma la forma

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \omega_0 \\ 0 & |\omega| > \omega_0 \end{cases} \quad (1.121)$$

y decimos que  $\omega_0$  es la frecuencia de corte, o que el ancho de banda del filtro es  $\omega_0$ . A las frecuencias  $|\omega| < \omega_0$  se les denomina banda de paso y a las frecuencias  $|\omega| > \omega_0$ , banda eliminada. Los filtros ideales paso alto, paso banda y banda eliminada se definen de la misma forma. La denominación de *ideales* les viene tanto de su comportamiento (ganancia de 0 dB en la banda de paso y de  $-\infty$  dB en la banda atenuada) como de la imposibilidad de realización (su respuesta al impulso es una función no causal y de duración ilimitada).

Los filtros que físicamente podemos realizar se aproximan en mayor o menor medida a los ideales, pero no existe una frecuencia a partir de la cual su característica de magnitud sea exactamente 0 (atenuación de  $\infty$  dB), aunque sí muy pequeña. Existen, sin embargo, diversos criterios que nos permiten establecer una medida de ancho de banda, entendiendo que no se trata de una limitación estricta de la banda de paso del sistema. Los más empleados son (consideramos los criterios para filtros paso bajo, siendo su extensión al resto de tipos inmediata):

**Ancho de banda 3 dB.** Toma como frecuencia de corte la frecuencia más pequeña para la que el cuadrado de la característica de amplitud está 3 dB por debajo de su valor máximo. En este y en el resto de criterios se emplean medidas de energía y, dado que la densidad espectral de energía de la salida es la de la entrada multiplicada por la característica de amplitud al cuadrado del sistema, todas las medidas estarán referidas al cuadrado de la característica de amplitud.

**Ancho de banda 6 dB.** Igual que el anterior, pero con una referencia de 6 dB.

**Ancho de banda del  $p$  %.** Toma como frecuencia de corte aquella en la que se cumple

$$\frac{\int_{-\omega_0}^{\omega_0} |H(j\omega)|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 d\omega} = \frac{p}{100} \quad (1.122)$$

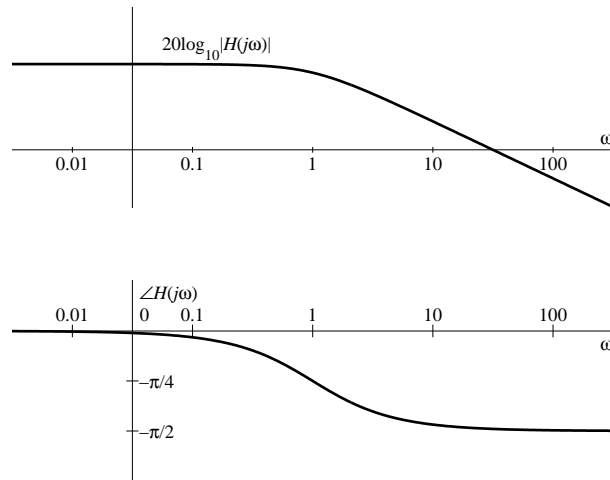
Valores típicos de  $p$  son 90, 95 ó 99.

**Ancho de banda equivalente de ruido.** La frecuencia de corte se define como

$$\omega_0 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 d\omega}{\max_{\omega} |H(j\omega)|^2} \quad (1.123)$$

y representa el ancho de un filtro ideal con ganancia  $\max_{\omega} |H(j\omega)|^2$  en la banda de paso cuya energía de su respuesta al impulso fuese la del filtro que estamos caracterizando.

**Ancho de banda de primer nulo.** Si la característica de amplitud toma valor 0 para alguna frecuencia, consideramos  $\omega_0$  como la más pequeña (en valor absoluto) de estas frecuencias.



**Figura 1.6.** Ejemplo de diagrama de Bode de un sistema.

Por último, para representar gráficamente las características de amplitud y fase de sistemas con respuesta impulsional real suelen emplearse los denominados *diagramas de Bode*, que utilizan también escala logarítmica para la frecuencia, de la forma en que se muestra en la Figura 1.6. Esta representación no es posible si el sistema tiene respuesta impulsional compleja porque, en ese caso, el comportamiento en frecuencias positivas no define totalmente al sistema.

### 1.3.3. Transformada de Fourier para señales y sistemas en tiempo discreto

Si para señales en tiempo continuo obteníamos la Transformada de Fourier como particularización de la Transformada de Laplace en  $s = j\omega$ , la obtención de la *Transformada de Fourier en tiempo discreto* ó *Transformada de Fourier para secuencias* se realiza particularizando la Transformada Z en la circunferencia de radio unidad,  $z = e^{j\omega}$ . Concretamente, la Transformada de Fourier en tiempo discreto de una señal  $x[n]$  se define como

$$X(e^{j\omega}) \doteq X(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} \quad (1.124)$$

y es una función compleja de la variable real  $\omega$ .

La transformada inversa (o ecuación de síntesis de la transformada) se obtiene particularizando (1.87) para  $r = 1$ ,

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad (1.125)$$

Las transformadas de Fourier en tiempo continuo y tiempo discreto son en realidad dos formas distintas de la misma transformada; una de ellas para señales con variable independiente continua y la otra para señales con variable independiente discreta<sup>4</sup>. Dada esta igualdad, nos limitaremos principalmente en este apartado a ir señalando las diferencias que existan entre ambas transformadas.

La primera de ellas es la periodicidad de la Transformada de Fourier en tiempo discreto. Las expresiones  $e^{j\omega_0 n}$  y  $e^{j(\omega_0 + 2\pi k)n}$  con  $k$  un número entero cualquiera son, como discutimos en la Página

<sup>4</sup>Esto no sucede con las transformadas de las que derivan cada una de ellas, Laplace y Z, que son *per se* transformadas distintas.

9, expresiones distintas de la misma secuencia y, por tanto, el valor de la transformada a una frecuencia  $\omega_0$  será igual al de la frecuencia  $\omega_0 + 2\pi k$ . Esto implica que la Transformada de Fourier de cualquier secuencia sea *siempre* una función periódica de periodo  $2\pi$ .

Se dice que existe la Transformada de Fourier de una señal  $x[n]$  si el sumatorio (1.124) es convergente para todo valor de  $\omega$ . Al igual que en tiempo continuo, no existe ninguna condición necesaria y suficiente que garantice su existencia aunque sí encontramos muchas condiciones suficientes como, por ejemplo, que la señal sea de energía finita o que sea absolutamente sumable. En tiempo discreto también vamos a permitir la existencia de funciones delta en el dominio transformado y, salvo indicación en contrario, cuando hablemos de Transformada de Fourier estaremos refiriéndonos a la Transformada de Fourier Generalizada.

En el Cuadro 1.3 podemos encontrar las transformadas de algunas funciones elementales. Podemos comprobar que todas las transformadas que aparecen en el cuadro son funciones periódicas de periodo  $2\pi$ . Nótese también cómo cambia el sentido de “frecuencias altas” de tiempo continuo a tiempo discreto, porque en este último caso una frecuencia  $2\pi$  es equivalente a frecuencia 0, y la frecuencia “más alta” que tenemos en tiempo discreto es  $\pi$ : lo más rápido que podemos hacer cambiar la amplitud de una secuencia consiste en alternar su signo de muestra a muestra.

$\delta[n] \xleftrightarrow{TF} 1$ $\delta[n - n_0] \xleftrightarrow{TF} e^{-j\omega n_0}$ $a \operatorname{sinc}[an] \xleftrightarrow{TF} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Pi\left(\frac{\omega - 2\pi k}{2a\pi}\right)$	$1 \xleftrightarrow{TF} 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$ $e^{j\omega_0 n} \xleftrightarrow{TF} 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi k)$
$u[n] \xleftrightarrow{TF} \frac{1}{1 - e^{j\omega}} + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$ $a^n u[n] \xleftrightarrow{TF} \frac{1}{1 - ae^{j\omega}} \quad  a  < 1$ $(n+1)a^n u[n] \xleftrightarrow{TF} \frac{1}{(1 - ae^{j\omega})^2} \quad  a  < 1$ $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - kN] \xleftrightarrow{TF} \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{N}\right)$ $\sum_{n \in \langle N \rangle} a_k e^{jk(2\pi/N)n} \xleftrightarrow{TF} 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{N}\right)$	

**Cuadro 1.3.** Pares transformados básicos.

Por lo demás, las definiciones realizadas sobre limitación de banda para señales y sistemas en tiempo continuo y las discusiones sobre la forma más adecuada de representar señales y sistemas en el dominio transformado, siguen siendo válidas para tiempo discreto.

### Propiedades de la Transformada de Fourier en tiempo discreto

Antes de entrar a detallar las propiedades de la Transformada de Fourier en tiempo discreto, conviene recordar las propiedades que existían para tiempo continuo y no existen para tiempo discreto y las nuevas propiedades que aparecen en tiempo discreto.

La propiedad más importante que se “pierde” es la propiedad de dualidad, porque ahora la naturaleza de la variable independiente en el dominio natural es discreta y en dominio transformado, continua. Además de esta, las propiedades de derivación e integración son sustituidas por sus equivalentes en tiempo discreto: diferenciación y acumulación. La propiedad de cambio de escala también desaparece como tal porque una operación de escalado en tiempo discreto puede implicar hasta cuatro operaciones: muestreo, supresión de ceros, re inserción de ceros y reconstrucción de valores. La razón es que los procesos de escalado de la variable independiente en tiempo discreto implican, además del propio escalado, pérdida o necesidad de información. De estas cuatro operaciones, dos serán tratadas aquí como propiedades (inserción y supresión de ceros), y las otras dos (muestreo y reconstrucción) merecen una atención específica y serán tratadas en el Apartado 1.4.

Veamos ahora las restantes, comentando únicamente sus diferencias respecto a sus equivalentes en tiempo continuo. Para evitar su continua repetición, en cada una de las propiedades emplearemos la siguiente notación

$$\begin{aligned} x[n] &\xleftrightarrow{TF} X(e^{j\omega}) \\ y[n] &\xleftrightarrow{TF} Y(e^{j\omega}) \end{aligned}$$

#### Linealidad.

$$\alpha x[n] + \beta y[n] \xleftrightarrow{TF} \alpha X(e^{j\omega}) + \beta Y(e^{j\omega}) \quad (1.126)$$

#### Propiedad de convolución.

$$x[n] * y[n] \xleftrightarrow{TF} X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega}) \quad (1.127)$$

#### Desplazamiento temporal.

$$x[n - n_0] \xleftrightarrow{TF} e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega}) \quad (1.128)$$

Observe cómo el término  $e^{-j\omega n_0}$  que multiplica a  $X(e^{j\omega})$  es una función periódica de periodo  $2\pi$  (aunque su periodo fundamental es  $2\pi/n_0$ ) por ser  $n_0$  un número entero.

#### Diferenciación.

$$x[n] - x[n - 1] \xleftrightarrow{TF} (1 - e^{-j\omega}) X(e^{j\omega}) \quad (1.129)$$

Esta propiedad se demuestra a partir de las de desplazamiento temporal y linealidad.

#### Acumulación.

$$\sum_{k=-\infty}^n x[k] \xleftrightarrow{TF} \frac{X(e^{j\omega})}{1 - e^{j\omega}} + \pi X(e^{j0}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k) \quad (1.130)$$

**Inserción de ceros.** Si a partir de la secuencia  $x[n]$  generamos otra secuencia  $x_{0L}[n]$  insertando  $L - 1$  ceros entre dos valores de  $x[n]$  de la forma

$$x_{0L}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n - kL] = \begin{cases} x\left[\frac{n}{L}\right] & \text{si } n = \dot{L} \\ 0 & \text{si } n \neq \dot{L} \end{cases} \quad (1.131)$$

donde  $\dot{L}$  indica múltiplo entero de  $L$ , se cumple que

$$x_{0L}[n] \xleftrightarrow{TF} X(e^{j\omega L}) \quad (1.132)$$

Comparando esta propiedad con la de escalado de la Transformada de Fourier para señales en tiempo continuo, vemos que el sentido es el mismo en el caso en que el factor de escala  $a$  sea igual a  $1/L$ : una expansión del eje temporal. El único término que ha desaparecido es el factor  $1/|a|$ , porque en tiempo discreto no ha variado la energía de la secuencia al insertar los ceros. La demostración de esta propiedad se realiza aplicando la ecuación de análisis de la transformada a (1.131).

**Supresión de ceros.** Si a partir de la secuencia  $x_{0L}[n]$  que cumple

$$x_{0L}[n] = 0 \quad \forall n \neq \dot{L} \quad (1.133)$$

y cuya Transformada de Fourier es  $X_{0L}(e^{j\omega})$  generamos otra secuencia  $x[n] = x_{0L}[nL]$ , se cumple que

$$x[n] \xleftrightarrow{TF} X_{0L}(e^{j\omega/L}) \quad (1.134)$$

Es la propiedad contraria a la anterior y supone una compresión del eje temporal.

**Producto.**

$$x[n]y[n] \xleftrightarrow{TF} \frac{1}{2\pi} X(e^{j\omega}) \underset{2\pi}{\circledast} Y(e^{j\omega}) \doteq \frac{1}{2\pi} \int_{(2\pi)} X(e^{j\theta})Y(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta \quad (1.135)$$

La operación denotada como  $\underset{2\pi}{\circledast}$  y definida en esta ecuación se denomina *convolución periódica* de periodo  $2\pi$ , cuya única diferencia con la convolución no periódica vista hasta ahora es el intervalo de integración. Podemos comprobar que si intentamos realizar una convolución no periódica entre dos señales periódicas, en general, la integral diverge.

**Modulación.**

$$e^{j\omega_0 n} x[n] \xleftrightarrow{TF} X(e^{j(\omega-\omega_0)}) \quad (1.136)$$

**Derivación en frecuencia.**

$$-jn x[n] \xleftrightarrow{TF} \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega} \quad (1.137)$$

**Simetría.**

$$x[-n] \xleftrightarrow{TF} X(e^{-j\omega}) \quad (1.138)$$

**Conjugación.**

$$x^*[n] \xleftrightarrow{TF} X^*(e^{-j\omega}) \quad (1.139)$$

Las discusiones sobre existencia de simetrías realizadas en el caso en tiempo continuo para esta propiedad y la anterior siguen siendo válidas para tiempo discreto.

**Conservación del producto escalar o Relación de Parseval.**

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y^*[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{(2\pi)} X(e^{j\omega})Y^*(e^{j\omega}) d\omega \quad (1.140)$$

**Conservación de la energía o Teorema de Rayleigh.**

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{(2\pi)} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega \quad (1.141)$$

El módulo al cuadrado de la Transformada de Fourier, también en tiempo discreto, admite la interpretación como densidad espectral de energía.

Todas estas propiedades se encuentran enumeradas en el Cuadro 1.4.

Linealidad	$\alpha x[n] + \beta y[n] \xleftrightarrow{TF} \alpha X(e^{j\omega}) + \beta Y(e^{j\omega})$
Convolución	$x[n] * y[n] \xleftrightarrow{TF} X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$
Desplazamiento temporal	$x[n - n_0] \xleftrightarrow{TF} e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$
Diferenciación	$x[n] - x[n - 1] \xleftrightarrow{TF} (1 - e^{-j\omega}) X(e^{j\omega})$
Acumulación	$\sum_{k=-\infty}^n x[k] \xleftrightarrow{TF} \frac{X(e^{j\omega})}{1 - e^{j\omega}} + \pi X(e^{j0}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$
Inserción de ceros	$x_{0L}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n - kL] \xleftrightarrow{TF} X(e^{j\omega L})$
Supresión de ceros	$x[n] = x_{0L}[nL] \xleftrightarrow{TF} X_{0L}(e^{j\omega/L})$
Producto	$x[n]y[n] \xleftrightarrow{TF} \frac{1}{2\pi} X(e^{j\omega}) \otimes_{2\pi} Y(e^{j\omega})$
Modulación	$e^{j\omega_0 n} x[n] \xleftrightarrow{TF} X(e^{j(\omega - \omega_0)})$
Derivación en frecuencia	$-jn x[n] \xleftrightarrow{TF} \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$
Simetría	$x[-n] \xleftrightarrow{TF} X(e^{-j\omega})$
Conjugación	$x^*[n] \xleftrightarrow{TF} X^*(e^{-j\omega})$
Relación de Parseval	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y^*[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{(2\pi)} X(e^{j\omega})Y^*(e^{j\omega}) d\omega$
Teorema de Rayleigh	$\sum_{n=-\infty}^{\infty}  x[n] ^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{(2\pi)}  X(e^{j\omega}) ^2 d\omega$

**Cuadro 1.4.** Propiedades de la Transformada de Fourier en tiempo discreto.

### Transformada de Fourier de secuencias periódicas

Para calcular la Transformada de Fourier de secuencias periódicas evitando la divergencia de la ecuación de análisis recurrimos al *Desarrollo en Serie de Fourier para secuencias*, que nos permite representar una señal periódica como una combinación lineal de un número finito de sinusoides complejas relacionadas armónicamente. A partir de aquí aplicamos la transformada sobre cada una de las sinusoides y obtenemos la transformada de la secuencia.

El Desarrollo en Serie de Fourier de una señal  $x[n]$  periódica con periodo  $N$  se define mediante el siguiente par de ecuaciones

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n \in \langle N \rangle} x[n] e^{-jk \frac{2\pi}{N} n} \quad (1.142)$$

$$x[n] = \sum_{k \in \langle N \rangle} a_k e^{jk \frac{2\pi}{N} n} \quad (1.143)$$

denominadas, respectivamente, ecuaciones de análisis y síntesis del Desarrollo en Serie de Fourier para secuencias. Al igual que sucede con la transformada del mismo nombre, los desarrollos en serie de Fourier para tiempo continuo y tiempo discreto son dos formulaciones del mismo desarrollo en serie. Al igual que la Transformada de Fourier para señales en tiempo discreto, los coeficientes  $a_k$  del Desarrollo en Serie de Fourier para secuencias son periódicos, pero con periodicidad  $N$ .

Aplicando la Transformada de Fourier sobre (1.143) obtenemos

$$x[n] = \sum_{n \in \langle N \rangle} a_k e^{jk(2\pi/N)n} \xleftrightarrow{TF} 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(\omega - k \frac{2\pi}{N}) \quad (1.144)$$

#### 1.3.4. Transformada Z para sistemas lineales e invariantes

La Transformada Z, definida mediante sus ecuaciones de análisis, (1.86), y síntesis, (1.87), (que reproducimos nuevamente por comodidad)

$$X(z) \doteq \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} \quad (1.86)$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint X(z) z^{n-1} dz \quad (1.87)$$

es útil sobre todo para el estudio de sistemas lineales e invariantes. Antes de entrar a analizar la caracterización de estos sistemas, vamos a examinar un concepto de vital importancia en la Transformada Z: la *región de convergencia* (“*Region Of Convergence*”, ROC).

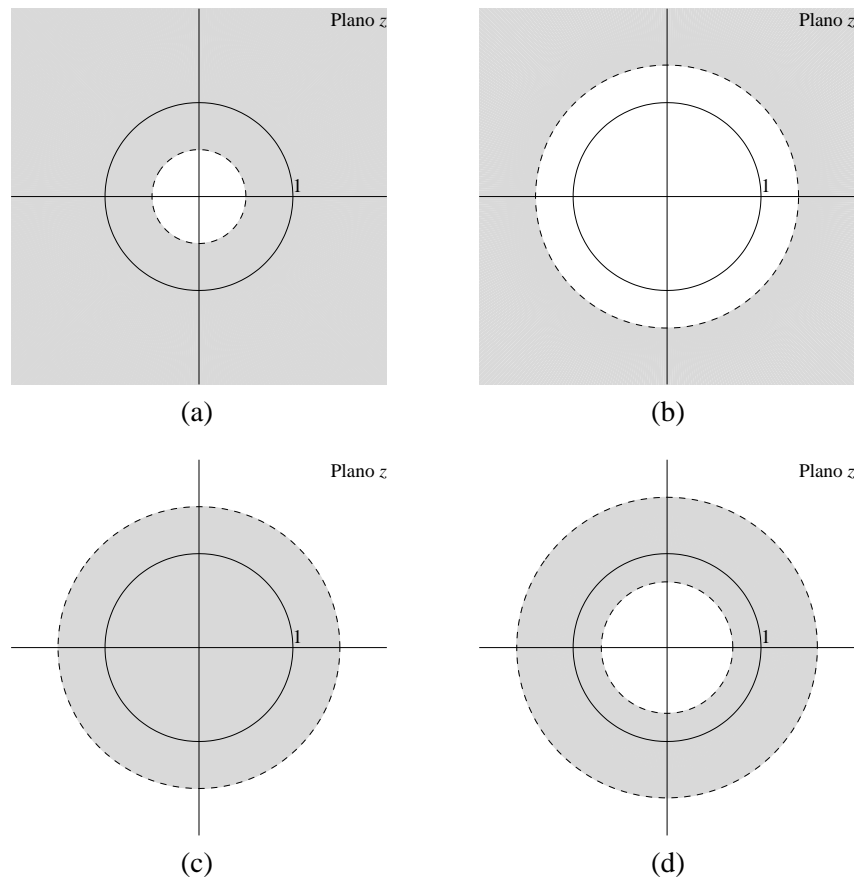
A diferencia de la Transformada de Fourier, la Transformada Z existe siempre<sup>5</sup> pero, en general, no sobre todo el plano complejo  $z$ . Definimos la región de convergencia como el conjunto de todos los valores de  $z$  (región del plano  $z$ ) para los que el sumatorio de la ecuación de análisis, (1.86), es convergente. Los valores de  $z$  para los que  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] z^{-k} = \infty$  se denominan *polos* de  $X(z)$ . La ROC cumple las siguientes propiedades:

Propiedad 1. La ROC es un anillo en el plano  $z$  centrado en el origen.

<sup>5</sup>Estrictamente es siempre que su crecimiento o decrecimiento sea, como mucho, exponencial. Todas las señales de interés en comunicaciones cumplen esta propiedad.



- Propiedad 2. La Transformada de Fourier de una secuencia  $x[n]$  existe si la ROC incluye la circunferencia de radio unitario.
- Propiedad 3. Por definición, la ROC no contiene ningún polo de  $X(z)$ .
- Propiedad 4. Si  $x[n]$  es una secuencia de duración finita, la ROC es todo el plano  $z$  con la posible excepción de  $z = 0$  y/o  $z = \infty$ .
- Propiedad 5. Si  $x[n]$  es una *secuencia de lado derecho* ( $x[n] = 0 \forall n < N_1 < \infty$ ) la ROC es la región exterior a una circunferencia, tal y como se muestra en las Figuras 1.7(a) y 1.7(b) (la ROC es el área sombreada). El punto  $z = \infty$  puede o no pertenecer a la ROC. La Transformada de Fourier existe en un caso como el mostrado en la Figura 1.7(a) porque la ROC incluye la circunferencia unidad y no existe en un caso como el mostrado en la Figura 1.7(b).



**Figura 1.7.** Ejemplos de ROC: exterior a una circunferencia incluyendo la circunferencia unidad (a), exterior a una circunferencia sin incluir la circunferencia unidad (b), interior a una circunferencia (c), y anular (d).

- Propiedad 6. Si  $x[n]$  es una *secuencia de lado izquierdo* ( $x[n] = 0 \forall n > N_1 > -\infty$ ) la ROC es la región interior a una circunferencia, tal y como se muestra en la Figura 1.7(c). El punto  $z = 0$  puede o no pertenecer a la ROC.

Propiedad 7. Si  $x[n]$  es una secuencia que se extiende desde  $-\infty$  a  $\infty$  sin anularse (secuencia indefinida que no es ni de lado derecho ni de lado izquierdo) la ROC es una región anular acotada por dos circunferencias, tal y como se muestra en la Figura 1.7(d).

Propiedad 8. La ROC es una región conexa (no puede estar compuesta, por ejemplo, por dos anillos).

A modo de resumen, podemos decir que la ROC es una región anular acotada por las circunferencias en que se sitúan los polos de  $X(z)$ .

El Cuadro 1.5 muestra la Transformada Z de algunas funciones elementales, donde  $x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z)$  denota que  $X(z)$  es la Transformada Z de la secuencia  $x[n]$ . Observe cómo una única expresión analítica de  $X(z)$  puede corresponder con secuencias distintas, dependiendo de la ROC que escojamos o, visto de otra forma, cómo secuencias distintas pueden dar la misma expresión analítica de  $X(z)$ , pero en ROC distintas. Este hecho nos da a entender que para especificar la Transformada Z de una

Par transformado	ROC
$\delta[n] \xleftrightarrow{Z} 1$	Todo el plano $z$
$\delta[n - n_0] \xleftrightarrow{Z} z^{-n_0}$	Todo el plano $z$ excepto $z = 0$ si $n_0 > 0$ ó $z = \infty$ si $n_0 < 0$
$u[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{1 - z^{-1}}$	$ z  > 1$
$-u[-n - 1] \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{1 - z^{-1}}$	$ z  < 1$
$a^n u[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{1 - az^{-1}}$	$ z  >  a $
$-a^n u[-n - 1] \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{1 - az^{-1}}$	$ z  <  a $
$na^n u[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$	$ z  >  a $
$-a^n u[-n - 1] \xleftrightarrow{Z} \frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$	$ z  <  a $
$e^{j\omega_0 n} u[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{1 - e^{j\omega_0} z^{-1}}$	$ z  > 1$

**Cuadro 1.5.** Pares transformados básicos.

secuencia no es suficiente con especificar la expresión analítica de la transformada, sino también su ROC.

El Cuadro 1.6 muestra las propiedades más importantes de la Transformada Z, donde empleamos la notación

$$\begin{aligned} x[n] &\xleftrightarrow{Z} X(z) \quad \text{ROC} = R_x \\ y[n] &\xleftrightarrow{Z} Y(z) \quad \text{ROC} = R_y \end{aligned}$$

Observe cómo muchas de las operaciones que expresan las propiedades conllevan un cambio de la ROC.

Podemos comprobar cómo todas estas propiedades de la Transformada Z se reducen a sus correspondientes propiedades de la Transformada de Fourier para secuencias si hacemos  $z = e^{j\omega}$ .

Propiedad	Definición	ROC
Linealidad	$\alpha x[n] + \beta y[n] \xleftrightarrow{Z} \alpha X(z) + \beta Y(z)$	Al menos, $R_x \cap R_y$
Convolución	$x[n] * y[n] \xleftrightarrow{Z} X(z)Y(z)$	Al menos, $R_x \cap R_y$
Desplazamiento temporal	$x[n - n_0] \xleftrightarrow{Z} z^{-n_0} X(z)$	$R_x$ , con la posible adición o sustracción de $z = 0$ ó $z = \infty$
Inserción de ceros	$x_{0L}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n - kL] \xleftrightarrow{Z} X(z^L)$	$R_x^{1/L}$
Supresión de ceros	$x[n] = x_{0L}[nL] \xleftrightarrow{Z} X_{0L}(z^{1/L})$	$R_x^L$
Multiplicación por una exponencial compleja	$z_0^n x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z/z_0)$	$ z_0 R_x$
Derivación	$n x[n] \xleftrightarrow{Z} -z \frac{dX(z)}{dz}$	$R_x$
Simetría	$x[-n] \xleftrightarrow{Z} X(1/z)$	$1/R_x$
Conjugación	$x^*[n] \xleftrightarrow{Z} X^*(z^*)$	$R_x$
Teorema del valor inicial	Si $x[n] = 0 \quad \forall n < 0$ , $x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$	
Teorema del valor final	Si $\lim_{n \rightarrow \infty} x[n]$ es finito, su valor es $\lim_{n \rightarrow \infty} x[n] = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})X(z)$	

Cuadro 1.6. Propiedades de la Transformada Z.

### Propiedades de la función de transferencia

En la Página 19 analizamos cuatro propiedades que podían o no cumplir los sistemas lineales atendiendo a las características de la respuesta al impulso. Veamos ahora las implicaciones de estas propiedades sobre la función de transferencia en el dominio  $z$ .

**Memoria.** Un sistema lineal e invariante (en lo sucesivo, al referirnos genéricamente a un sistema, supondremos que cumple las propiedades de linealidad e invarianza) sin memoria tiene una función de transferencia

$$H(z) = K \quad (1.145)$$

donde  $K$  es una constante, en general compleja y su ROC es todo el plano  $z$ . La demostración de esta propiedad se obtiene tomando la Transformada Z de (1.74).

**Causalidad.** En un sistema causal, la ROC de su función de transferencia será la región exterior de una circunferencia incluyendo  $z = \infty$ , porque un sistema es causal si y sólo si su respuesta al impulso  $h[n]$  cumple  $h[n] = 0, \forall n < 0$ . El radio de esta circunferencia será el módulo del polo de

$H(z)$  más alejado del origen pues, como hemos mencionado anteriormente, la ROC está acotada por las circunferencias en que se sitúan los polos de  $X(z)$ .

De manera análoga, la ROC de la función de transferencia de un sistema anticausal será la región interior a una circunferencia incluyendo  $z = 0$ . El radio de esta circunferencia será el módulo del polo de  $H(z)$  más cercano al origen.

**Invertibilidad.** Si un sistema es invertible, la función de transferencia de su sistema inverso será

$$H_i(z) = \frac{1}{H(z)} \quad (1.146)$$

como podemos comprobar sin más que tomar la transformada de (1.77). Lamentablemente, que podamos obtener  $H_i(z)$  no significa que un sistema sea invertible: si, para alguna frecuencia  $\omega_0$  se cumple que  $H(e^{j\omega_0}) = 0$  (denominados *ceros de transmisión*), todo el contenido de la señal de entrada al sistema en esa frecuencia se pierde a su salida, y es imposible de recuperar la señal original.

**Estabilidad.** Un sistema es estable BIBO si y sólo si la ROC de su función de transferencia contiene la circunferencia unidad. La convergencia de la ecuación de análisis de la Transformada Z, (1.86), en la circunferencia unidad se cumple si y sólo si

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]z^{-n}| \Big|_{z=e^{j\omega}} < \infty \quad (1.147)$$

de donde, operando, llegamos a

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]e^{-j\omega n}| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty \quad (1.148)$$

que es exactamente la condición de estabilidad BIBO para sistemas lineales e invariantes, (1.78).

A continuación haremos uso de estas propiedades en una familia concreta de sistemas lineales e invariantes.

### Sistemas definidos por ecuaciones en diferencias con coeficientes constantes

Un caso particular de sistemas ampliamente utilizados son aquellos cuya relación entre entrada y salida queda definida por una ecuación en diferencias con coeficientes constantes, porque su función de transferencia en el dominio  $z$  va a ser una función racional. En este apartado vamos a caracterizar la función de transferencia de estos sistemas<sup>6</sup>.

En un caso general, la ecuación en diferencias que define el sistema toma la forma

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \quad (1.149)$$

donde  $x[n]$  e  $y[n]$  son, respectivamente, la entrada y la salida del sistema. Para asegurar la linealidad e invarianza temporal del sistema es suficiente imponer adicionalmente condiciones iniciales nulas,

<sup>6</sup>Para no repetir continuamente el término “sistemas definidos por ecuaciones en diferencias con coeficientes constantes”, cuando en este apartado nos reframamos genéricamente a “sistemas”, estaremos hablando de este tipo particular de sistemas.

( $x[-\infty] = y[-\infty] = 0$ ), lo que nos garantiza, además, la causalidad del sistema. Alternativamente podemos imponer condiciones finales nulas, ( $x[\infty] = y[\infty] = 0$ ), lo que también nos garantiza linealidad e invarianza a costa de la anticausalidad del sistema. Hablamos de una realización del sistema como lineal, invariante y causal o, simplemente, *realización causal* de (1.149) si imponemos condiciones iniciales nulas, y hablamos de una *realización anticausal* de (1.149) si imponemos condiciones finales nulas.

Para calcular la función de transferencia del sistema, calculamos la Transformada Z de ambos lados de (1.149), teniendo en cuenta que

$$x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z) \quad (1.150)$$

$$y[n] \xleftrightarrow{Z} Y(z) \quad (1.151)$$

aplicando sucesivamente las propiedades de desplazamiento temporal y linealidad de la Transformada Z obtenemos

$$\sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \xleftrightarrow{Z} \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} X(z) \quad (1.152)$$

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] \xleftrightarrow{Z} \sum_{k=0}^N a_k z^{-k} Y(z) \quad (1.153)$$

y de aquí, finalmente

$$\sum_{k=0}^N a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} X(z) \quad (1.154)$$

de donde obtenemos la función de transferencia como

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} \quad (1.155)$$

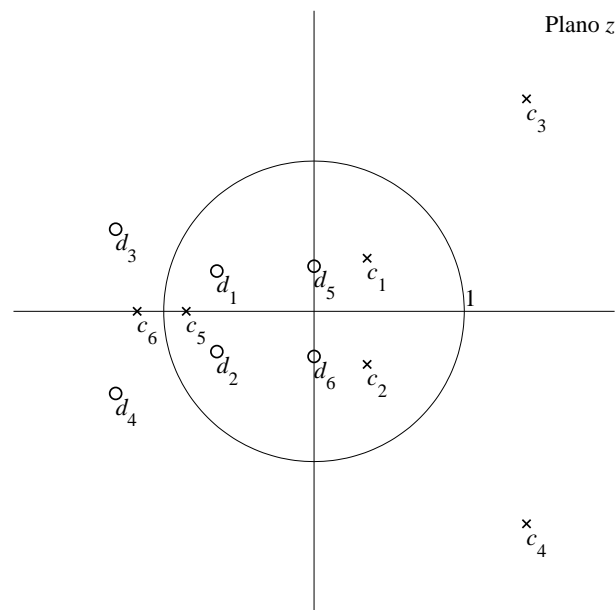
La función de transferencia,  $H(z)$ , toma la forma de un cociente de polinomios en  $z$ , donde los coeficientes de la entrada y sus versiones retrasadas en la ecuación diferencial (1.149),  $b_k$ , son los coeficientes del polinomio del numerador de  $H(z)$  y los coeficientes de la salida y sus versiones retrasadas en la ecuación diferencial (1.149),  $a_k$ , son los coeficientes del polinomio del denominador de  $H(z)$ . Este hecho nos permite calcular la función de transferencia de este tipo de sistemas de forma directa sin más que identificar dichos coeficientes. Las funciones que toman la forma de cociente de polinomios, como  $H(z)$  en (1.155), se denominan *funciones racionales*.

Sin embargo, aunque la obtención de la expresión de la función de transferencia se realice de forma automática empleando los coeficientes  $a_k$  y  $b_k$ , el cociente de polinomios no permite un análisis fácil del comportamiento del sistema. Para realizar este análisis debemos descomponer cada uno de estos polinomios a partir de sus raíces, como

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} = \frac{b_0 \prod_{k=1}^M (1 - d_k z^{-1})}{a_0 \prod_{k=1}^N (1 - c_k z^{-1})} \quad (1.156)$$

donde  $c_k$  y  $d_k$  son las raíces de los polinomios del denominador y numerador, respectivamente. Estas constantes son los ceros ( $d_k$ ) y polos ( $c_k$ ) de la función de transferencia del sistema en el dominio  $z$ . Es necesario recordar que, en general, las constantes  $a_k$ ,  $b_k$ ,  $c_k$  y  $d_k$  son números complejos, pero aun en el caso en que los coeficientes de la ecuación en diferencias  $a_k$  y  $b_k$  sean constantes reales (sistema real), las raíces  $c_k$  y  $d_k$  pueden tomar valores complejos.

Una conclusión importante que podemos extraer de (1.156) es que la función de transferencia queda, a excepción de una ganancia  $b_0/a_0$ , unívocamente determinada por la ubicación de sus polos y ceros. Estos polos y ceros pueden representarse en lo que se conoce como un *diagrama de polos y ceros*, tal y como se muestra en la Figura 1.8.



**Figura 1.8.** Ejemplo de diagrama de polos y ceros.

Sobre el diagrama de polos y ceros podemos determinar rápidamente si las realizaciones causal o anticausal del sistema son estables o no. Si optamos por la realización causal (condiciones iniciales nulas) del sistema, tenemos que su ROC (como la de todo sistema causal) es la región exterior a la circunferencia que contiene al polo de mayor magnitud; esto es

$$|z| > \max_k |c_k| \quad (1.157)$$

Como la condición para que un sistema lineal e invariante sea estable es que la ROC contenga la circunferencia de radio unidad, para que esto suceda, todos los polos,  $c_k$ , deben estar dentro del círculo de radio unidad. La realización causal del ejemplo de la Figura 1.8 se corresponde con un sistema inestable.

Si optamos por la realización anticausal (condiciones finales nulas) del sistema, tenemos que su ROC (como la de todo sistema anticausal) es la región interior a la circunferencia que contiene al polo de menor magnitud; esto es

$$|z| < \min_k |c_k| \quad (1.158)$$

En este caso, la estabilidad de la realización queda garantizada si todos los polos,  $c_k$ , están fuera del

círculo de radio unidad. La realización causal del ejemplo de la Figura 1.8 se corresponde con un sistema inestable.

Afortunadamente, salvo que existan polos sobre la circunferencia unidad, somos capaces de encontrar una realización estable del sistema descomponiendo  $H(z)$  como la combinación de dos sistemas

$$H(z) = H_c(z)H_a(z) \quad (1.159)$$

admitiendo el primero de ellos,  $H_c(z)$ , una realización causal estable y el segundo,  $H_a(z)$ , una realización anticausal estable.  $H_c(z)$  debe contener todos los polos de módulo menor que la unidad y  $H_a(z)$  los polos de módulo mayor que la unidad. Los ceros del sistema podemos repartirlos entre  $H_c(z)$  y  $H_a(z)$  como mejor nos parezca. En el ejemplo de la Figura 1.8,  $H_c(z)$  contendría los polos  $c_1$ ,  $c_2$  y  $c_5$ , y  $H_a(z)$  contendría los polos  $c_3$ ,  $c_4$  y  $c_6$ .

Sobre el diagrama de polos y ceros también podemos determinar rápidamente si un sistema tiene inverso y, caso de tenerlo, su función de transferencia. Si el sistema posee inverso, este, de acuerdo con (1.146), es

$$H_i(z) = \frac{1}{H(z)} = \frac{a_0}{b_0} \frac{\prod_{k=1}^N (1 - c_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^M (1 - d_k z^{-1})} \quad (1.160)$$

cuyo diagrama de polos y ceros es el de  $H(z)$  intercambiando polos por ceros. Para que exista el sistema inverso debe existir la inversa de  $h[n]$  respecto a la convolución,  $h_i[n]$  tal que  $h_i[n] * h[n] = \delta[n]$  y, para que esto suceda, la ROC de  $H(z)H_i(z)$  debe contener la circunferencia unidad<sup>7</sup>. Esto quiere decir que siempre que  $H(z)$  no contenga ni polos ni ceros sobre la circunferencia unidad seremos capaces de encontrar realizaciones (causales y/o anticausales) para  $H(z)$  y  $H_i(z)$  de tal manera que uno sea el sistema inverso del otro.

Un tipo de sistemas de gran interés en comunicaciones es el que admite una realización causal estable con inversa también causal y estable. Para que esto suceda, todos los polos y ceros de la función de transferencia deben estar dentro de la circunferencia unidad. Este tipo de sistemas se conocen con el nombre de *sistemas de fase mínima*, los denotaremos como  $H_{min}(z)$ , y volveremos sobre ellos más adelante.

Analicemos ahora las características de amplitud y fase de la función de transferencia, (1.156),

<sup>7</sup>Esta condición se da siempre que la intersección de las ROC de  $H(z)$  y  $H_i(z)$  sea no nula, ya que entonces podemos encontrar realizaciones de las respuestas al impulso de ambos sistemas y, al realizar la convolución entre ellas se produce la cancelación de polos con ceros y una ROC para  $H(z)H_i(z)$  que es todo el plano complejo.

descomponiendo cada término en la misma en forma polar

$$\begin{aligned}
 |H(z)|e^{j\angle H(z)} &= \left| \frac{b_0}{a_0} \right| e^{j\angle\left(\frac{b_0}{a_0}\right)} \frac{\prod_{k=1}^M |1 - d_k z^{-1}| e^{j\angle(1 - d_k z^{-1})}}{\prod_{k=1}^N |1 - c_k z^{-1}| e^{j\angle(1 - c_k z^{-1})}} \\
 &= \left| \frac{b_0}{a_0} \right| \frac{\prod_{k=1}^M |1 - d_k z^{-1}|}{\prod_{k=1}^N |1 - c_k z^{-1}|} e^{j\angle\left(\frac{b_0}{a_0}\right)} \frac{\prod_{k=1}^M e^{j\angle(1 - d_k z^{-1})}}{\prod_{k=1}^N e^{j\angle(1 - c_k z^{-1})}} \quad (1.161)
 \end{aligned}$$

de donde, haciendo  $z = e^{j\omega}$ , podemos identificar las características de amplitud y fase de la respuesta en frecuencia como

$$|H(e^{j\omega})| = \left| \frac{b_0}{a_0} \right| \left( \prod_{k=1}^M |1 - d_k e^{-j\omega}| \right) \left( \prod_{k=1}^N |1 - c_k e^{-j\omega}|^{-1} \right) \quad (1.162)$$

$$\angle H(e^{j\omega}) = \angle\left(\frac{b_0}{a_0}\right) + \sum_{k=1}^M \angle(1 - d_k e^{-j\omega}) - \sum_{k=1}^N \angle(1 - c_k e^{-j\omega}) \quad (1.163)$$

Finalmente, expresamos la característica de amplitud de la respuesta en frecuencia, (1.162), en dB

$$20 \log_{10} |H(e^{j\omega})| = 20 \log_{10} \left| \frac{b_0}{a_0} \right| + \sum_{k=1}^M 20 \log_{10} |1 - d_k e^{-j\omega}| - \sum_{k=1}^N 20 \log_{10} |1 - c_k e^{-j\omega}| \quad (1.164)$$

De este análisis podemos obtener dos conclusiones:

1. Las características de amplitud y fase de la función de transferencia pueden descomponerse como la suma de características de amplitud y fase de sistemas de orden 1 ( $H(z) = (1 - az^{-1})$  ó  $H(z) = (1 - az^{-1})^{-1}$ ).

De hecho, podemos emplear (1.156) para descomponer el sistema general como una conexión en serie de sistemas de orden 1

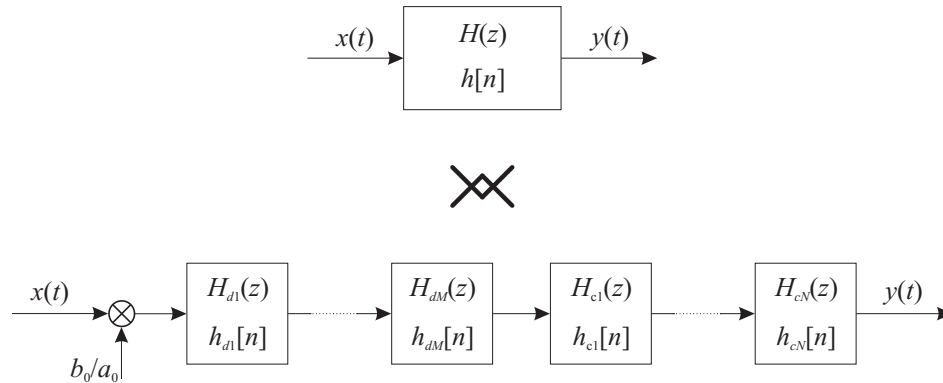
$$\begin{aligned}
 H(z) &= \frac{b_0}{a_0} \left( \prod_{k=1}^M (1 - d_k z^{-1}) \right) \left( \prod_{k=1}^N \frac{1}{(1 - c_k z^{-1})} \right) \\
 &= \frac{b_0}{a_0} \prod_{k=1}^M H_{dk}(z) \prod_{k=1}^N H_{ck}(z) \quad (1.165)
 \end{aligned}$$

en el dominio temporal,

$$h[n] = \frac{b_0}{a_0} h_{d1}[n] * \cdots * h_{dM}[n] * h_{c1}[n] * \cdots * h_{cN}[n] \quad (1.166)$$

y que podemos ver de manera gráfica en la Figura 1.9.





**Figura 1.9.** Descomposición de un sistema genérico como conexión en serie de sistemas de orden 1.

- La única diferencia entre los polinomios de orden 1 del numerador (ceros de  $H(z)$ ) y los del denominador (polos de  $H(z)$ ), es que contribuyen aditivamente o sustractivamente a las características de amplitud y fase del sistema.

A la vista de todo lo anterior, bastará con caracterizar el comportamiento de un sistema de orden 1 para poder analizar las características de un sistema genérico, pues estas no son sino la suma de las características de sistemas de orden 1.

En otras palabras, bastará con analizar el comportamiento de un sistema lineal e invariante caracterizado por la ecuación diferencial

$$y[n] - ay[n - 1] = x[n] \quad (1.167)$$

o, alternativamente

$$y[n] = x[n] - ax[n - 1] \quad (1.168)$$

para poder analizar un sistema genérico. Escogeremos (1.167), cuya función de transferencia resulta ser

$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad (1.169)$$

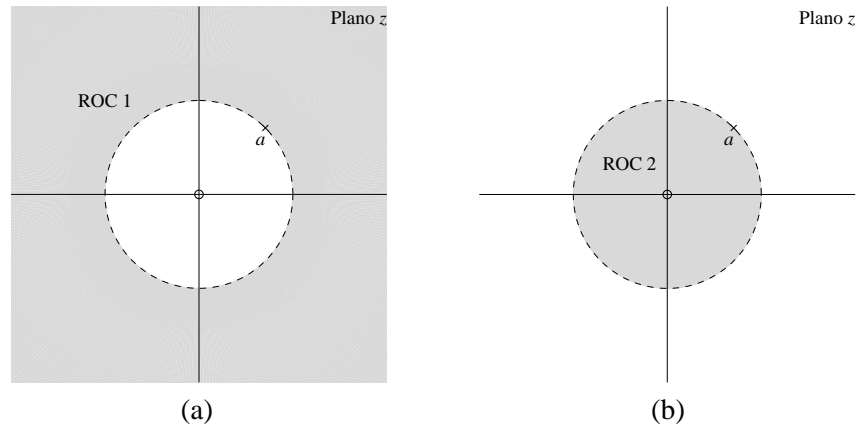
con un polo en  $z = a$  y un cero en  $z = 0$ . Existen dos posibles ROC; una de ellas es la región exterior a la circunferencia de radio  $|a|$ , mostrada en la Figura 1.10(a), que conduce a una realización causal del sistema con una respuesta al impulso (ver Cuadro 1.5)

$$h[n] = a^n u[n] \quad (1.170)$$

La otra posible ROC es la región interior a la circunferencia de radio  $|a|$ , mostrada en la Figura 1.10(b), que conduce a una realización anticausal del sistema con una respuesta al impulso (ver Cuadro 1.5)

$$h[n] = -a^n u[-n - 1] \quad (1.171)$$

Dependiendo del valor que tome  $|a|$ , una ( $|a| \neq 1$ ) o las dos ( $|a| = 1$ ) realizaciones pueden dar lugar a sistemas inestables.



**Figura 1.10.** Posibles ROC para un sistema de orden 1: realización causal (a) y realización anticausal (b).

Para la realización estable (si la hubiese), su característica de amplitud es, expresando  $a$  en forma polar como  $a = re^{j\theta}$ ,

$$\begin{aligned} 20 \log_{10} |H(e^{j\omega})| &= 20 \log_{10} |1 - re^{j\theta} e^{-j\omega}|^{-1} \\ &= -20 \log_{10} |1 - re^{j\theta} e^{-j\omega}| \\ &= -10 \log_{10} (1 + r^2 - 2r \cos(\omega - \theta)) \end{aligned} \quad (1.172)$$

Su característica de fase es

$$\angle H(e^{j\omega}) = \angle (1 - re^{j\theta} e^{-j\omega})^{-1} = -\angle (1 - re^{j\theta} e^{-j\omega}) = -\arctan \left( \frac{r \sin(\omega - \theta)}{1 - r \cos(\omega - \theta)} \right) \quad (1.173)$$

Y su retardo de grupo

$$\tau(\omega) = \frac{r \cos(\omega - \theta) - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos(\omega - \theta)} \quad (1.174)$$

que están representados en la Figura 1.11 para un valor genérico de  $\theta$  y varios valores de  $r$  menores que 1. Para determinar la respuesta de un sistema con un orden genérico no hay sino que sumar características como las mostradas en esta figura.

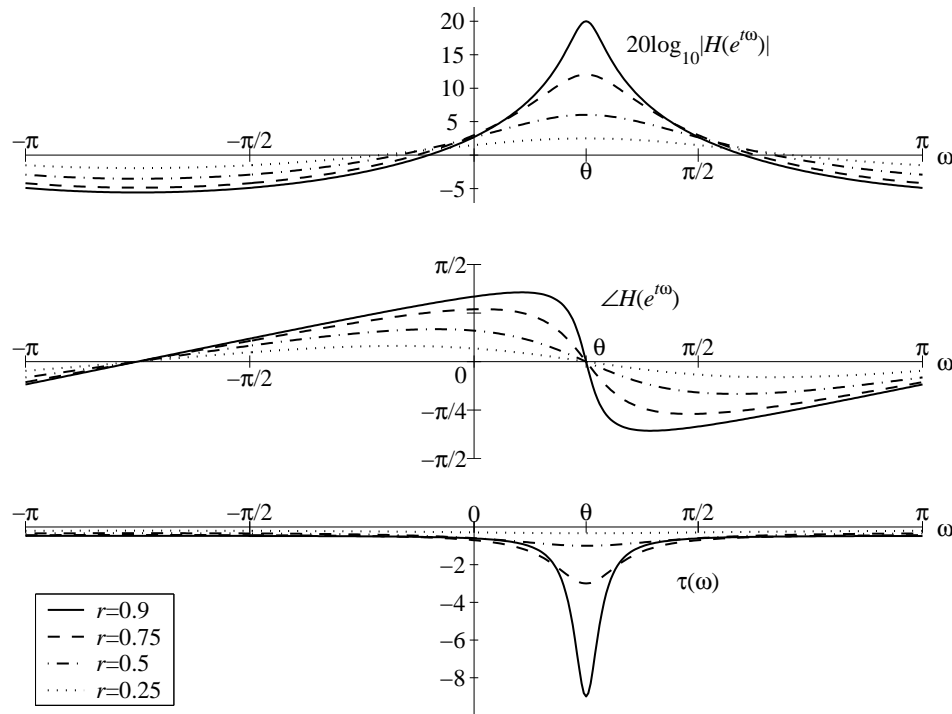
Un tipo de sistema de gran importancia es el denominado *paso todo*, que denotamos como  $H_{all}(z)$  y que, en su forma más simple, tiene una función de transferencia

$$H_{all}(z) = \frac{z^{-1} - a^*}{1 - az^{-1}} \quad (1.175)$$

que posee una característica de amplitud constante

$$|H(e^{j\omega})| = \left| \frac{e^{-j\omega} - a^*}{1 - ae^{-j\omega}} \right| = \left| e^{-j\omega} \frac{1 - a^* e^{j\omega}}{1 - ae^{-j\omega}} \right| = |e^{-j\omega}| \frac{|1 - a^* e^{j\omega}|}{|1 - ae^{-j\omega}|} = 1 \quad (1.176)$$

que es la que le da el nombre. Un sistema paso todo compensa la influencia del polo en  $a$  sobre la característica de amplitud con un cero en  $1/a^*$ . Podemos construir sistemas paso todo del orden que deseemos sin más que combinar sistemas de orden 1 como (1.175).



**Figura 1.11.** Característica de amplitud, característica de fase y retardo de grupo de un sistema de orden 1.

Si combinamos un sistema paso todo con un sistema de fase mínima podemos representar cualquier sistema con función de transferencia racional de la forma

$$H(z) = H_{min}(z)H_{all}(z) \quad (1.177)$$

Para demostrar que cualquier sistema de estas características puede descomponerse de esta forma pensemos en un sistema que tiene todos sus polos y ceros dentro de la circunferencia unidad excepto un polo que está fuera, en una posición  $z = a$ . Ese polo que está fuera de la circunferencia unidad se asigna al sistema paso todo de la forma (1.175), que a su vez genera un cero en  $z = 1/a^*$ . Para anular la influencia de este cero, el sistema de fase mínima coloca un polo en  $z = 1/a^*$ . Si  $a$  estaba fuera de la circunferencia unidad,  $1/a^*$  estará dentro. Visto de otra forma, por cada polo que aparece fuera de la circunferencia unidad en una posición  $z = a$ , multiplicamos y dividimos por  $(z^{-1} - a^*)$  la función de transferencia, lo que no la deja inalterada.  $(z^{-1} - a^*)$  junto con el polo en  $z = a$  se asigna al sistema paso todo y  $(z^{-1} - a^*)^{-1}$  al sistema de fase mínima.

Esta descomposición nos permite, en sistemas que no admitan un inverso causal y estable, realizar una compensación de la característica de amplitud, que resulta de interés en determinadas aplicaciones como la siguiente. Imaginemos que enviamos una señal por un canal de comunicaciones, y a la salida nos llega la señal distorsionada por un sistema  $H(z)$  que no es de fase mínima. Si queremos recuperar la señal que se envió debemos encontrar el sistema inverso pero, ya que eso es imposible, podemos al menos compensar la característica de amplitud que introduce el canal si descomponemos  $H(z)$  de la forma (1.177) y, en lugar del sistema inverso empleamos  $(H_{min}(z))^{-1}$ . En ese caso, la combinación de  $H(z)$  con  $(H_{min}(z))^{-1}$  da como resultado

$$\frac{H(z)}{H_{min}(z)} = \frac{H_{min}(z)H_{all}(z)}{H_{min}(z)} = H_{all}(z) \quad (1.178)$$

Que, si bien no es la identidad, al menos es un sistema paso todo.

Como vemos, los sistemas de fase mínima son de gran interés en comunicaciones. Vamos a enunciar algunas propiedades adicionales a las ya mencionadas.

De entre todos los posibles sistemas que tienen una característica de amplitud  $|H(e^{j\omega})|$  determinada, existe uno que es de fase mínima,  $H_{min}(z)$ , ya que podemos añadirle todos los sistemas paso todo que deseemos sin cambiar  $|H(e^{j\omega})|$ . Un sistema de fase mínima, en comparación con el resto de sistemas, cumple que:

- Su retardo de grupo es el más pequeño para cualquier frecuencia.
- Su característica de fase continua,  $\angle H_{min}(e^{j\omega})$ , es la de menor variación, ya que es el de menor retardo de grupo para cualquier frecuencia. El nombre de sistema de fase mínima proviene de esta propiedad.
- Es el sistema que introduce una menor dispersión de energía (o una mayor concentración de energía). Concretamente, esta propiedad se expresa como

$$\sum_{k=0}^n |h_{min}[k]|^2 \geq \sum_{k=0}^n |h[k]|^2 \quad \forall n \geq 0 \quad (1.179)$$

### 1.3.5. Transformada Discreta de Fourier

Ninguna de las transformadas vistas hasta ahora puede aplicarse a una señal de la que no dispongamos su expresión analítica porque, en primer lugar, necesitamos conocer el valor de la señal en todos los instantes temporales desde  $-\infty$  hasta  $-\infty$  y, en segundo lugar, porque aunque conozcamos y tengamos la capacidad suficiente para guardar en algún sitio el valor de la señal en todos sus instantes temporales, es necesario calcular el valor de la transformada en un número infinito de valores de frecuencia.

Existe un caso en que la limitación no viene por la primera de las razones mencionadas, sino por la segunda. Se trata de las secuencias de longitud finita; secuencias de las que conocemos que su valor es cero fuera de intervalo de duración finita que supondremos, sin pérdida de generalidad, que es  $0 \leq n < N$ . Para determinar esta secuencia necesitamos conocer únicamente  $N$  valores,  $x[0], \dots, x[N-1]$ , pero para determinar su Transformada de Fourier,  $X_N(e^{j\omega})$ , es necesario aplicar la fórmula

$$X_N(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\omega n} \quad (1.180)$$

para cada valor de  $\omega$  entre 0 y  $2\pi$ ; es decir, para infinitos valores de frecuencia. Afortunadamente, en este caso el cálculo de la transformada para un único valor de frecuencia se realiza con un número finito de operaciones ( $N$  multiplicaciones y  $N-1$  sumas, concretamente).

Ahora bien, para señales en tiempo continuo demostramos que no era necesaria la Transformada de Laplace para representar unívocamente la señal en el dominio transformado, sino que bastaba con emplear  $\omega$  en lugar de  $s = \sigma + j\omega$  como única variable independiente (la Transformada de Fourier en tiempo continuo). Para secuencias demostramos que no era necesaria la Transformada Z para lograr el mismo objetivo, sino que bastaba con emplear  $\omega$  tomando valores en un intervalo de longitud  $2\pi$  (la Transformada de Fourier en tiempo discreto) en lugar de  $z = r e^{j\omega}$ . Si en secuencias de longitud finita tenemos únicamente  $N$  grados de libertad para especificar la secuencia, ¿realmente hacen falta

los infinitos valores de frecuencia contenidos entre 0 y  $2\pi$  para representar unívocamente la secuencia en el dominio transformado? Obviamente, la respuesta es no.

Para representar unívocamente la secuencia de longitud finita van a ser necesarios exactamente  $N$  valores de la Transformada de Fourier, (1.180), pero para determinar cuáles serán estos valores hay que preguntarse la razón por la que eran necesarios infinitos valores en la Transformada de Fourier. La Transformada de Fourier de una señal puede interpretarse como una representación de la señal empleando una base de sinusoides complejas, de la misma forma que la señal en el dominio natural puede interpretarse como una representación de la señal empleando una base de funciones delta ((1.31) para tiempo continuo y (1.34) para tiempo discreto), y la operación en sí de la Transformada de Fourier puede interpretarse como un cambio de base. Las sinusoides complejas forman una base para la señales de duración ilimitada<sup>8</sup> porque, en tiempo continuo, dos sinusoides de frecuencia distinta son ortogonales

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega_1 t} (e^{j\omega_2 t})^* dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(\omega_1 - \omega_2)t} dt = \begin{cases} \infty & \text{si } \omega_1 = \omega_2 \\ 0 & \text{si } \omega_1 \neq \omega_2 \end{cases} \quad (1.181)$$

y son un conjunto generador del espacio de señal, como demuestra la ecuación de síntesis de la Transformada de Fourier. Si no incluimos las sinusoides de todas las frecuencias posibles no se cumple la propiedad de conjunto generador. Para tiempo discreto obtenemos el mismo resultado si restringimos los valores de frecuencia a los contenidos entre 0 y  $2\pi$ . Los  $N$  valores de frecuencia que buscamos o, equivalentemente, las  $N$  sinusoides que buscamos, deben ser ortogonales y generar cualquier secuencia de longitud  $N$ .

Si empleamos los valores de frecuencia  $\omega_k = k(2\pi/N)$ , con  $k = 0, \dots, (N-1)$ , tenemos que las sinusoides de dichas frecuencias son ortogonales en un intervalo de longitud  $N$ ,

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{jk(2\pi/N)n} (e^{jr(2\pi/N)n})^* = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j(k-r)(2\pi/N)n} = \begin{cases} N & \text{si } k - r = \dot{N} \\ 0 & \text{si } k - r \neq \dot{N} \end{cases} \quad (1.182)$$

y son capaces de generar cualquier señal sobre el intervalo  $0 \leq n < N$ , como demuestra la ecuación de síntesis del Desarrollo en Serie de Fourier para secuencias, (1.143). Tomando muestras de  $X_N(e^{j\omega})$  en estos valores de frecuencia tendremos unívocamente determinada la secuencia  $x[n]$  de longitud finita.

La secuencia de valores  $X[k] \doteq X_N(e^{jk(2\pi/N)})$ , con  $k = 0, \dots, (N-1)$  es la que denominamos *Transformada Discreta de Fourier* (“*Discrete Fourier Transform*”, DFT) de longitud  $N$  de la secuencia  $x[n]$ , que definimos formalmente como

$$X[k] = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk(2\pi/N)n} & 0 \leq k < N \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \quad (1.183)$$

y que nos permiten reconstruir la secuencia  $x[n]$  como

$$x[n] = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{jk(2\pi/N)n} & 0 \leq n < N \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \quad (1.184)$$

<sup>8</sup>En realidad no son una base para *todas* las señales de duración ilimitada, sino para aquellas que cumplen determinadas propiedades matemáticas que resultan irrelevantes en la práctica.

También nos referimos a (1.183) como ecuación de análisis de la DFT y a (1.184) como ecuación de síntesis de la DFT, DFT inversa o IDFT. La relación entre  $x[n]$  y  $X[k]$  la denotaremos como

$$x[n] \xleftrightarrow[N]{DFT} X[k] \quad (1.185)$$

Sobre la definición de la DFT conviene realizar los siguientes comentarios:

- La evaluación de la DFT se realiza comúnmente de forma numérica, sin necesidad de recurrir a expresiones analíticas de las señales. Para calcular los  $N$  valores  $X[k]$  a partir de  $x[n]$  es necesario realizar del orden de  $N^2$  multiplicaciones y sumas complejas. Existen además una familia de algoritmos (procedimientos numéricos) que se conocen con el nombre genérico de *Transformada Rápida de Fourier* (“Fast Fourier Transform”, FFT) que emplean del orden de  $N \log_2 N$  multiplicaciones complejas para el cálculo de la DFT. A pesar de su nombre, no debemos de confundir la FFT con una transformada, pues es simplemente un procedimiento numérico rápido (más bien, todo un conjunto de procedimientos) para el cálculo de la DFT.
- Bajo las restricciones empleadas, el resultado de la DFT coincide con muestras de la Transformada de Fourier de la secuencia, pero no debe confundirse con esta. Esta identidad se sigue manteniendo si la longitud de la secuencia es menor ( $x[n] = 0$  para todo  $n < 0$  y  $n \geq N_0$ , con  $N_0 < N$ ).

Además, nada nos impide aplicar la ecuación de análisis de la DFT sobre una secuencia de longitud mayor que  $N$ , o a una secuencia que, siendo de longitud menor o igual que  $N$ , toma valores distintos de cero en otro intervalo distinto al  $0 \leq n < N$ , o incluso a una secuencia de longitud ilimitada. Al fin y al cabo, sólo se trata de una transformación, (1.183), que aplicamos sobre la secuencia que deseemos. Sin embargo, en estos casos deja de ser cierta la equivalencia entre DFT y Transformada de Fourier porque existen valores de la secuencia (los que están fuera del intervalo  $0 \leq n < N$ ) que son tenidos en cuenta para el cálculo de la Transformada de Fourier y no para el cálculo de la DFT. Obviamente, en estos casos, la ecuación de síntesis no da como resultado la secuencia original.

- Existe un alto paralelismo entre el Desarrollo en Serie de Fourier para secuencias ((1.142) y (1.143), Página 38) que puede llevarnos a confundir los coeficientes del desarrollo en serie,  $a_k$ , con los valores  $X[k]$  que proporciona la DFT. De hecho, las ecuaciones de análisis y síntesis de ambas son prácticamente idénticas si exceptuamos el factor  $1/N$ , que en el desarrollo en serie se encuentra en la ecuación de análisis y en la DFT en la ecuación de síntesis.

Aunque las ecuaciones sean prácticamente idénticas, existe una diferencia fundamental: en el desarrollo en serie se realiza una extensión periódica fuera del intervalo de 0 a  $N - 1$ , tanto de los valores de amplitud de la señal como de los coeficientes del desarrollo en serie, mientras que en la DFT, fuera del intervalo de 0 a  $N - 1$ , se supone que tanto  $x[n]$  como  $X[k]$  son nulos. Esto trae como consecuencia que la señal que reconstruye el Desarrollo en Serie de Fourier sea una secuencia de energía infinita y la que reconstruye la DFT sea una secuencia de energía finita, o que el espectro de la señal que reconstruye el desarrollo en serie esté compuesto por funciones delta y el que reconstruye la DFT sea un espectro continuo de valores acotados.

## Propiedades de la Transformada Discreta de Fourier

A continuación enunciamos algunas de las propiedades de la DFT, haciendo mayor hincapié en aquellas que suponen una novedad respecto a sus correspondientes propiedades de la Transformada de Fourier.

Además de (1.185), denotamos

$$y[n] \xleftrightarrow[N]{DFT} Y[k]$$

y, en aquellas operaciones en que se vea involucrada más de una secuencia, suponemos que  $N$  es mayor o igual que la longitud de cualquiera de las dos.

### Linealidad.

$$\alpha x[n] + \beta y[n] \xleftrightarrow[N]{DFT} \alpha X[k] + \beta Y[k] \quad (1.186)$$

### Convolución circular.

$$x[n] \otimes y[n] \xleftrightarrow[N]{DFT} X[k]Y[k] \quad (1.187)$$

Si multiplicamos punto a punto las DFT de dos secuencias el resultado en el dominio natural no es una convolución como la conocemos hasta ahora, periódica o no periódica, sino lo que denominamos *convolución circular* de módulo  $N$ , que denotamos con el símbolo  $\otimes$  y representa la operación

$$x[n] \otimes y[n] \doteq \begin{cases} \sum_{l=0}^{N-1} x[l] y[((n-l))_N] & 0 \leq n < N \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \quad (1.188)$$

donde  $(( \ ))_N$  representa la operación módulo  $N$ , cuyo resultado va a estar siempre en el rango  $0 \leq n < N^9$ . La convolución que conocíamos hasta ahora la denominamos *convolución lineal* en contraposición a la convolución circular.

### Desplazamiento circular.

$$x[((n-n_0))_N] \xleftrightarrow[N]{DFT} e^{-jk(2\pi/N)n_0} X[k] \quad (1.189)$$

El efecto de multiplicar la DFT de una secuencia por  $e^{-jk(2\pi/N)n_0}$ , lo que sería el equivalente en la Transformada de Fourier de multiplicar  $X(e^{j\omega})$  por  $e^{-j\omega n_0}$ , no se traduce en un desplazamiento *lineal* (más bien, no puede traducirse en un desplazamiento lineal porque el resultado de la DFT inversa va a ser cero fuera del intervalo  $0 \leq n < N$ ), sino en un desplazamiento *circular*, donde la variable independiente se opera módulo  $N$ .

**Inserción de ceros.** Si a partir de la secuencia  $x[n]$  de longitud  $N$  generamos otra secuencia  $x_{0L}[n]$  de longitud  $NL$  insertando  $L-1$  ceros entre dos valores de  $x[n]$  de la forma

$$x_{0L}[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] \delta[n - kL] = \begin{cases} x \left[ \frac{n}{L} \right] & \text{si } n = \dot{L} \text{ y } 0 \leq n < NL \\ 0 & \text{si } n \neq \dot{L} \end{cases} \quad (1.190)$$

se cumple que

$$x_{0L}[n] \xleftrightarrow[NL]{DFT} X[((k))_N] \quad (1.191)$$

El resultado de la inserción de ceros en la Transformada de Fourier es una compresión del espectro por un factor  $L$ . Como en la DFT de  $NL$  puntos muestreamos en las frecuencias  $k(2\pi/NL)$ , el resultado de la inserción de ceros va a ser el mismo resultado pero replicado  $L$  veces.

<sup>9</sup>Como recordatorio, el resultado de la operación  $((l))_m$ , siendo  $l$  y  $m$  números enteros, es el resto de la división entera de  $l$  por  $m$ . Por ejemplo,  $((3))_5 = 3$ ,  $((5))_5 = 0$ ,  $((6))_5 = 1$ ,  $((104))_5 = 4$ , etc.

**Supresión de ceros.** Si a partir de la secuencia  $x_{0L}[n]$  de longitud  $NL$  que cumple

$$x_{0L}[n] = 0 \quad \text{si } n \neq \dot{L} \quad \text{ó } n < 0 \quad \text{ó } n \geq NL \quad (1.192)$$

y cuya DFT es  $X_{0L}[k]$  generamos otra secuencia  $x[n] = x_{0L}[nL]$ , se cumple que

$$x[n] \xleftrightarrow[N]{DFT} X_{0L}[k] \quad (1.193)$$

**Dualidad.**

$$X[n] \xleftrightarrow[N]{DFT} Nx[((-n))_N] \quad (1.194)$$

Volvemos a recuperar esta propiedad que teníamos en la Transformada de Fourier en tiempo continuo y que perdimos en la Transformada de Fourier de secuencias, porque aquí la naturaleza de las variables independientes de los dominios natural y transformados es la misma (variables enteras)

**Producto.**

$$x[n]y[n] \xleftrightarrow[N]{DFT} \frac{1}{N} X[k] \otimes Y[k] \quad (1.195)$$

Nos vuelve a aparecer otra operación de convolución circular, ahora en el dominio transformado, que se realiza de idéntica forma a (1.188)

**Modulación.**

$$e^{jk_0(2\pi/N)n}x[n] \xleftrightarrow[N]{DFT} X[((k - k_0))_N] \quad (1.196)$$

Para que una modulación se traduzca en un desplazamiento (circular) en la DFT, la frecuencia de la senoide ha de ser un múltiplo entero de  $2\pi/N$ .

**Simetría.**

$$x[((-n))_N] \xleftrightarrow[N]{DFT} X[((-k))_N] \quad (1.197)$$

**Conjugación.**

$$x^*[n] \xleftrightarrow[N]{DFT} X^*[((-k))_N] \quad (1.198)$$

Las definiciones de paridad, imparidad, hermiticidad y antihermiticidad se refieren ahora a operaciones módulo  $N$  sobre la variable independiente. Por lo demás, se siguen conservando las propiedades de simetría de la Transformada de Fourier porque, al fin y al cabo, los coeficientes de la DFT no son sino muestras de aquélla.

Todas estas propiedades se encuentran enumeradas en el Cuadro 1.7.

## Convolución lineal y convolución circular

La convolución lineal y la convolución circular de dos secuencias de longitud finita no proporcionan, en general, el mismo resultado. En determinadas situaciones, como la que describiremos a continuación, la realización de una convolución lineal mediante una convolución circular conlleva ventajas computacionales (menor número de operaciones), pero para poder aprovecharlas es necesario establecer las condiciones en que ambas operaciones son equivalentes.



Linealidad	$\alpha x[n] + \beta y[n] \xleftrightarrow[N]{DFT} \alpha X[k] + \beta Y[k]$
Convolución circular	$x[n] \circledast y[n] \xleftrightarrow[N]{DFT} X[k]Y[k]$
Desplazamiento circular	$x[((n - n_0))_N] \xleftrightarrow[N]{DFT} e^{-jk(2\pi/N)n_0} X[k]$
Inserción de ceros	$x_{0L}[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k]\delta[n - kL] \xleftrightarrow[NL]{DFT} X[((k))_N]$
Supresión de ceros	$x[n] \xleftrightarrow[N]{DFT} X_{0L}[k]$
Dualidad	$X[n] \xleftrightarrow[N]{DFT} Nx[((-n))_N]$
Producto	$x[n]y[n] \xleftrightarrow[N]{DFT} \frac{1}{N} X[k] \circledast Y[k]$
Modulación	$e^{jk_0(2\pi/N)n} x[n] \xleftrightarrow[N]{DFT} X[((k - k_0))_N]$
Simetría	$x[((-n))_N] \xleftrightarrow[N]{DFT} X[((-k))_N]$
Conjugación	$x^*[n] \xleftrightarrow[N]{DFT} X^*[((-k))_N]$

Cuadro 1.7. Propiedades de la Transformada Discreta de Fourier.

Imaginemos que queremos calcular la convolución lineal de dos secuencias, cada una de ellas de longitud 1.000. Para calcular la convolución aplicamos la Fórmula (1.69), donde debemos realizar 1.000 multiplicaciones y sumas para calcular el resultado en un único instante. Dado que la convolución de dos secuencias de longitud finita es otra de longitud igual a la suma de las longitudes de las secuencias menos uno, aproximadamente deberemos de calcular 2.000.000 de multiplicaciones (eliminando las multiplicaciones por cero, podríamos quedarnos aproximadamente en 1.000.000, pero no menos). Si en lugar de calcular la convolución lineal queremos calcular la convolución circular de longitud 1.000, podríamos aplicar el siguiente procedimiento, que aprovecha la propiedad de convolución circular de la DFT:

- Paso 1. Calculamos las DFT de longitud 1.000 de ambas secuencias. Aplicando algún algoritmo de tipo FFT, esto supone realizar aproximadamente  $2 \cdot N \log_2 N \approx 2 \cdot 1.000 \cdot 10 = 20.000$  multiplicaciones y sumas.
- Paso 2. Multiplicamos punto a punto el resultado de las dos DFT, lo que supone una carga computacional de 1.000 multiplicaciones.
- Paso 3. Calculamos la DFT inversa al resultado de la multiplicación para obtener la convolución circular. Este paso supone aproximadamente 10.000 multiplicaciones y sumas.

En total, para realizar la convolución circular emplearíamos aproximadamente 31.000 multiplicaciones y sumas, más de 30 veces menos que para realizar una convolución lineal.

Merece la pena, a tenor de la diferencia en el coste computacional, establecer las condiciones en que ambas operaciones son equivalentes.

Podemos demostrar que si tenemos dos secuencias de longitud finita,  $x_1[n]$  que es idénticamente nula fuera del intervalo  $0 \leq n < N_1$  y  $x_2[n]$  que es idénticamente nula fuera del intervalo  $0 \leq n < N_2$ , su convolución lineal

$$x_3[n] = x_1[n] * x_2[n] \quad (1.199)$$

es idénticamente nula fuera del intervalo  $0 \leq n < N_1 + N_2 - 1$ , y la convolución circular con longitud  $N$  ( $N > N_1, N_2$ ) de ambas secuencias puede expresarse como

$$x_{3c}[n] = x_1[n] \circledast x_2[n] = \begin{cases} x_{3p}[n] & 0 \leq n < N \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \quad (1.200)$$

con

$$x_{3p}[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x_3[n - rN] \quad (1.201)$$

que no es otra cosa sino la superposición, en el intervalo  $0 \leq n < N$ , de réplicas del resultado de la convolución lineal de ambas secuencias desplazadas un número entero de veces  $N$ .

Si  $N$  es mayor o igual que  $N_1 + N_2 - 1$ , las réplicas de la convolución lineal ( $x_3[n - rN]$ ) no se solapan en los mismos instantes temporales en  $x_{3p}[n]$  y, por tanto, al aplicar (1.200),  $x_{3c}[n]$  va a ser exactamente la convolución lineal,  $x_3[n]$ .

Si  $N$  es menor que  $N_1 + N_2 - 1$ , las réplicas de la convolución lineal ( $x_3[n - rN]$ ) se solapan en los instantes temporales  $rN \leq n < (r - 1)N + N_1 + N_2 - 1$  de  $x_{3p}[n]$  y, al aplicar (1.200),  $x_{3c}[n]$  va a ser distinto de  $x_3[n]$  en los instantes  $0 \leq n < N_1 + N_2 - N - 1$  e igual en los instantes  $N_1 + N_2 - N - 1 \leq n < N$ .

En resumen, si empleamos una DFT de longitud mayor o igual que  $N_1 + N_2 - 1$ , el resultado de la convolución lineal y de la convolución circular son idénticos y podemos emplear el método basado en la propiedad de convolución circular de la DFT para calcularla. Si volvemos al ejemplo anterior, para realizar la convolución de dos secuencias de 1.000 puntos cada una mediante convolución circular necesitaríamos aproximadamente 62.000 multiplicaciones y sumas, que aún es casi 20 veces menor de las que necesitaríamos para realizar la convolución lineal.

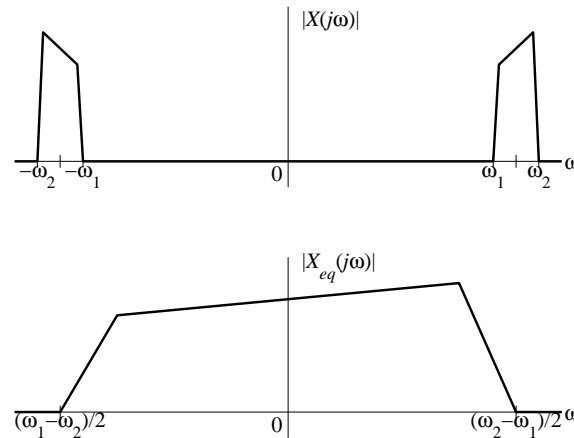
### 1.3.6. Representación de señales paso banda

Las señales paso banda ( $X(j\omega) = 0$  para  $\omega_1 > |\omega| > \omega_2$  con  $\omega_1 < \omega_2$ ) son muy frecuentes en comunicaciones, y en muchos casos el cociente entre el ancho de banda ( $\omega_2 - \omega_1$ ) y la frecuencia central de la banda ( $(\omega_1 + \omega_2)/2$ ) es muy pequeño, lo que denotamos como *banda estrecha*. Adicionalmente, dichas señales suelen ser reales de tiempo continuo por tratarse de señales que van a ser enviadas por un medio físico o que son recibidas de un medio físico.

En estas situaciones tenemos una característica de amplitud de la señal como la que se muestra en la parte superior de la Figura 1.12 y, por múltiples razones que van desde la obtención de una mejor representación gráfica hasta la representación en tiempo discreto con el menor número de muestras, nos gustaría tener una señal que fuese una representación unívoca de ella (que contuviese la misma información) y que fuese paso bajo, tal y como se muestra en la parte inferior de la Figura 1.12. Esta señal paso bajo se denomina el *equivalente paso bajo* y la denotaremos como  $x_{eq}(t)$ .

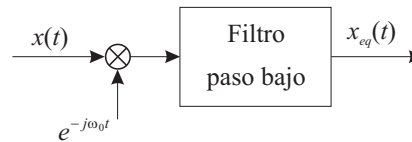
La obtención del equivalente paso bajo  $x_{eq}(t)$  de una señal  $x(t)$  puede realizarse con un esquema como el que muestra la Figura 1.13, denominado *demodulador en cuadratura*<sup>10</sup>, que realiza una

<sup>10</sup>El nombre de demodulador en cuadratura proviene de su realización empleando señales reales, donde la operación de demodulación propiamente dicha (la multiplicación por la exponencial compleja) se divide en dos demodulaciones, una empleando un coseno y la otra un seno o, lo que es lo mismo, dos sinusoides en *cuadratura*.



**Figura 1.12.** Característica de amplitud de una señal de banda estrecha (arriba) y de su equivalente paso bajo (abajo).

operación de modulación por una senoide compleja de frecuencia  $-\omega_0$  (cuando la frecuencia de modulación es negativa, el proceso se suele denominar demodulación),  $e^{-j\omega_0 t}x(t)$ , con el objeto de desplazar la frecuencia  $\omega_0$  a frecuencia 0 y un filtrado posterior que nos elimina la componente espectral de frecuencias negativas.



**Figura 1.13.** Demodulador en cuadratura.

La señal  $x_{eq}(t)$  es, en general, compleja aunque la señal  $x(t)$  de la que proviene sea real. Para que  $x_{eq}(t)$  fuese real la componente de frecuencia positiva de  $X(j\omega)$  debería ser hermítica respecto a  $\omega_0$  (característica de amplitud para frecuencias positivas par y característica de fase para frecuencias positivas impar tomando el origen de frecuencias como  $\omega_0$ ), pero bien sea porque la componente de frecuencia positiva de  $X(j\omega)$  no es hermítica respecto a ninguna frecuencia o bien sea porque, aún siéndolo,  $\omega_0$  no es igual a la frecuencia central de la banda  $((\omega_1 + \omega_2)/2)$ , la señal  $x_{eq}(t)$  va a ser tratada como una señal compleja.

A la parte real de  $x_{eq}(t)$  se le suele denominar *componente en fase* de  $x(t)$  y denotar como  $x_I(t)$ ; a la parte imaginaria, *componente en cuadratura* de  $x(t)$  y denotar como  $x_Q(t)$ . Al módulo de  $x_{eq}(t)$  se le suele denominar *envolvente* de  $x(t)$ .

Una forma alternativa de obtener  $x_{eq}(t)$  consiste en suprimir en primer lugar las componentes de frecuencias negativas y, posteriormente, realizar la demodulación. El sistema encargado de suprimir las componentes de frecuencias negativas se denomina *divisor de fase* y tiene una función de transferencia

$$H_{ps}(j\omega) = \begin{cases} \sqrt{2} & \omega > 0 \\ 0 & \omega < 0 \end{cases} \quad (1.202)$$

donde la ganancia  $\sqrt{2}$  para frecuencias positivas tiene como objeto conservar la energía (o potencia) de la señal. La salida del divisor de fase,  $x(t) * h_{ps}(t)$ , se denomina *señal analítica* o *preenvolvente* de  $x(t)$  y se denota como  $x_a(t)$ . A partir de la envolvente obtenemos el equivalente paso bajo como  $x_{eq}(t) = e^{-j\omega_0 t} x_a(t)$ .

Comúnmente, el divisor de fase se realiza empleando un *Transformador de Hilbert*, que es el sistema descrito en el Ejemplo 1.11. Posee una función de transferencia

$$H_h(j\omega) = \begin{cases} -j & \omega > 0 \\ j & \omega < 0 \end{cases} \quad (1.203)$$

y una respuesta al impulso

$$h_h(t) = \frac{1}{\pi t} \quad (1.204)$$

La señal analítica se construye como una señal compleja cuya parte real es la propia  $x(t)$  y la parte imaginaria es la salida del Transformador de Hilbert o Transformada de Hilbert de  $x(t)$ , es decir,  $x_h(t) = x(t) * h_h(t)$ ,

$$x_a(t) = x(t) + jx_h(t) \quad (1.205)$$

que podemos demostrar fácilmente que es la señal analítica que obteníamos anteriormente porque

$$X_a(j\omega) = X(j\omega) + jX_h(j\omega) = \begin{cases} X(j\omega) + j(-jX(j\omega)) = 2X(j\omega) & \omega > 0 \\ X(j\omega) + j(jX(j\omega)) = 0 & \omega < 0 \end{cases} \quad (1.206)$$

Que un sistema lineal e invariante reciba el nombre de *transformador* y la salida de ese sistema reciba el nombre de *transformada* no debe extrañarnos, porque la expresión de  $x_h(t)$  es

$$x_h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \frac{1}{\pi(t-\tau)} d\tau \quad (1.207)$$

que no difiere tanto de la Transformada de Fourier en tiempo continuo si intercambiamos  $t$  por  $\omega$ ,  $\tau$  por  $t$  y  $h_h(t-\tau)$  por una exponencial compleja (que depende tanto de  $t$  como de  $\omega$ ). De hecho, tanto la Transformada de Fourier en tiempo continuo como el transformador de Hilbert, como cualquier propia convolución con una señal predeterminada pertenecen a un grupo de transformaciones en  $L_2$  denominadas *transformaciones de núcleo integral*.

Algunas propiedades del Transformador de Hilbert son las siguientes:

- La Transformada de Hilbert de una señal par es impar, y de una señal impar, par.
- Aplicando dos veces la Transformada de Hilbert a una señal, obtenemos la misma señal cambiada de signo.
- La energía de una señal se mantiene a la salida del Transformador de Hilbert.
- Una señal y su Transformada de Hilbert son ortogonales.

El procedimiento empleado para obtener el equivalente paso bajo de señales se puede extender a sistemas, sin más que sustituir la señal  $x(t)$  por la respuesta al impulso del sistema paso banda,  $h(t)$ . En este caso no tiene sentido hablar de sistema analítico, o envolvente del sistema, pero sí de

un sistema paso bajo equivalente con una respuesta al impulso  $h_{eq}(t)$  y una función de transferencia  $H_{eq}(j\omega)$ .

Por último, debemos mencionar que podemos realizar un tratamiento equivalente para tiempo discreto, sustituyendo  $x(t)$  por  $x[n]$ ,  $x_{eq}(t)$  por  $x_{eq}[n]$ , y así sucesivamente. La mayor diferencia que puede aparecer respecto a lo aquí expresado es la definición de los sistemas involucrados, donde hay que recordar que las funciones de transferencia serán funciones periódicas con periodo  $2\pi$ . Concretamente, el Transformador de Hilbert para tiempo discreto tiene una función de transferencia

$$H_h(e^{j\omega}) = \begin{cases} -j & 0 < \omega < \pi \\ j & -\pi < \omega < 0 \\ \text{periódica con periodo } 2\pi & \end{cases} \quad (1.208)$$

y una respuesta al impulso

$$h_h[n] = \begin{cases} \frac{2 \operatorname{sen}^2(\pi n/2)}{\pi n} & n \neq 0 \\ 0 & n = 0 \end{cases} \quad (1.209)$$

## 1.4. MUESTREO, DIEZMADO E INTERPOLACIÓN

Hasta ahora hemos hablado en tiempo continuo y tiempo discreto como de dos mundos separados y paralelos, pero existen procedimientos para obtener una secuencia a partir de una señal en tiempo continuo que denominamos genéricamente *convertidores continuo-discreto* y procedimientos para reconstruir una señal en tiempo continuo a partir de una secuencia que denominamos genéricamente *convertidores discreto-continuo*.

Entre los convertidores continuo-discreto revisten gran importancia los basados en un muestreo periódico de la señal en tiempo continuo, donde la secuencia se obtiene de la forma

$$x[n] \doteq x(nT_s) \quad (1.210)$$

donde  $T_s$  es el *periodo de muestreo* y  $1/T_s = f_s$  es la *frecuencia de muestreo* expresada en muestras por segundo. También podemos expresar la frecuencia de muestreo en radianes por segundo como  $\omega_s = 2\pi/T_s$ .

El problema fundamental del muestreo es la determinación de las condiciones que garantizan que la secuencia  $x[n]$  representa unívocamente a la señal  $x(t)$ , porque el muestreo es, en general, un proceso no invertible. Al tomar muestras de una señal en tiempo continuo, estamos desechando infinitos valores de la señal entre muestra y muestra o, visto de otra forma, existe un número infinito de señales que toman los mismos valores en los instantes  $nT_s$ .

Además de este problema fundamental existe un pequeño problema matemático: la expresión (1.210) es una definición, ( $\doteq$ ), pero no una igualdad en sentido estricto (bidireccional). La consecuencia de este hecho es que no podemos establecer una equivalencia directa entre una señal en tiempo continuo y la secuencia que obtenemos de ella mediante muestreo. Así, deberemos proceder por similitud de valores numéricos y expresiones analíticas a la hora de establecer relaciones entre, por ejemplo, las Transformadas de Fourier de  $x(t)$  y  $x[n]$ .

Este último problema será abordado en el Apartado 1.4.3, dedicando los primeros al problema del muestreo en sí; primero para tiempo continuo y posteriormente para secuencias.

### 1.4.1. Muestreo de señales en tiempo continuo

Ya que no podemos abordar directamente la obtención de una secuencia a partir de muestras de una señal en tiempo continuo, la señal que ha de servir de “soporte” para los valores de las muestras

$$x(nT_s) \quad n = -\infty, \dots, \infty \quad (1.211)$$

será una señal en tiempo continuo  $x_p(t)$  que denominamos *señal muestreada*. Esta señal se genera con la ayuda de una *señal muestreadora*, que es un tren de deltas separadas el periodo de muestreo

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) \quad (1.212)$$

y el proceso de muestreo lo expresamos como

$$x_p(t) = x(t)p(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\delta(t - nT_s) \quad (1.213)$$

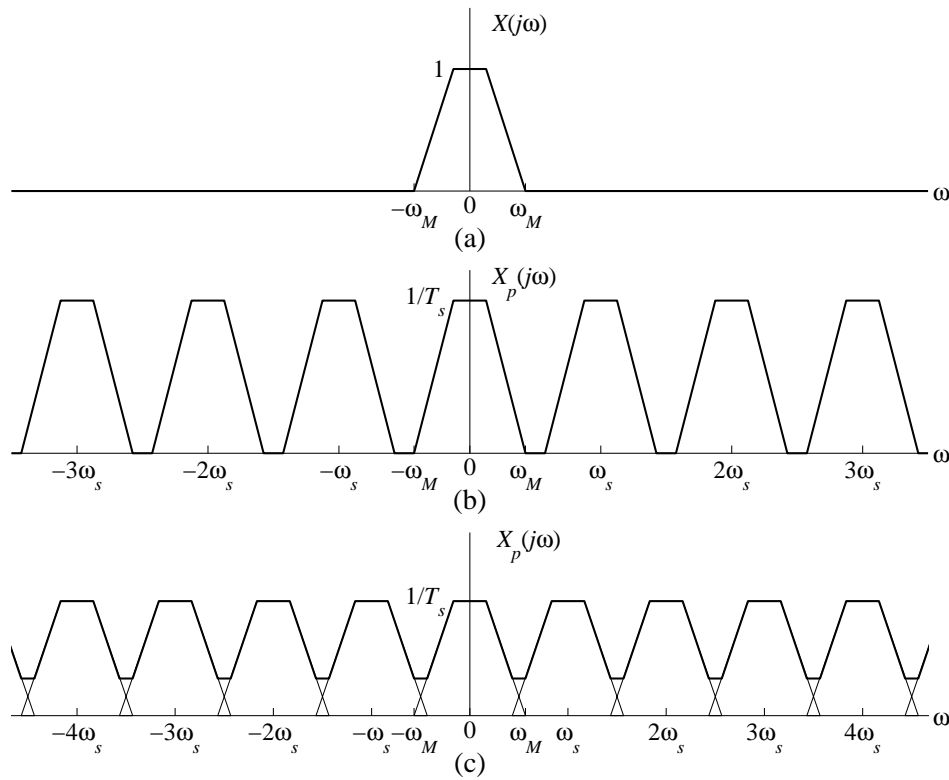
donde  $x_p(t)$  es una señal en tiempo continuo que contiene, como deseábamos, únicamente las muestras de la señal  $x(t)$ .

Este tipo de muestreo se denomina *muestreo ideal* porque es físicamente imposible generar y manipular una señal que sea un tren de funciones delta.

Para determinar bajo qué condiciones  $x_p(t)$  determina unívocamente a  $x(t)$  calculamos la Transformada de Fourier de  $x_p(t)$  haciendo uso de la propiedad de multiplicación y de la transformada de un tren de deltas que aparece en el Cuadro 1.1

$$\begin{aligned} X_p(j\omega) &= \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * P(j\omega) \\ &= \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * \left( \frac{2\pi}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{T_s}\right) \right) \\ &= \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j\omega) * \delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{T_s}\right) \\ &= \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(j\omega - jk\frac{2\pi}{T_s}\right) \end{aligned} \quad (1.214)$$

El espectro de la señal muestreada,  $X_p(j\omega)$ , está compuesto, de acuerdo con (1.214), de réplicas del espectro de la señal original,  $X(j\omega)$ , escaladas por  $1/T_s$  y desplazadas a todos los múltiplos enteros de la frecuencia de muestreo  $\omega_s = 2\pi/T_s$ , tal y como se muestra en la Figura 1.14 para una señal paso bajo. De (1.214) podemos deducir también que  $X_p(j\omega)$  es una función periódica con periodo  $\omega_s$ . La Figura 1.14 nos es útil además para establecer las condiciones en que es posible reconstruir  $x(t)$  a partir de  $x_p(t)$ . Si la señal a muestrear tiene un espectro como el mostrado en la Figura 1.14(a), y empleamos una frecuencia de muestreo lo suficientemente alta como para que las distintas réplicas de  $X(j\omega)$  no se solapen al construir  $X_p(j\omega)$  según (1.214), nos encontramos en una situación como la que muestra la Figura 1.14(b) donde, al tener cada réplica aislada, podemos recuperar  $X(j\omega)$  con una operación tan simple como un filtrado. Si, por el contrario, las réplicas de  $X(j\omega)$  se solapan al construir  $X_p(j\omega)$ , nos encontramos en una situación como la que muestra la Figura 1.14(c) (la línea más gruesa representa el resultado de la suma expresada en (1.214)), donde



**Figura 1.14.** Espectro de la señal original (a), y espectros de la señal muestreada a distintas frecuencias de muestreo: sin solape espectral (b) y con solape espectral (c).

será imposible determinar, en las zonas del espectro en que se ha producido el solape, qué parte pertenece a una réplica y qué parte a otra. En consecuencia, no podremos reconstruir  $X(j\omega)$ . En este caso decimos que se ha producido *solape espectral* en el proceso de muestreo, o que existe *distorsión por “aliasing”* o, simplemente *“aliasing”*.

La condición, por tanto, para que podamos recuperar  $x(t)$  a partir de  $x_p(t)$  es que no exista “aliasing”. Como condición previa a esta, la señal  $x(t)$  ha de ser limitada en banda, y esta limitación de banda es el conocimiento *a priori* que “compensa” la pérdida de infinitos valores entre muestra y muestra de la señal  $x(t)$ . Téngase en cuenta que la limitación de banda es una restricción tan fuerte como la no consideración de los valores de la señal entre instantes de muestreo consecutivos, porque estamos expresando que el contenido espectral de la señal es nulo en un rango ilimitado de frecuencias.

El conocimiento *a priori* de la banda de frecuencias que ocupa la señal es necesario para establecer tanto el periodo de muestreo que nos garantiza la ausencia de “aliasing” como el mecanismo de recuperación de la señal  $x(t)$ . Para señales paso bajo como la mostrada en la Figura 1.14(a) que cumplen

$$X(j\omega) = 0 \quad \forall |\omega| > \omega_M \quad (1.215)$$

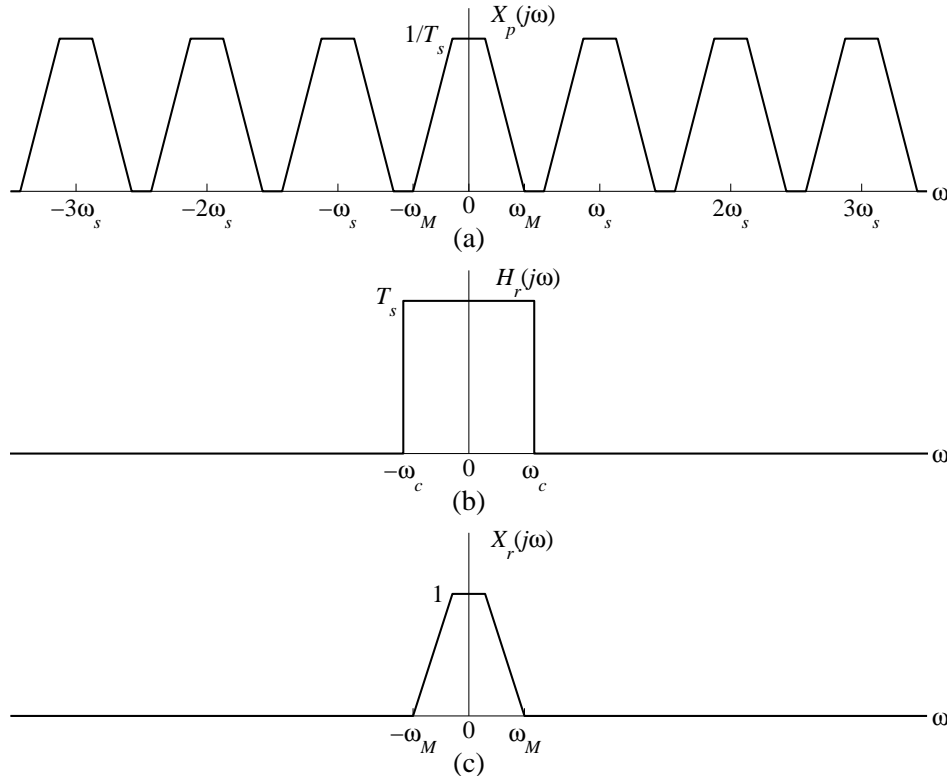
podemos garantizar la ausencia de “aliasing” siempre que empleemos una frecuencia de muestreo mayor del doble de  $\omega_M$  ( $\omega_s > 2\omega_M$ ) o, equivalentemente, un periodo de muestreo  $T_s$

$$T_s < \frac{\pi}{\omega_M} \quad (1.216)$$

Este resultado es conocido como *teorema de muestreo de Nyquist*, y la frecuencia  $2\omega_M$  como *frecuencia de Nyquist*.

A pesar de la popularidad de la frecuencia de Nyquist no debemos perder de vista las condiciones bajo las que está establecida (señales reales paso bajo), siendo el criterio general para la reconstrucción perfecta de la señal original  $x(t)$  la ausencia de “aliasing” en el proceso de muestreo.

La reconstrucción de la señal se lleva a cabo, como hemos mencionado anteriormente, mediante un procedimiento de filtrado. Si hacemos pasar la señal muestreada  $x_p(t)$ , que posee un espectro como el que muestra la Figura 1.15(a), por un filtro  $H_r(j\omega)$  paso bajo ideal de ganancia  $T_s$  y una frecuencia de corte  $\omega_c$  igual a la mitad de la frecuencia de muestreo,  $\omega_c = \omega_s/2 = \pi/T_s$ , (Figura 1.15(b)), la salida de dicho filtro será una señal  $x_r(t)$  cuyo espectro se muestra en la Figura 1.15(c) y que coincidirá con  $x(t)$  si en el proceso de muestreo no se ha producido “aliasing”.



**Figura 1.15.** Proceso de reconstrucción de la señal: espectro de la señal muestreada (a), función de transferencia del filtro reconstructor (b) y espectro de la señal a la salida del filtro reconstructor (c).

El filtro  $H_r(j\omega)$  se denomina *filtro reconstructor* o *filtro interpolador* y posee una respuesta al impulso

$$h_r(t) = T_s \frac{\omega_c}{\pi} \operatorname{sinc} \left( \frac{\omega_c t}{\pi} \right) = \operatorname{sinc} \left( \frac{t}{T_s} \right) \quad (1.217)$$



La señal  $x_r(t)$  se denomina *señal reconstruida* o *señal interpolada* y su expresión analítica es

$$\begin{aligned} x_r(t) &= x_p(t) * h_r(t) \\ &= \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \delta(t - nT_s) \right) * \text{sinc} \left( \frac{t}{T_s} \right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \text{sinc} \left( \frac{t - nT_s}{T_s} \right) \end{aligned} \quad (1.218)$$

La interpretación de (1.218) puede ayudarnos a comprender el mecanismo de reconstrucción de  $x_r(t)$ :

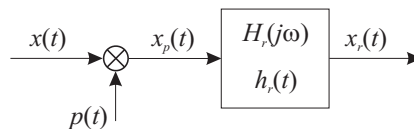
- La función

$$\text{sinc} \left( \frac{t - n_0 T_s}{T_s} \right)$$

toma valor cero en todos los instantes  $nT_s$  excepto en  $n_0 T_s$  donde toma valor 1, y esto garantiza que  $x_r(nT_s) = x(nT_s)$ .

- Para cualquier valor de  $t \neq nT_s$ , la señal  $x_r(t)$  se reconstruye empleando *todos* los valores  $x(nT_s)$ , aunque las muestras más cercanas a dicho instante tendrán más influencia en el valor de  $x_r(t)$  que las más lejanas, de acuerdo con la forma de la función sinc.

A modo de resumen, el proceso completo de muestreo y reconstrucción es el que lleva a cabo el sistema que muestra la Figura 1.16.



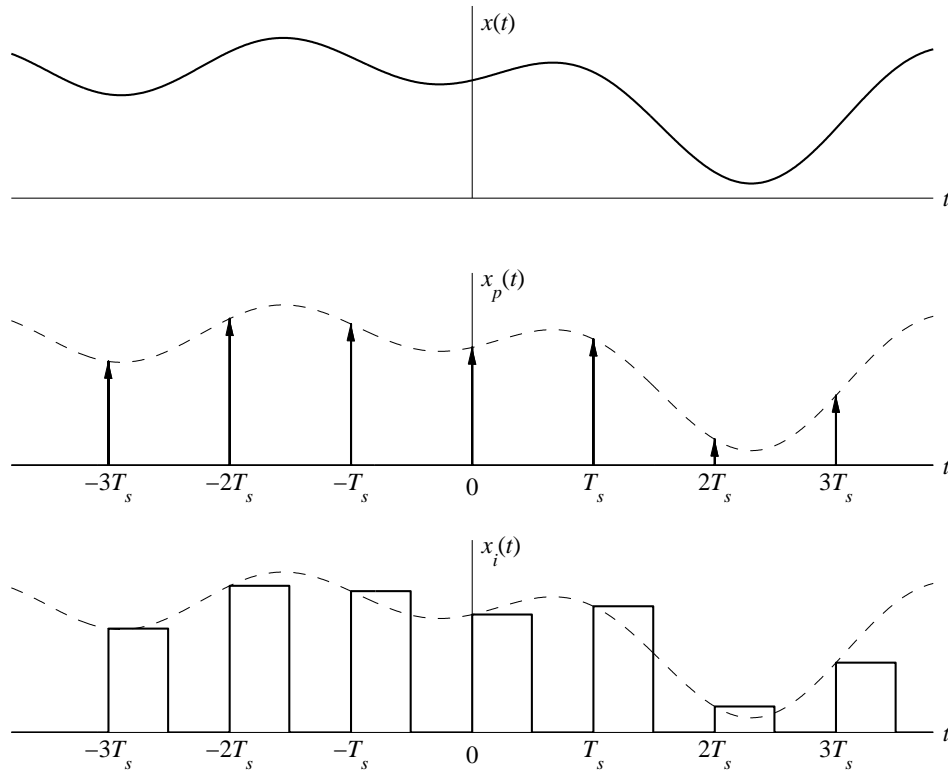
**Figura 1.16.** Sistema para muestreo y reconstrucción.

### Muestreos periódicos no ideales: el muestreo instantáneo

Ante la imposibilidad de generar las funciones delta necesarias para el muestreo ideal surgen diversas alternativas, de las que vamos a analizar la más común: el *muestreo instantáneo*.

El principal problema para la puesta en práctica del muestreo ideal no es capturar el valor de la señal en los instantes  $nT_s$ , que puede realizarse prácticamente empleando unos circuitos denominados de *muestreo y retención* o “*sample & hold*”, sino dar un soporte físico adecuado a la señal  $x_p(t)$ . Para lograrlo, el muestreo instantáneo hace pasar la señal  $x_p(t)$  por un sistema de respuesta al impulso  $p_i(t)$ , cuyo efecto es la sustitución de las funciones delta por la señal  $p_i(t)$ .

Un ejemplo que pone de manifiesto las diferencias entre los muestreos ideal e instantáneo podemos verlo en la Figura 1.17.



**Figura 1.17.** Comparación de los distintos tipos de muestreo: señal original  $x(t)$ , señal resultante del muestreo ideal  $x_p(t)$  y señal resultante del muestreo instantáneo  $x_i(t)$ .

La señal resultante del muestreo instantáneo toma la forma

$$\begin{aligned}
 x_i(t) &= x_p(t) * p_i(t) \\
 &= \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \delta(t - nT_s) \right) * p_i(t) \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) p_i(t - nT_s)
 \end{aligned} \tag{1.219}$$

y su transformada es

$$X_i(j\omega) = X_p(j\omega)P_i(j\omega) = P_i(j\omega) \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X \left( j\omega - j\frac{2\pi k}{T_s} \right) \tag{1.220}$$

donde cada réplica está ponderada por la función  $P_i(j\omega)$ . Esto provoca una distorsión en la señal conocida como *distorsión de apertura*.

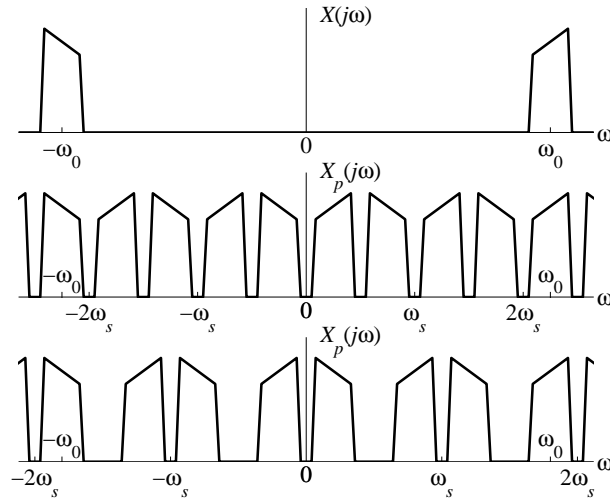
El filtro reconstructor debe corregir la distorsión de apertura, por lo que su función de transferencia ha de tomar la forma

$$H_r(j\omega) = \frac{T_s}{P_i(j\omega)} \Pi \left( \frac{\omega}{\omega_s} \right) \tag{1.221}$$

Como condición adicional para poder recuperar la señal original debemos asegurar que  $P_i(j\omega)$  no toma valor cero en ninguna frecuencia perteneciente al intervalo  $(-\omega_s/2, \omega_s/2)$ .

### Muestreo de señales paso banda

Para muestrear señales paso banda que son además de banda estrecha, la frecuencia de Nyquist nos proporciona un valor de frecuencia de muestreo muy grande en comparación con el ancho de banda de la señal. En estos casos, podemos muestrear por debajo de dicha frecuencia sin que exista “aliasing”, tal como se muestra en el ejemplo de la Figura 1.18 empleando dos frecuencias de muestreo distintas.



**Figura 1.18.** Muestreo paso banda: espectro de la señal original (arriba), espectro de la señal muestreada sin inversión de espectro (centro) y espectro de la señal muestreada con inversión de espectro (abajo).

Dependiendo de la frecuencia de muestreo que elijamos, las réplicas más cercanas a frecuencia 0 pueden estar invertidas (la componente de frecuencias positivas en frecuencias negativas y viceversa), tal y como se muestra en la gráfica inferior de la Figura 1.18. Si sucede esto, se dice que el proceso de muestreo ha generado una *inversión de espectro*.

Si la reconstrucción de señales paso bajo muestreadas se realizaba empleando un filtro que dejaba pasar la banda de frecuencias en las que conocíamos *a priori* que se encontraba la señal original, aquí hacemos exactamente lo mismo, aunque el filtro a emplear sea distinto. Si la señal original se encuentra entre las frecuencias  $k_0\omega_s$  y  $(k_0 + 1/2)\omega_s$ , o entre  $(k_0 - 1/2)\omega_s$  y  $k_0\omega_s$ , siendo  $k_0$  un número entero, el filtro de reconstrucción será un filtro paso banda ideal con esa banda de paso.

El muestreo paso banda también puede realizarse sobre la señal analítica (en ese caso, por ser compleja la señal analítica, es equivalente a muestrear dos señales reales de forma simultánea), empleando una frecuencia de muestreo  $\omega_0/k_0$ , siendo  $k_0$  un número entero. La única precaución que debemos adoptar para realizar un muestreo paso banda en cualquiera de sus variantes es que, como en el caso de señales paso bajo, en el proceso de muestreo no se produzca “aliasing”.

También podemos sustituir el muestreo ideal por uno no ideal. De entre los dos tipos de muestreo no ideales considerados, el más apropiado para señales paso banda es el muestreo instantáneo, donde ahora cobra más importancia si cabe la distorsión de apertura y su compensación.

Por último debemos añadir que aunque el muestreo paso banda pueda parecer un mero ejercicio académico, existen dispositivos comerciales que ponen en práctica esta técnica.

### 1.4.2. Interpolación y diezmado de secuencias

Las técnicas de muestreo también pueden aplicarse a secuencias, siendo múltiples las razones que pueden conducirnos a su empleo. Por mencionar alguna, la representación con el menor número de muestras posibles de una secuencia que deseamos almacenar, o el empleo de circuitería más simple para el tratamiento de secuencias si existen requisitos de tiempo real.

El muestreo de secuencias no difiere grandemente del muestreo de señales en tiempo continuo salvo, quizá, en la facilidad de realización del muestreo ideal o los cambios de escala que podemos realizar sobre la secuencia.

La señal muestreadora en tiempo discreto es un tren de deltas de la forma

$$p[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - kM] \quad (1.222)$$

siendo  $M$ , de valor entero, el periodo de muestreo y  $\omega_s = 2\pi/M$  la frecuencia de muestreo. La secuencia muestreada  $x_p[n]$  se obtiene como

$$x_p[n] = x[n] p[n] = x[n] \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - kM] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[kM] \delta[n - kM] \quad (1.223)$$

cuya Transformada de Fourier es

$$\begin{aligned} X_p(e^{j\omega}) &= \frac{1}{2\pi} X(e^{j\omega}) \otimes_{2\pi} P(e^{j\omega}) \\ &= \frac{1}{2\pi} X(e^{j\omega}) \otimes_{2\pi} \left( \frac{2\pi}{M} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{M}\right) \right) \\ &= \frac{1}{M} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(e^{j\omega}) \otimes_{2\pi} \delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{M}\right) \\ &= \frac{1}{M} \sum_{k \in \langle M \rangle} X\left(e^{j\left(\omega - k\frac{2\pi}{M}\right)}\right) \end{aligned} \quad (1.224)$$

donde la diferencia más apreciable con su versión en tiempo continuo, (1.214), es que aquí nos hacen falta únicamente  $M$  réplicas de  $X(e^{j\omega})$  para formar la función periódica  $X_p(e^{j\omega})$  de periodo  $2\pi/M$ , ya que  $X(e^{j\omega})$  es ya una función periódica de periodo  $2\pi$ .

Al igual que en tiempo continuo, en el muestreo de secuencias también puede existir “aliasing”, y para poder recuperar la secuencia original  $x[n]$  debemos garantizar que no se produce “aliasing” en el proceso de muestreo. Para secuencias reales paso bajo con frecuencia de corte  $\omega_M$ , bastará con garantizar que  $\omega_s = 2\pi/M$  es mayor del doble de  $\omega_M$ , que es el teorema de muestreo de Nyquist para secuencias.

La reconstrucción de la secuencia  $x[n]$  se lleva a cabo mediante filtrado con un filtro paso bajo ideal  $H_r(e^{j\omega})$  con ganancia  $M$  y una frecuencia de corte  $\omega_c$  igual a la mitad de la frecuencia de muestreo,  $\omega_c = \omega_s/2 = \pi/M$ . La respuesta al impulso del filtro interpolador toma la forma

$$h_r[n] = \text{sinc}\left(\frac{n}{M}\right) \quad (1.225)$$

y la secuencia reconstruida,  $x_r[n]$ ,

$$x_r[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[kM] \text{sinc}\left(\frac{n - kM}{M}\right) \quad (1.226)$$

La secuencia  $x_p[n]$  tiene la misma estructura que una secuencia en que se han insertado  $M - 1$  ceros entre muestra y muestra, (1.131). Estos ceros pueden suprimirse sin que ello suponga ninguna pérdida de información (de hecho, si se produjese alguna pérdida de información, esta se producirá en el proceso de muestreo por la existencia de “aliasing”) mediante una operación de supresión de ceros de la forma

$$x_d[n] = x_p[nM] \quad (1.227)$$

donde  $x_d[n]$  se conoce con el nombre de *secuencia diezmada*, cuya transformada es, de acuerdo con la propiedad de supresión de ceros de la Transformada de Fourier,

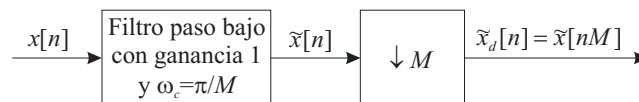
$$X_d(e^{j\omega}) = X_p(e^{j\omega/M}) = \frac{1}{M} \sum_{k \in \langle M \rangle} X \left( e^{j \left( \frac{\omega}{M} - k \frac{2\pi}{M} \right)} \right) \quad (1.228)$$

El proceso de obtención de  $x_d[n]$  a partir de  $x[n]$  se denomina *diezmado* a un ritmo natural  $M$  y, en realidad, es algo tan simple y directo como

$$x_d[n] = x[nM] \quad (1.229)$$

aunque es necesario todo el análisis anterior para determinar las condiciones en que  $x_d[n]$  determina de manera unívoca  $x[n]$  y para establecer la igualdad entre sus transformadas expresada en (1.228).

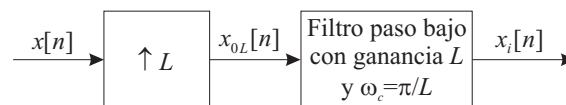
Un sistema que realiza el proceso de diezmado para una secuencia genérica  $x[n]$  es el mostrado en la Figura 1.19, que se conoce con el nombre de *diezmador*. Para evitar el “aliasing” emplea un filtro paso bajo de frecuencia de corte  $\pi/M$  previo al proceso de diezmado propiamente dicho, que se realiza en el bloque etiquetado como  $\downarrow M$ . Únicamente en el caso en que la secuencia  $x[n]$  sea paso



**Figura 1.19.** Esquema general de un diezmador por  $M$ .

bajo con frecuencia de corte menor o igual que  $\pi/M$  la secuencia  $\tilde{x}[n]$  será igual a  $x[n]$ .

El proceso contrario (que no necesariamente inverso) al diezmado es el que denominamos *interpolación* a un ritmo natural  $L$ . En este proceso, representado en la Figura 1.20, a una secuencia  $x[n]$



**Figura 1.20.** Esquema general de un interpolador por  $L$ .

(que puede provenir o no de un proceso de diezmado) se le aplica una inserción de ceros a ritmo  $L$  según (1.131), obteniendo la secuencia

$$x_{0L}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n - kL] = \begin{cases} x \left[ \frac{n}{L} \right] & \text{si } n = \dot{L} \\ 0 & \text{si } n \neq \dot{L} \end{cases} \quad (1.131)$$

cuya transformada es, teniendo en cuenta la propiedad de inserción de ceros de la Transformada de Fourier, (1.132),

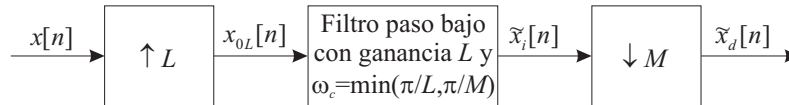
$$X_{0L}(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega L}) \quad (1.230)$$

que es una función periódica de periodo  $2\pi/L$ , igual que una secuencia que hubiese sido muestreada con un periodo de muestreo  $L$ .

Finalmente, esta secuencia  $x_{0L}[n]$  es filtrada paso bajo como si se tratase de una secuencia muestreada para obtener la secuencia interpolada  $x_i[n]$  cuya expresión es

$$x_i[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_{0L}[kL] \operatorname{sinc}\left(\frac{n-kL}{L}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \operatorname{sinc}\left(\frac{n-kL}{L}\right) \quad (1.231)$$

Si con un diezmador conseguimos una reducción de la tasa de muestras o ritmo de la secuencia por un factor entero  $M$  y mediante un interpolador un incremento de la tasa de muestras por un factor entero  $L$ , podemos conseguir un cambio de ritmo por un factor racional  $L/M$  aplicando, sucesivamente, un interpolador por  $L$  y un diezmador por  $M$ . Nótese cómo el interpolador debe ir en primer lugar para asegurar que, de existir alguna pérdida de información (como es el caso en que  $L/M < 1$ ), esta sea mínima. En esta combinación podemos suprimir uno de los filtros, el del interpolador o el del diezmador, resultando una estructura de procesado como la que muestra la Figura 1.21.

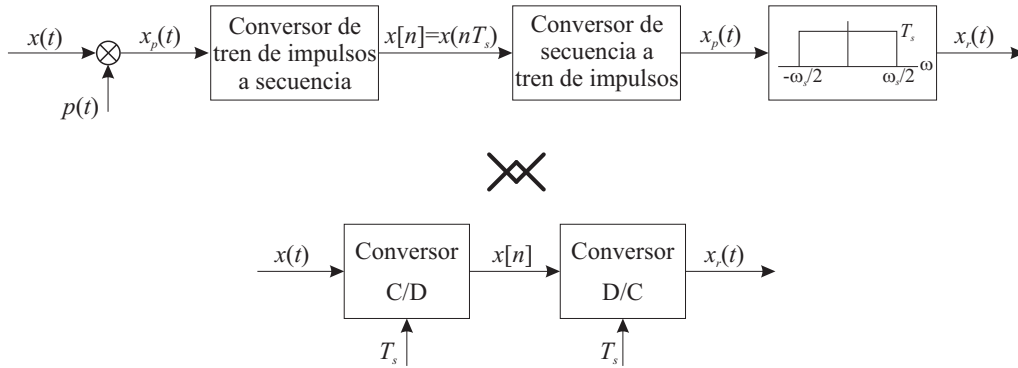


**Figura 1.21.** Combinación de un interpolador por  $L$  y un diezmador por  $M$ .

### 1.4.3. Simulación de señales y sistemas

En el inicio del apartado anterior mencionábamos que deseábamos construir una secuencia  $x[n]$  a partir de una señal en tiempo continuo  $x(t)$  de la forma (1.210) empleando unos sistemas denominados conversores continuo-discreto y volver a reconstruir una señal en tiempo continuo empleando conversores discreto-continuo. Sin embargo, debido a problemas matemáticos no era posible establecer una igualdad (bidireccional) entre la secuencia y la señal en tiempo continuo y debíamos conformarnos con un sistema de muestreo y reconstrucción como el mostrado en la Figura 1.16 en el que la variable independiente de la señal muestreada seguía siendo de naturaleza continua.

Es ahora, una vez expuestos los fundamentos de las técnicas de muestreo y reconstrucción, cuando estamos en disposición de abordar la definición de los conversores continuo-discreto y discreto-continuo y establecer las equivalencias entre  $x[n]$  y  $x(t)$ . Para ello, vamos a insertar dos bloques nuevos en el diagrama de muestreo y reconstrucción anterior (Figura 1.16), tal y como se muestra en la Figura 1.22. El primero de ellos, etiquetado como “conversor de tren de impulsos a secuencia”, se encarga de construir la secuencia  $x[n]$  a partir de los pesos de las funciones delta de  $x_p(t)$ , y el segundo, etiquetado como “conversor de secuencia a tren de impulsos”, realiza el paso contrario. El conversor continuo discreto se define como la combinación de un muestreador seguido de un conversor de tren de impulsos a secuencia y el conversor discreto-continuo se define como la combinación de un conversor de secuencia a tren de impulsos seguido de un filtro reconstructor de una señal muestreada.



**Figura 1.22.** Sistema para muestreo y reconstrucción y convertors continuo-discreto (C/D) y discreto-continuo (D/C).

Para determinar la equivalencia entre  $x[n]$  y  $x(t)$  comenzamos calculando la Transformada de Fourier de  $x_p(t)$  de forma distinta a como lo hicimos en (1.214). Empleando una de las expresiones de  $x_p(t)$  de (1.213),

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \delta(t - nT_s) \quad (1.232)$$

calculamos su transformada empleando el par transformado  $\delta(t - nT_s) \xleftrightarrow{TF} e^{-j\omega nT_s}$  para cada uno de los términos del sumatorio, obteniendo

$$X_p(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) e^{-j\omega nT_s} \quad (1.233)$$

que no es sino el Desarrollo en Serie de Fourier con periodo  $\omega_s$  de la función periódica  $X_p(j\omega)$  expresada en (1.214).

Por otra parte, tenemos que la Transformada de Fourier de la secuencia  $x[n]$  obtenida a partir de  $x(t)$  es, cambiando  $\omega$  por  $\Omega$  para evitar confusiones entre tiempo discreto y tiempo continuo,

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) e^{-j\Omega n} \quad (1.234)$$

de donde, comparando con la expresión de  $X_p(j\omega)$  obtenida en (1.233), podemos obtener la equivalencia

$$\Omega \equiv \omega T_s \quad (1.235)$$

que nos permite establecer la igualdad

$$X(e^{j\Omega}) = X_p(j\Omega/T_s) \quad (1.236)$$

Empleando la relación entre  $X(j\omega)$  y  $X_p(j\omega)$  expresada en (1.214), (1.236) se transforma en

$$X(e^{j\Omega}) = X_p(j\Omega/T_s) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(j\left(\frac{\Omega - k2\pi}{T_s}\right)\right) \quad (1.237)$$

La equivalencia (1.235) y las ecuaciones (1.236) y (1.237), expresadas en palabras, vienen a decir que la frecuencia de muestreo en tiempo continuo se transforma en la frecuencia  $2\pi$  de la secuencia construida a partir de la señal en tiempo continuo.

Este resultado nos abre las puertas para la realización en tiempo discreto de sistemas en tiempo continuo y viceversa y, más concretamente, la realización en tiempo discreto de la práctica totalidad de transmisores y receptores de comunicaciones digitales.

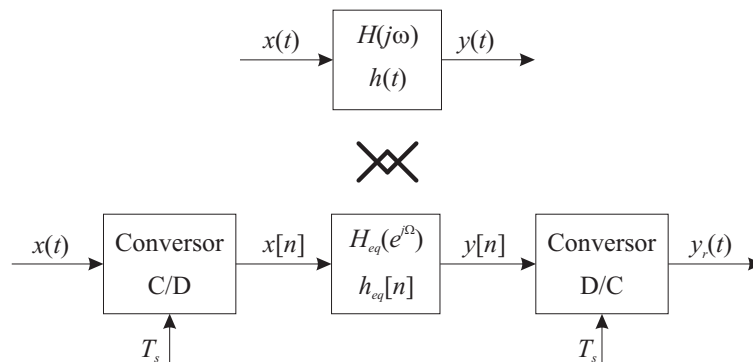
o, lo que es más interesante para nuestros propósitos, la simulación en tiempo discreto de sistemas de comunicación en los que al menos el medio físico será de naturaleza continua.

A continuación abordaremos el estudio de la simulación de señales y sistemas continuos en tiempo discreto, el cambio de la frecuencia de muestreo en simulación en tiempo discreto y la simulación de sistemas que no sean lineales e invariantes, haciendo especial hincapié en los aspectos prácticos que nos permiten una realización eficiente de la simulación. Sin embargo, antes de hacerlo, conviene puntualizar el sentido del término *simulación* en comunicaciones.

En general, la simulación es una disciplina cuyo objetivo es imitar uno o varios aspectos de la realidad de manera tan precisa como sea posible. La simulación en sistemas de comunicaciones o, más concretamente, la simulación de un *enlace de comunicaciones*<sup>11</sup> (transmisor, canal y receptor), consiste, en la mayoría de los casos, en algo tan sencillo como la realización en tiempo discreto del transmisor, canal y receptor y el análisis de las prestaciones del sistema a partir de esta. En el caso del transmisor y receptor, incluso el término simulación puede no ser el apropiado en muchos casos, ya que la realización práctica de los mismos se puede llevar a cabo en tiempo discreto utilizando circuitería digital (microprocesadores, lógica programable, etc.), coincidiendo en estas situaciones realidad y “simulación”.

#### 1.4.4. Simulación de señales y sistemas continuos en tiempo discreto

La base para la simulación en tiempo discreto de señales y sistemas en tiempo continuo se haya en encontrar, dentro de un esquema de equivalencia como el que muestra la Figura 1.23, el sistema lineal e invariante en tiempo discreto  $H_{eq}(e^{j\Omega})$  que produce una señal  $y_r(t)$  idéntica a la salida  $y(t)$  de un sistema lineal e invariante  $H(j\omega)$  ante una señal de entrada  $x(t)$  de banda limitada.



**Figura 1.23.** Sistema en tiempo continuo y su esquema equivalente mediante simulación en tiempo discreto.

<sup>11</sup>Existen otros tipos de simulación en sistemas de comunicaciones como, por ejemplo, la simulación de redes de comunicaciones, a los que no se aplica lo que aquí vamos a mencionar.



La primera condición para que los sistemas mostrados en esta figura puedan ser equivalentes es que  $x(t)$  sea de banda limitada ( $X(j\omega) = 0 \quad \forall |\omega| > \omega_M$ ).  $y(t)$  cumple la misma limitación en banda que  $x(t)$  porque  $Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega)$  y, por tanto, la frecuencia de muestreo o frecuencia de simulación no vendrá establecida por el sistema, sino por la señal de entrada. Esta ha de escogerse de acuerdo con el criterio de Nyquist,  $\omega_s > 2\omega_M$  para garantizar la ausencia de “aliasing” en la conversión continuo-discreto.

Si el sistema en tiempo continuo cumple la misma limitación de banda que la señal de entrada,  $H(j\omega) = 0 \quad \forall |\omega| > \omega_M$ , haciendo que la función de transferencia del sistema en tiempo discreto tome la forma

$$H_{eq}(e^{j\Omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} H\left(\frac{j\Omega - j2\pi k}{T_s}\right) \quad (1.238)$$

la transformada de la secuencia  $y[n]$  es

$$\begin{aligned} Y(e^{j\Omega}) &= X(e^{j\Omega}) H_{eq}(e^{j\Omega}) \\ &= \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{j\Omega - j2\pi k}{T_s}\right) \right) \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} H\left(\frac{j\Omega - j2\pi k}{T_s}\right) \right) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{j\Omega - j2\pi k}{T_s}\right) H\left(\frac{j\Omega - j2\pi k}{T_s}\right) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} Y\left(\frac{j\Omega - j2\pi k}{T_s}\right) \end{aligned} \quad (1.239)$$

y, por tanto,  $y_r(t) = y(t)$ .

En el dominio natural, la definición (1.238) se traduce en

$$h_{eq}[n] = T_s h(nT_s) \quad (1.240)$$

que es (salvo el factor de escala  $T_s$ ) la conversión continuo-discreto de la respuesta al impulso del sistema en tiempo continuo. Por esta propiedad, esta técnica de generación del sistema equivalente en tiempo discreto se conoce con el nombre de *invarianza de la respuesta al impulso*.

Si el sistema en tiempo continuo no cumple la misma limitación de banda que la señal de entrada, bien sea porque el sistema no es de banda limitada o porque, aun siéndolo, su frecuencia de corte sea superior a  $\omega_M$ , la generación del sistema en tiempo discreto mediante invarianza de la respuesta al impulso va a dar como resultado un sistema que no es equivalente al en tiempo continuo. El motivo por el que no van a ser equivalentes ambos sistemas es que en el proceso de muestreo de la respuesta al impulso, (1.240), se va a producir “aliasing” o, visto en la frecuencia, al superponer las distintas réplicas de  $H(j\Omega/T_s)$  en (1.238), estas se van a solapar espectralmente, dando como resultado una función de transferencia distinta a  $H(j\Omega/T_s)$  en el intervalo de frecuencias desde  $-\pi$  a  $\pi$ .

Si, en este caso, queremos que el sistema en tiempo discreto proporcione una salida  $y_r(t)$  igual a la salida del filtro en tiempo continuo debemos, antes de aplicar (1.238), limitar la banda del sistema. Para ello definimos una nueva función de transferencia

$$H_1(j\omega) = \Pi\left(\frac{\omega}{\omega_s}\right) H(j\omega) \quad (1.241)$$

y, a partir de esta, la función de transferencia del sistema de tiempo discreto como

$$H_{eq}(e^{j\Omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_1\left(j\left(\frac{\Omega - k2\pi}{T_s}\right)\right) \quad (1.242)$$

La respuesta al impulso del sistema en tiempo discreto será ahora

$$h_{eq}[n] = T_s h_1(nT_s) \quad (1.243)$$

que será distinto de  $T_s h(nT_s)$ . Es conveniente hacer notar que el valor que tome la función de transferencia fuera de la banda que ocupa la señal de entrada es irrelevante porque  $Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega)$ . Si garantizamos que la señal de entrada cumple la limitación de banda  $X(j\omega) = 0 \quad \forall |\omega| > \omega_M$  la salida proporcionada por los sistemas cuyas funciones de transferencia sean  $H_1(j\omega)$  y  $H(j\omega)$  van a ser idénticas.

A la hora de poner en práctica la simulación en tiempo discreto de sistemas continuos cobra una gran importancia el método que empleemos para calcular la salida del filtro en tiempo discreto porque, en general,  $h_{eq}[n]$  va a ser una secuencia de longitud ilimitada. La forma más común de realización del sistema en tiempo discreto es mediante los sistemas lineales e invariantes definidos por ecuaciones en diferencias con coeficientes constantes (pág. 42 y siguientes), si bien es necesario hacer notar que no todos los sistemas lineales e invariantes pueden expresarse mediante ecuaciones en diferencias de orden finito.

Estos sistemas, definidos por la ecuación (1.149) (que reproducimos nuevamente aquí)

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \quad (1.149)$$

admiten un método de cálculo recursivo de la salida en función de la entrada y la salida en los instantes anteriores sin más que despejar  $y[n]$  de (1.149)

$$y[n] = \frac{1}{a_0} \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] - \frac{1}{a_0} \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] \quad (1.244)$$

cuya evaluación para un único valor de  $n$  requiere la realización de  $M + N + 1$  multiplicaciones y  $M + N$  sumas.

Si  $N$  es igual a 0, (1.149) se reduce a

$$y[n] = \frac{1}{a_0} \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \quad (1.245)$$

y el sistema tiene una respuesta al impulso de duración finita

$$h_n = \sum_{k=0}^M \frac{b_k}{a_0} \delta[n-k] \quad (1.246)$$

por lo que recibe el nombre de *filtro de tipo FIR* (de “*Finite Impulse Response*”). Si  $N$  es mayor que 0 el sistema tiene una respuesta impulsional infinita (como vimos en la pág. 47 y siguientes) y reciben el nombre de *filtro de tipo IIR* (de “*Infinite Impulse Response*”).

Si  $h_{eq}[n]$  es una secuencia de longitud finita podemos realizar el sistema en tiempo discreto empleando un filtro FIR. Sin embargo, como hemos mencionado antes,  $h_{eq}[n]$  va a ser de longitud ilimitada y, en general, no va a tener una función de transferencia racional que nos permita su realización de manera exacta mediante un filtro IIR.

Si no es posible realizar la función de transferencia exacta del filtro en tiempo discreto vamos a tener que recurrir a aproximaciones de respuesta impulsional finita (a realizar con filtros FIR) o de respuesta impulsional infinita con función de transferencia racional (a realizar con filtros IIR).

Para realizar la aproximación empleando filtros FIR existen diversos métodos en la literatura, siendo los dos familias de métodos más importantes la de enventanado de la respuesta al impulso (que consiste en multiplicar la respuesta al impulso del filtro que deseamos aproximar por una secuencia de longitud finita –la ventana– para así limitar la duración de la misma) y los métodos basados en aproximaciones frecuenciales de rizado constante, como el algoritmo de Parks y McClellan.

La aproximación empleando filtros IIR es un problema más complejo, que posee un tratamiento sencillo si el sistema en tiempo continuo que se quiere simular es un sistema lineal e invariante definido por una ecuación diferencial de coeficientes constantes de la forma

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \quad (1.247)$$

cuya función de transferencia en el dominio de la frecuencia es

$$H(j\omega) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^N a_k (j\omega)^k} \quad (1.248)$$

En este caso podemos emplear la denominada *transformación bilineal*<sup>12</sup> para obtener la función de transferencia  $H_{eq}(e^{j\Omega})$  como

$$H_{eq}(e^{j\Omega}) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k \left( \frac{2}{T_d} \frac{1 - e^{-j\Omega}}{1 + e^{-j\Omega}} \right)^k}{\sum_{k=0}^N a_k \left( \frac{2}{T_d} \frac{1 - e^{-j\Omega}}{1 + e^{-j\Omega}} \right)^k} \quad (1.249)$$

que, tras las oportunas simplificaciones, podemos expresar como la función de transferencia de un filtro IIR. El parámetro  $T_d$ , que no debe de confundirse con el periodo de muestreo  $T_s$ , gobierna la transformación no lineal de  $\omega$  a  $\Omega$  de la forma

$$\Omega = 2 \arctan \left( \frac{\omega T_d}{2} \right) \quad (1.250)$$

donde podemos comprobar que, independientemente del valor de  $T_d$ , la transformación bilineal transforma el rango de frecuencias  $-\infty \leq \omega \leq \infty$  en  $-\pi \leq \Omega \leq \pi$ . La transformación bilineal garantiza además que si el filtro en tiempo continuo es estable, su equivalente en tiempo discreto también lo es.

<sup>12</sup>Formalmente, la transformación bilineal se define entre la variable  $s$  del dominio de Laplace en la variable  $z$  del dominio  $Z$  de la forma

$$s = \frac{2}{T_d} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

que transforma el semiplano izquierdo del plano  $s$  en el interior de la circunferencia unidad, el eje  $j\omega$  en la circunferencia unidad y el semiplano derecho del plano  $s$  en el exterior de la circunferencia unidad.

La elección entre filtros FIR o IIR para aproximar un sistema determinado va a depender además de otros factores como si es necesario o no que el sistema sea de fase lineal (los filtros IIR causales no tienen característica de fase lineal), el número de operaciones de que se disponga por muestra (generalmente hacen falta un mayor número de coeficientes para aproximar una función de transferencia empleando filtros FIR), la posibilidad de variar de manera adaptativa los coeficientes del filtro (más sencilla en filtros FIR), etc.

### 1.4.5. Cambio de la frecuencia de simulación

Aun calculando el equivalente paso bajo de todo el sistema a simular, en ocasiones nos encontramos con señales de anchos de banda muy diferentes dentro de un mismo sistema. La elección de la frecuencia de simulación de acuerdo con la señal de mayor ancho de banda puede llevarnos en estos casos a realizaciones de la simulación muy costosas en número de operaciones. Para reducir este número de operaciones podemos emplear más de una frecuencia de simulación en el sistema, menor en aquellas partes en que las señales que encontramos sean de menor ancho de banda.

Para llevar a cabo estos cambios de frecuencia de simulación sin necesidad de reconstruir en ninguna parte una señal en tiempo continuo podemos hacer uso de las técnicas de interpolación y diezmado de secuencias vistas en el Apartado 1.4.2. Si una secuencia  $x[n]$  ha sido generada mediante un conversor continuo-discreto con una frecuencia de muestreo  $\omega_s = 2\pi/T_s$ , y esta señal es interpolada por un factor  $L$ , la secuencia resultante  $x_i[n]$  es la misma que habríamos obtenido con un conversor continuo-discreto utilizando una frecuencia de muestreo  $L\omega_s = 2\pi L/T_s$  (supuesto que en los procesos de conversión continuo-discreto no exista “aliasing”). De idéntica forma, si la secuencia  $x[n]$  es diezmada por un factor  $M$ , la secuencia resultante  $\tilde{x}_d[n]$  es la misma que habríamos obtenido con un conversor continuo-discreto utilizando una frecuencia de muestreo  $\omega_s/M = 2\pi/(MT_s)$ .

Podemos, por tanto, emplear distintas frecuencias de simulación  $\omega_s L/M$  con  $L$  y  $M$  número enteros en distintas partes del sistema a simular, consiguiendo así una simulación más eficiente.

Una reducción adicional del número de operaciones necesaria se consigue realizando una realización conocida como *polifase* de los filtros presentes en los interpoladores y diezmadores. Vamos a obtener en primer lugar la realización de un interpolador empleando una estructura polifase.

En un interpolador (Figura 1.20), la secuencia de entrada al filtro,  $x_{0L}[n]$ , contiene al menos  $L - 1$  ceros por cada  $L$  muestras. Este hecho trae como consecuencia que para el cálculo de la salida del interpolador,  $L - 1$  de cada  $L$  multiplicaciones necesarias van a dar como resultado 0 independientemente de los valores que tome la secuencia antes de la inserción de ceros,  $x[n]$ . De la misma forma,  $L - 1$  de cada  $L$  términos de la suma que hay realizar para calcular la salida son nulos. Para suprimir esas operaciones innecesarias podemos, en primer lugar, analizar la expresión analítica de la salida teniendo en cuenta la definición de  $x_{0L}[n]$ . Si denotamos por  $h[n]$  la respuesta al impulso del filtro paso bajo presente en el interpolador, la salida  $x_i[n]$  en un instante  $n = rL + k$  (con  $r$  y  $k$  números

enteros y  $-\infty \leq r \leq \infty$  y  $0 \leq k < L$ ) toma la forma

$$\begin{aligned}
 x_i[rL + k] &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} x_{0L}[l] h[rL + k - l] \\
 &= \sum_{\substack{l=-\infty \\ l=L}}^{\infty} x_{0L}[l] h[rL + k - l] \\
 &= \sum_{l'=-\infty}^{\infty} x_{0L}[l'L] h[(r - l')L + k] \\
 &= \sum_{l'=-\infty}^{\infty} x[l'] h[(r - l')L + k] \tag{1.251}
 \end{aligned}$$

de la que extraemos dos conclusiones:

- Para el cálculo de la salida en los instantes  $n = rL$  son necesarios únicamente los valores de la respuesta al impulso en los instantes  $n = lL$  ( $-\infty \leq l \leq \infty$ ), para el cálculo de la salida en los instantes  $n = rL + 1$ , los valores de la respuesta al impulso en los instantes  $n = lL + 1$ , y así sucesivamente. En realidad, podemos interpretar (1.251) como  $L$  filtros distintos, cada uno encargado de obtener la salida en los instantes  $n = rL + k$ , con  $k$  tomando valores entre 0 y  $L - 1$ .
- La construcción de la secuencia  $x_{0L}[n]$  no es necesaria (no es necesario generar y almacenar todos los ceros de  $x_{0L}[n]$ ), según se desprende de la última igualdad de (1.251).

La realización del interpolador basado en estas conclusiones tendrá  $L$  filtros con respuestas al impulso

$$h_k[n] = h[nL + k] \quad 0 \leq k < L \tag{1.252}$$

que son empleados para filtrar la secuencia de entrada al interpolador,  $x[n]$ , obteniendo  $L$  secuencias distintas, de la forma

$$x_k[n] = x[n] * h_k[n] \quad 0 \leq k < L \tag{1.253}$$

La salida del interpolador  $x_i[n]$  se construye a partir de estas  $L$  secuencias mediante *multiplexión*, de la forma

$$\dots, x_{L-1}[n-1], x_0[n], x_1[n], \dots, x_{L-1}[n], x_0[n+1], \dots \tag{1.254}$$

o, expresado analíticamente

$$x_i[n] = x_i[rL + k] = x_k[r] \quad -\infty \leq r \leq \infty, 0 \leq k < L \tag{1.255}$$

Esta estructura de filtrado se conoce como *filtro polifase* porque los  $L$  filtros resultantes se obtienen mediante el diezmado de la respuesta al impulso  $h[n]$  por un mismo factor  $L$  pero con una “fase” de diezmado,  $k$ , distinta.

La justificación para la realización de un diezmador mediante una estructura polifase es la siguiente: si el diezmador va a desechar  $M - 1$  de cada  $M$  muestras después de la operación de filtrado, ¿para qué obtener la salida del filtro en esas  $M - 1$  muestras?.

Si denotamos por  $h[n]$  la respuesta al impulso del filtro paso bajo presente en el diezmador (Figura 1.19), la secuencia de salida,  $\tilde{x}_d[n]$ , toma la forma

$$\begin{aligned}
 \tilde{x}_d[n] &= \tilde{x}[nM] \\
 &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} x[l] h[nM - l] \\
 &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{M-1} x[rM + k] h[(n - r)M - k] \\
 &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{M-1} x_k[r] h_k[n - r] \\
 &= \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{r=-\infty}^{\infty} x_k[r] h_k[n - r] \\
 &= \sum_{k=0}^{M-1} x_k[n] * h_k[n] \tag{1.256}
 \end{aligned}$$

que es la estructura polifase para el diezmador, donde  $x_k[n]$  es el resultado del diezmado (sin filtro) de  $x[n]$  a ritmo  $M$  y con fase  $k$ ,

$$x_k[n] = x[nM + k] \quad 0 \leq k < M \tag{1.257}$$

y  $h_k[n]$  el resultado del diezmado de  $h[n]$  a ritmo  $M$  y fase  $-k$

$$h_k[n] = h[nM - k] \quad 0 \leq k < M \tag{1.258}$$

La forma de operar de la estructura polifase para el diezmador podemos verla como sigue: el diezmador va “repartiendo” las muestras de la secuencia de entrada  $x[n]$  entre las secuencias  $x_k[n]$ , desde  $x_0[n]$  a  $x_{M-1}[n]$ ; y por cada grupo de  $M$  muestras de entrada, el diezmador actualiza el contenido de estas secuencias y calcula una única muestra de salida empleando (1.256).

Aunque no lo vamos a analizar aquí, también podemos construir estructuras polifase para las estructuras que realizan un cambio de ritmo por factores racionales  $L/M$  como los representados en la Figura 1.21.

#### 1.4.6. Simulación de sistemas variantes y sistemas no lineales

La elección de la frecuencia de simulación de sistemas lineales e invariantes está basada únicamente en el ancho de banda de la señal de entrada porque la salida cumple, gracias a la propiedad de convolución, la misma restricción de banda que la señal de entrada.

En sistemas que no sean lineales e invariantes la respuesta al impulso deja de representar de forma unívoca al sistema y, por tanto, la aseveración anterior deja de ser cierta. El ejemplo más sencillo lo encontramos en un modulador, que construye su salida  $y(t)$  como  $y(t) = e^{j\omega_0 t} x(t)$ ; este sistema cumple la propiedad de linealidad pero no la de invarianza, y la señal de salida no cumple las restricciones de banda de la señal de entrada ya que  $Y(j\omega) = X(j(\omega - \omega_0))$ . En un caso general, es necesario analizar el comportamiento de este tipo de sistemas para establecer las condiciones en que debe de realizarse su simulación en tiempo discreto.

De entre los sistemas que no son lineales e invariantes conviene distinguir entre los que incumplen únicamente la propiedad de invarianza (sistemas lineales variantes) y los que incumplen la propiedad de linealidad (sistemas no lineales), cumplan o no la propiedad de invarianza. En el primero de los casos, aún podemos obtener una caracterización unívoca del sistema mediante las infinitas respuestas al impulso de la forma (1.71) para tiempo continuo y (1.67) para tiempo discreto. Para sistemas no lineales ni tan siquiera tenemos esta caracterización, y se hace necesario el empleo de modelos que representen de forma exacta o aproximada el comportamiento del sistema. Dada esta diferencia en cuanto a la complejidad de su tratamiento, comenzaremos por el análisis de los sistemas lineales variantes.

Un sistema lineal variante en tiempo continuo puede caracterizarse mediante el conjunto de respuestas al impulso  $h_\tau(t) = \mathcal{L}\{\delta(t - \tau)\}$  que podemos considerar como una única función de dos variables,  $t$  y  $\tau$ . Podemos definir una función de transferencia en el dominio de la frecuencia para estos sistemas de la forma

$$H(\omega, t) \doteq \int_{-\infty}^{\infty} h_\tau(t) e^{-j\omega(t-\tau)} d\tau \quad (1.259)$$

que, aun no siendo la única forma de definir una función de transferencia (como veremos más adelante), en el caso en que el sistema sea invariante ( $h_\tau(t) = h(t - \tau)$ ), se transforma en

$$H(\omega, t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau) e^{-j\omega(t-\tau)} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau') e^{-j\omega(\tau')} d\tau' = H(j\omega) \quad (1.260)$$

La función de transferencia  $H(\omega, t)$  determina de manera unívoca  $h_\tau(t)$ , y podemos encontrar la ecuación de síntesis de (1.259), que resulta ser

$$h_\tau(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega, t) d\omega \quad (1.261)$$

La salida del sistema lineal variante es, de acuerdo con (1.70),

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h_\tau(t) d\tau \quad (1.262)$$

donde, sustituyendo (1.261), queda como

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) d\tau \quad (1.263)$$

que podríamos asimilar a una ecuación de síntesis de la Transformada de Fourier de no ser por la dependencia con  $t$  en  $H(\omega, t)$ . Para salvar este escollo, definimos otra función de transferencia para nuestro sistema lineal variante como

$$H_1(\omega, \theta) \doteq \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega, t) e^{-j\theta t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_\tau(t) e^{-j\omega(t-\tau)} e^{-j\theta t} d\tau dt \quad (1.264)$$

que nos permite expresar  $Y(j\omega)$  como

$$Y(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} H_1(v, \omega - v) X(jv) dv \quad (1.265)$$

Para determinar el ancho de banda de la señal de salida debemos de evaluar (1.265) pero, dado que el sistema sigue siendo lineal, podemos determinar el ensanchamiento espectral que produce el

sistema calculando la salida cuando a la entrada tenemos una senoide compleja  $X(j\omega) = \delta(\omega - \omega_0)$  de la forma

$$Y(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} H_1(v, \omega - v) \delta(v - \omega_0) dv = H_1(\omega_0, \omega - \omega_0) \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_\tau(t) e^{j\omega_0\tau} e^{-j\omega t} d\tau dt \quad (1.266)$$

Si la señal de entrada cumple  $X(j\omega) = 0 \quad \forall |\omega| > \omega_M$  y el espectro  $Y(j\omega)$  definido en (1.266) cumple

$$Y(j\omega) = 0 \quad \forall |\omega| > \omega_d \quad \forall |\omega_0| < \omega_M \quad (1.267)$$

podemos establecer que empleando una frecuencia de muestreo  $\omega_s > 2(\omega_M + \omega_d)$  no se produce “aliasing” en la simulación del sistema lineal variante.

Una vez determinada la frecuencia de muestreo, el sistema lineal variante en tiempo continuo se simula en tiempo discreto empleando también un sistema lineal variante, siendo la expresión de su salida, de acuerdo con (1.67),

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h_k[n] \quad (1.268)$$

donde  $h_k[n]$  se obtiene a partir de  $h_\tau(t)$  empleando el mismo procedimiento que hemos utilizado para determinar la respuesta al impulso del sistema discreto equivalente a uno continuo sin más que tener en cuenta que ahora hay que muestrear en dos variables,  $t$  y  $\tau$  o, lo que es lo mismo, hay que construir las réplicas de  $H_1(\omega, \theta)$  tanto en  $\omega$  como en  $\theta$ .

Un último comentario sobre la simulación de sistemas lineales variantes: en una conexión en serie de sistemas lineales e invariantes podemos intercambiar el orden en que están conectados de forma arbitraria porque la convolución es conmutativa; en sistemas lineales no variantes, al variar el orden de interconexión, varía el comportamiento del sistema completo.

A diferencia de los sistemas lineales variantes o invariantes, el análisis de sistemas no lineales se vuelve, a menudo, intratable de manera analítica y la simulación cobra, si cabe, mayor sentido. Para simular este tipo de sistemas o, en general, para estudiar su comportamiento, se recurre a modelos que representan de forma exacta o aproximada su comportamiento. La práctica totalidad de los modelos propuestos en la literatura describen el comportamiento del sistema en el dominio temporal y su interpretación frecuencial no aporta nada nuevo ni facilita la labor de análisis del sistema. El papel que desempeñaba la función de transferencia en los sistemas lineales e invariantes (una función que, multiplicada a la transformada de la entrada daba como resultado la transformada de la salida) lo cumple ahora una transformación lineal que resulta, en general, más farragosa que la descripción del sistema en el dominio temporal.

No obstante lo anterior, debemos recordar que nuestro objetivo es la simulación en tiempo discreto de señales y sistemas (sean estos lineales o no lineales) y que, aunque no realicemos una definición del sistema equivalente en tiempo discreto ayudándonos de la descripción en el dominio transformado del sistema, sí debemos garantizar que todas las señales presentes en el sistema a simular sean representadas en tiempo discreto sin distorsión por “aliasing”.

Un ejemplo sencillo que muestra la importancia de este aspecto lo obtenemos en un sistema cuya relación entre entrada y salida sea  $y(t) = x^2(t)$ . De acuerdo con la propiedad de multiplicación de la Transformada de Fourier,  $Y(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * X(j\omega)$ , y si la señal de entrada cumple  $X(j\omega) = 0 \quad \forall |\omega| > \omega_M$ ,  $Y(j\omega)$  se extiende desde  $-2\omega_M$  hasta  $2\omega_M$  tomando valores no nulos. De



no tener en cuenta el ancho de banda de la señal de salida del sistema podemos encontrar efectos tan curiosos como que la simulación en tiempo discreto de este sistema mediante  $y[n] = x^2[n]$  con una exponencial compleja de frecuencia  $\omega_s/2$ ,  $x[n] = e^{j\pi n}$ , da como salida una senoide de frecuencia 0 (una constante).

Para el análisis de los sistemas no lineales conviene realizar la separación entre sistemas no lineales con y sin memoria. Los sistemas no lineales sin memoria, más fáciles de tratar, quedan determinados por una función  $g(\cdot)$  que relaciona la amplitud instantánea de la señal de entrada con la de salida de forma

$$y(t) = g(x(t)) \quad (1.269)$$

Existen diversos modelos que proponen expresiones simples para  $g(\cdot)$  apropiados para caracterizar el comportamiento de determinados dispositivos, como el modelo de Saleh para amplificadores de potencia basados en tubos de onda progresiva o TWT (de “*Traveling-Wave Tube*”), los modelos de limitadores por Cann para amplificadores de estado sólido, modelos de recortadores de onda y, en general, de todos los dispositivos presentes en enlace de comunicaciones que tengan un comportamiento no lineal no despreciable. Estos modelos específicos suelen contar con versiones para señales paso bajo (o equivalentes paso bajo) y versiones para señales de banda estrecha (generalmente, expresada en lo que se conoce como características AM/AM y AM/PM), pero en cualquiera de sus versiones poseen las mismas limitaciones: proporcionan una razonable aproximación al dispositivo concreto para los que fueron propuestos, pero no tienen capacidad para representar cualquier sistema no lineal sin memoria.

Existen también modelos no específicos con capacidad para aproximar cualquier tipo de función basados en desarrollos en serie de la función  $g(\cdot)$  e incluso en la Transformada de Fourier. El más utilizado de todos ellos es el desarrollo polinómico de orden  $p$

$$y(t) = g(x(t)) = \sum_{k=0}^p a_k x^k(t) \quad (1.270)$$

cuya principal ventaja con respecto a los modelos específicos es que sabemos de antemano el ancho de banda de la señal a la salida ( $p$  veces el ancho de banda de la señal de entrada) y su principal inconveniente es que para modelar correctamente determinados sistemas el valor de  $p$  debe ser alto (poseen, en general, un mayor número de parámetros libres que los modelos específicos).

La simulación en tiempo discreto de los modelos polinómicos es inmediata sin más que tener en cuenta el ancho de banda de la señal de salida.

Para seguir manteniendo la complejidad del análisis en límites razonables, el estudio de sistemas no lineales con memoria se basa, generalmente, en modelos que combinan sistemas lineales con memoria y sistemas no lineales sin memoria. Así, encontramos el denominado *modelo de Wiener*, que consiste en la conexión en serie de un sistema lineal con memoria seguido de un sistema no lineal sin memoria; el *modelo de Hammerstein*, que consiste en la conexión en serie de un sistema no lineal sin memoria seguido de un sistema lineal con memoria, o el *modelo de Wiener-Hammerstein*, que combina ambos con la conexión en serie de un sistema lineal con memoria, un sistema no lineal sin memoria y un segundo sistema lineal con memoria.

Un caso particular de modelo de Wiener es aquel en el que la no linealidad sin memoria se repre-

senta mediante un desarrollo polinómico como el definido en (1.270) de la forma

$$\begin{aligned}
 y(t) &= g\left(\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau\right) \\
 &= \sum_{k=0}^p a_k \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau\right)^k \\
 &= a_0 + a_1 \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau \\
 &\quad + a_2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1) h(\tau_2) x(t-\tau_1) x(t-\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \\
 &\quad + a_3 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1) h(\tau_2) h(\tau_3) x(t-\tau_1) x(t-\tau_2) x(t-\tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 + \dots
 \end{aligned} \tag{1.271}$$

que, definiendo

$$\begin{aligned}
 h_0 &= a_0 \\
 h_1(t) &= a_1 h(t) \\
 h_2(t_1, t_2) &= a_2 h(t_1) h(t_2) \\
 h_3(t_1, t_2, t_3) &= a_3 h(t_1) h(t_2) h(t_3) \\
 &\vdots
 \end{aligned} \tag{1.272}$$

puede ser reescrita como

$$\begin{aligned}
 y(t) &= h_0 + \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau) x(t-\tau) d\tau \\
 &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau_1, \tau_2) x(t-\tau_1) x(t-\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \\
 &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) x(t-\tau_1) x(t-\tau_2) x(t-\tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 + \dots
 \end{aligned} \tag{1.273}$$

Este tipo de sistemas se conocen con el nombre de *filtros de Volterra* o *sistemas de Volterra*, y el conjunto de funciones  $h_k(\cdot)$  definidas en (1.272) se denomina *núcleos de Volterra*

Para la simulación en tiempo discreto de los filtros de Volterra empleamos su versión para tiempo discreto, definida como

$$\begin{aligned}
 y[n] &= h_0 + \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_1[k] x[n-k] \\
 &\quad + \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} h_2[k_1, k_2] x[n-k_1] x[n-k_2] \\
 &\quad + \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} \sum_{k_3=-\infty}^{\infty} h_3[k_1, k_2, k_3] x[n-k_1] x[n-k_2] x[n-k_3] + \dots
 \end{aligned} \tag{1.274}$$

donde

$$\begin{aligned}
 h_0 &= a_0 \\
 h_1[n] &= a_1 h[n] \\
 h_2[n_1, n_2] &= a_2 h[n_1] h[n_2] \\
 h_3[n_1, n_2, n_3] &= a_3 h[n_1] h[n_2] h[n_3] \\
 &\vdots
 \end{aligned} \tag{1.275}$$

La frecuencia de simulación se escoge de acuerdo con lo dicho para el desarrollo polinómico de la no linealidad sin memoria, y los núcleos de Volterra se obtienen calculando el equivalente en tiempo discreto del sistema lineal e invariante de respuesta al impulso  $h(t)$  previo a la no linealidad.

## 1.5. LECTURAS ADICIONALES

Existen excelentes textos sobre señales y sistemas entre los que destaca, sin duda, el libro de Oppenheim, Willsky y Nawab [5], que considera los casos en tiempo continuo y discreto. De entre los dedicados al análisis de señales y sistemas en tiempo discreto queremos destacar los libros de Oppenheim, Schafer y Buck [4] y el de Proakis y Manolakis [8]. El libro de Papoulis [7] trata, al igual que [5], los casos en tiempo continuo y discreto.

Para profundizar en la Transformada de Fourier se recomiendan los libros clásicos de Bracewell [1] y Papoulis [6]. Una visión algebraica de las señales y los sistemas se encuentra en el libro de Franks [2], texto que también se recomienda para profundizar en la representación de señales paso banda.

Por último, un extenso tratado sobre simulación de enlaces de comunicaciones puede encontrarse en el libro de Jeruchim, Balaban y Shanmugan [3]

## PROBLEMAS

P1.1 Calcule los valores medio y de pico, la energía y la potencia de las siguientes señales:

- 1.1.  $x(t) = 1$
- 1.2.  $x(t) = u(t)$
- 1.3.  $x(t) = e^{-t}$
- 1.4.  $x(t) = \cos(\omega_0 t)$
- 1.5.  $x(t) = \Pi\left(\frac{t}{\alpha}\right)$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ )
- 1.6.  $x[n] = \delta[n]$
- 1.7.  $x[n] = e^{j\omega_0 n}$

P1.2 Calcule la función de ambigüedad temporal de la señal  $\text{sinc}(t)$  y a partir de esta demuestre que dos señales  $\text{sinc}(t)$  desplazadas entre sí un número entero distinto de cero son ortogonales.

P1.3 Determine si cumplen los criterios de memoria, causalidad, invertibilidad, estabilidad BIBO, linealidad e invarianza temporal los siguientes sistemas definidos mediante su relación entrada salida:

- 3.1.  $y(t) = x(-t)$
- 3.2.  $y(t) = \cos(100t) x(t)$
- 3.3.  $y[n] = 2x[n] + 1$
- 3.4.  $y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$

P1.4 Calcule el resultado de las siguientes operaciones de convolución:

- 4.1.  $\Pi(t) * \Pi(t - 10)$
- 4.2.  $u(t) * e^{-10t}$
- 4.3.  $(u[n] - u[n - 5]) * \cos\left(\frac{2\pi n}{5}\right)$
- 4.4.  $(-2)^n u[-n] * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - 10k]$

P1.5 Calcule la Transformada de Fourier de las siguiente señales:

- 5.1.  $x(t) = e^{-|t|}$
- 5.2.  $x(t) = t\Pi(t)$
- 5.3.  $x(t) = \text{sinc}^2(t)$
- 5.4.  $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{sinc}(t - 5k)$

P1.6 La señal  $x(t)$  posee una Transformada de Fourier

$$X(j\omega) = |\omega|\Pi(\omega)$$

Sin calcular la Transformada Inversa de Fourier, determine:

- 6.1. Si  $x(t)$  es una señal par.
- 6.2. Si  $x(t)$  es una señal impar.
- 6.3. Si  $x(t)$  es una señal real.
- 6.4. Si  $x(t)$  es una señal imaginaria pura.
- 6.5.  $\int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt$
- 6.6.  $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$

P1.7 Calcule los anchos de banda 3 dB, equivalente de ruido y de primer nulo de la señal  $x(t) = \Pi(t)$ .

P1.8 Calcule la Transformada de Fourier de las siguientes señales:

- 8.1.  $x[n] = u[n + 2] - u[n - 5]$
- 8.2.  $x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n - 2]$
- 8.3.  $x[n] = n4^n u[3 - n]$
- 8.4.  $x[n] = \cos\left(\frac{\pi n}{3}\right) \text{sinc}\left(\frac{n}{10}\right)$

P1.9 Determine las señales cuyas Transformadas de Fourier son las siguientes:

- 9.1.  $X(e^{j\omega}) = \Pi\left(\frac{4\omega}{\pi} - 2\right)$  (para  $-\pi < \omega \leq \pi$ )
- 9.2.  $X(e^{j\omega}) = e^{j\omega/4}$  (para  $-\pi < \omega \leq \pi$ )
- 9.3.  $X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^{k+1} \delta\left(\omega - \frac{\pi k}{4}\right)$

$$9.4. X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \frac{1}{7}e^{2j\omega}}$$

P1.10 Calcule la Transformada Z de las siguientes señales, indicando su región de convergencia:

$$10.1. x[n] = \cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) u[n]$$

$$10.2. x[n] = 2^n u[n + 5]$$

$$10.3. x[n] = n u[n]$$

$$10.4. x[n] = 3^{-n}u[n] + 3^n u[-n]$$

P1.11 Obtenga las siguientes propiedades de la Transformada de Fourier de tiempo discreto a partir de sus propiedades equivalentes de la Transformada Z sustituyendo  $z$  por  $e^{j\omega}$ :

11.1. Simetría.

11.2. Conjugación.

11.3. Modulación.

11.4. Inserción de ceros.

11.5. Supresión de ceros.

P1.12 Considere el sistema definido por la ecuación en diferencias

$$y[n] = \frac{1}{2}y[n - 1] - \frac{1}{4}y[n - 2] + x[n] + \frac{1}{2}x[n - 1] - \frac{1}{4}x[n - 3]$$

12.1. Obtenga su función de transferencia en el dominio Z.

12.2. Dibuje su diagrama de polos y ceros y determine una realización estable del mismo.

12.3. Obtenga la respuesta al impulso de la realización estable determinada en el apartado anterior.

12.4. Dibuje la respuesta en frecuencia (amplitud y fase) del sistema.

P1.13 Considere las siguientes secuencias:

13.1.  $x_1[n]$ , tal que  $x_1[n] = 0$  fuera del intervalo  $0 \leq n < N$ , cuya Transformada de Fourier es  $X_1(e^{j\omega})$ .

13.2.  $x_2[n]$ , tal que  $x_2[n] = 0$  fuera del intervalo  $\frac{N}{2} \leq n < \frac{3N}{2}$ , cuya Transformada de Fourier es  $X_2(e^{j\omega})$ .

Demuestre las siguientes aseveraciones:

13.1. Si hacemos

$$x_3[n] = e^{-j\omega_1 n} x_1[n]$$

se cumple

$$X_3[k] = X_1(e^{j\omega}) \Big|_{\omega = \frac{2\pi}{N}k + \omega_1}$$

siendo  $X_3[k]$  la DFT de longitud N de  $x_3[n]$ .

13.2. Si hacemos

$$x_3[n] = \begin{cases} x_2[n + N] & 0 \leq n < \frac{N}{2} \\ x_2[n] & \frac{N}{2} \leq n < N \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

se cumple

$$X_3[k] = X_2(e^{j\omega}) \Big|_{\omega = \frac{2\pi}{N}k}$$

siendo  $X_3[k]$  la DFT de longitud  $N$  de  $x_3[n]$ .

P1.14 Considere la señal paso banda

$$x(t) = \text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right) \cos(\omega_1 t) + \text{sinc}^2\left(\frac{t}{2T}\right) \text{sen}(\omega_1 t)$$

con  $\omega_1/T \gg 2\pi$ . Obtenga su equivalente paso bajo e identifique las partes en fase y cuadratura.

P1.15 Las fluctuaciones en la frecuencia de oscilación de los relojes empleados en los procesos de muestreo y reconstrucción de señales en tiempo continuo afectan a la calidad de dichos procesos. En este ejercicio vamos a evaluar la influencia de este fenómeno.

Un modelo simplificado de señal muestreadora con este efecto es el siguiente

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(t - nT_s - \Delta \text{sen } n\frac{2\pi}{m}\right)$$

donde  $T_s$  es el periodo nominal de muestreo, y  $\Delta$  y  $m$  son los parámetros que definen las fluctuaciones.  $T_s$  y  $\Delta$  son números reales, y  $m$  es un número entero. Obsérvese que  $p(t)$  es una señal periódica.

Se pide:

- 15.1. Dibuje la señal  $p(t)$  y determine su periodo en función de los parámetros  $m$  y  $T_s$ .
- 15.2. Calcule la Transformada de Fourier de  $p(t)$  para  $m = 4$  y  $0 \leq \Delta < T_s/2$ .
- 15.3. Empleamos  $p(t)$  para muestrear una señal  $x(t)$  cuyo ancho de banda es  $W$  rad/s, mediante

$$x_p(t) = p(t) x(t)$$

. Determine el máximo valor de  $T_s$  que garantiza la reconstrucción perfecta de  $x(t)$  a partir de  $x_p(t)$  en las siguientes situaciones:

- 15.3.1.  $m = 4$  y  $0 < \Delta < T_s/2$ .
- 15.3.2.  $m = 4$  y  $\Delta = 0$ .

P1.16 En el proceso de producción de un "Compact Disc" (CD) de audio, las fases de grabación y mezclado de las distintas fuentes sonoras se realizan generalmente con las señales muestreadas a 48 KHz ó a un múltiplo entero de esta frecuencia, mientras que el estándar de CD de audio especifica una frecuencia de muestreo de 44,1 KHz. Mediante la conexión en serie de combinaciones de interpoladores y muestreadores como los mostrados en la Figura 1.21, diseñe un sistema para cambiar la frecuencia de muestreo de 96 a 44,1 KHz empleando el menor número de interpoladores y diezmadores y con valores de  $L$  y  $M$  inferiores siempre a 10.

# BIBLIOGRAFÍA

- [1] R. N. Bracewell. *The Fourier Transform and Its Applications*. Electrical and Electronic Engineering Series. McGraw-Hill, New York, NY, EEUU, segunda edición, 1986.
- [2] L. E. Franks. *Teoría de la Señal*. Editorial Reverté, Barcelona, España, 1975.
- [3] M. C. Jeruchim, P. Balaban y K. S. Shanmugan. *Simulation of Communication Systems*. Applications of Communications Theory. Plenum Press, New York, NY, EEUU, 1992.
- [4] A. V. Oppenheim, R. W. Schaffer y J. R. Buck. *Discrete-Time Signal Processing*. Signal Processing Series. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, EEUU, segunda edición, 1999.
- [5] A. V. Oppenheim, A. S. Willsky y S. H. Nawab. *Signals and Systems*. Signal Processing Series. Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, EEUU, segunda edición, 1996.
- [6] A. Papoulis. *The Fourier Integral and Its Applications*. McGraw-Hill, New York, NY, EEUU, 1962.
- [7] A. Papoulis. *Signal Analysis*. McGraw-Hill, New York, NY, EEUU, 1977.
- [8] J. G. Proakis y D. G. Manolakis. *Introduction to Digital Signal Processing*. Macmillan Publishing Company, New York, NY, EEUU, segunda edición, 1996.





# ÍNDICE ALFABÉTICO

- Componente en cuadratura de una señal paso banda, 57
- Componente en fase de una señal paso banda, 57
- Convolución circular, 53
- Convolución en tiempo continuo, 18
- Convolución en tiempo discreto, 18
- Convolución periódica, 36
  
- dB, 31
- Decibelio, 31
- Delta de Dirac, 7
- Delta de Kronecker, 8
- Demodulador en cuadratura, 56
- Densidad espectral de energía, 28
- Desarrollo en Serie de Fourier para secuencias, 38
- Desarrollo en Serie de Fourier para señales en tiempo continuo, 29
- DFT, 51
- Diagrama de Bode, 33
- Diagrama de polos y ceros de un sistema lineal e invariante, 44
- Diezmador, 67
- Distorsión de apertura, 64
- Divisor de fase, 57
- Dominio natural, 23
- Dominio transformado, 23
  
- Envolvente de una señal paso banda, 57
- Equivalente paso bajo, 56
- Exponenciales complejas en tiempo continuo, 9
- Exponenciales complejas en tiempo discreto, 9
- Exponenciales reales en tiempo continuo, 9
- Exponenciales reales en tiempo discreto, 9
  
- FFT, 52
- Filtro FIR, 72
- Filtro IIR, 72
- Filtros de Volterra en tiempo continuo, 80
- Filtros ideales, 32
- Filtros polifase, 74
- Forma de onda, 23
- Funciones escalón, 8
- Función de ambigüedad temporal, 12
- Función de transferencia, 21
- Función de transferencia en el dominio de Laplace, 21
- Función de transferencia en el dominio Z, 22
- Función racional, 43
- Función sinc, 10
  
- IDFT, 52
- Interpolador, 67
- Invarianza de la respuesta al impulso, 71
  
- Modelo de Wiener-Hammerstein de sistemas no lineales, 79
- Modelo de Hammerstein de sistemas no lineales, 79
- Modelo de Wiener de sistemas no lineales, 79
  
- Periodo fundamental de una señal periódica, 3
  
- Región de convergencia de la Transformada Z, 38
- Retardo de grupo, 31
  
- Señal analítica, 58
- Señales de energía finita, 6
- Señales ortogonales, 12
- Sinuoides complejas en tiempo continuo, 8
- Sinuoides complejas en tiempo discreto, 9
- Sistema causal, 15
- Sistema de fase lineal, 31
- Sistema de fase mínima, 45
- Sistema estable BIBO, 16
- Sistema invariante, 17
- Sistema invertible, 16
- Sistema lineal, 16
- Sistema paso todo, 48
- Sistema sin memoria, 15

Teorema de muestreo de Nyquist, 62  
Transformación bilineal, 73  
Transformada de Laplace para señales en tiempo  
continuo, 21  
Transformada Z para señales en tiempo discreto,  
23  
Transformador de Hilbert, 58